Тема 17 Методы условной оптимизации1

- *Постановка задач*
- *Метод штрафных функций*

Постановка задач

- Найти минимум функции

$$y = f(x_1 \ldots x_n) = f(\vec{x}).$$

- При ограничениях

$$g_k(\vec{x}) \le 0,\ k = 1 \ldots m$$
$$g_k(\vec{x}) = 0,\ k = m+1 .. m+p$$

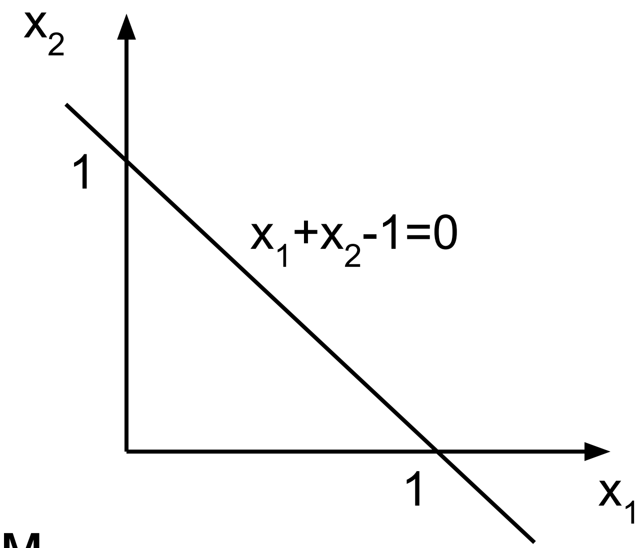
Условия типа равенств

$$g_k(\vec{x}) = 0,\ \ k = m+1..m+p$$

- выделяют в пространстве некоторую гиперповерхность размерности *p*. Используя условия типа равенств можно выразить *p* переменных через оставшиеся *n-p* и таким образом уменьшить размерность задачи на *p* (*n*=*n-p*) и оставить только ограничения типа неравенств.

Пример понижения размерности

$$\begin{cases} y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^4 \\ g_1 = -x_1 \le 0 \\ g_2 = -x_2 \le 0 \\ g_3 = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$



Выражаем x_2 через x_1, получаем

$$x_2 = 1 - x_1$$

$$\begin{cases} y = x_1^2 + 2(1 - x_1)^4 \qquad 0 \le x_1 \le 1 \\ g_1 = -x_1 \le 0 \\ g_2 = -(1 - x_1) \le 0 \Rightarrow x_1 - 1 \le 0 \end{cases}$$

Условия типа неравенств

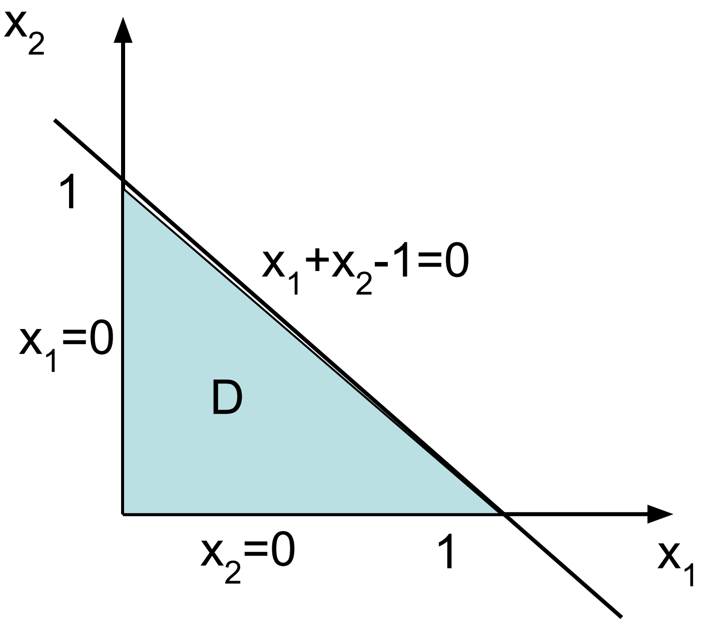
$$g_k(\vec{x}) \leq 0, \; k = 1...m$$

- выделяют n - мерную область D, ограниченную гиперповерхностями

$$g_k(\vec{x}) = 0, \; k = 1..m$$

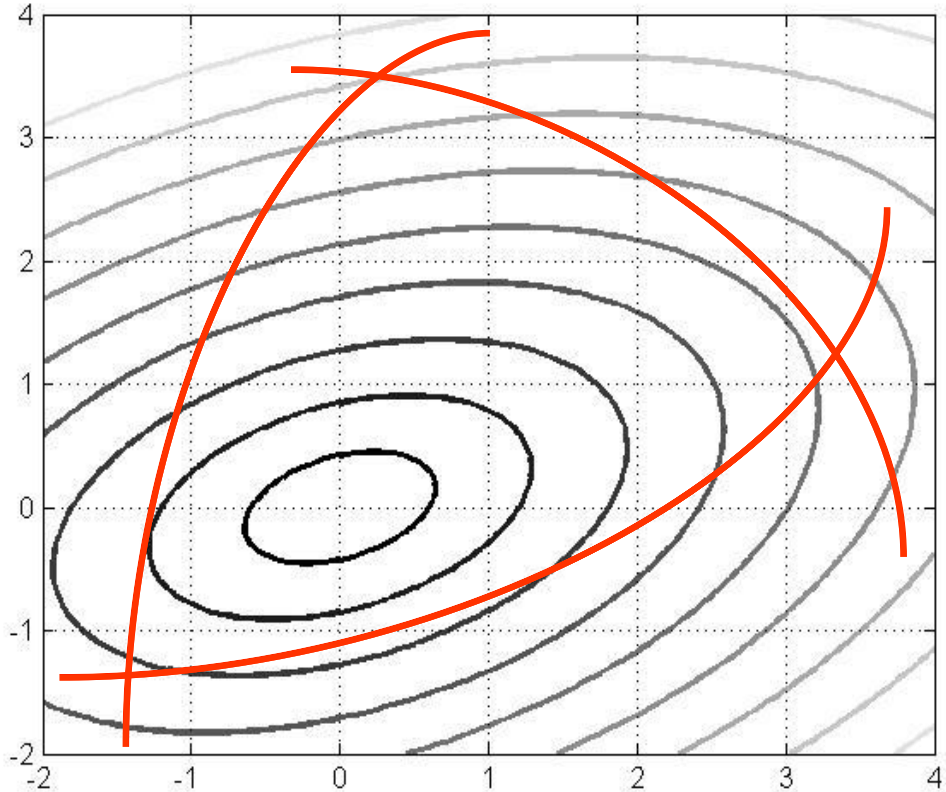
Пример выделения области D

$$
\begin{cases}
y = f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + 2x_2^4 \\
g_1 = -x_1 \le 0 \\
g_2 = -x_2 \le 0 \\
g_3 = x_1 + x_2 - 1 \le 0
\end{cases}
$$



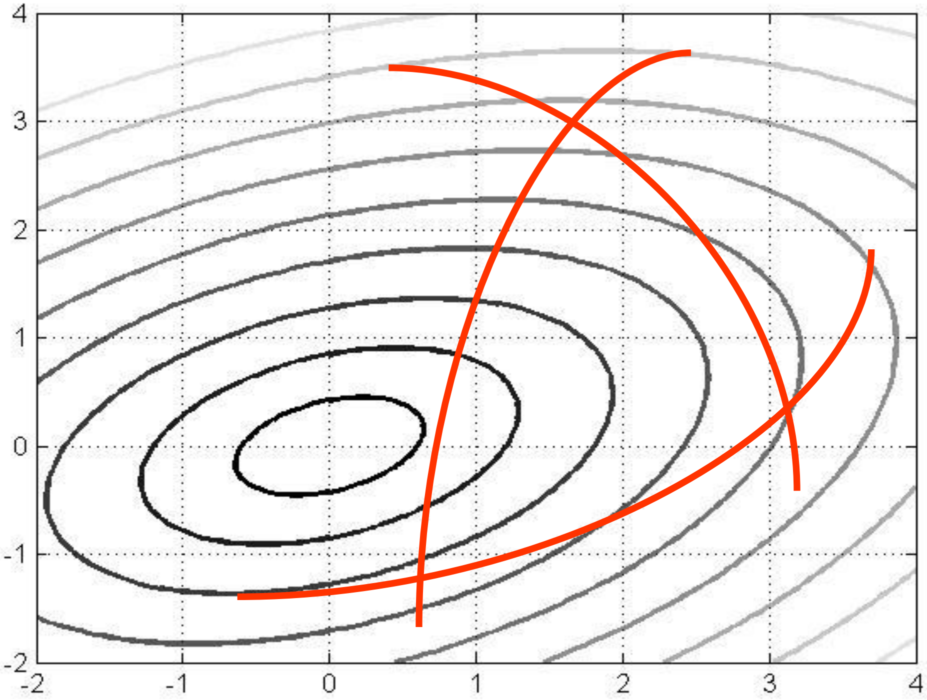
Точка минимума принадлежит области D

Минимум функции при наличии ограничений совпадает с минимумом функции без ограничений



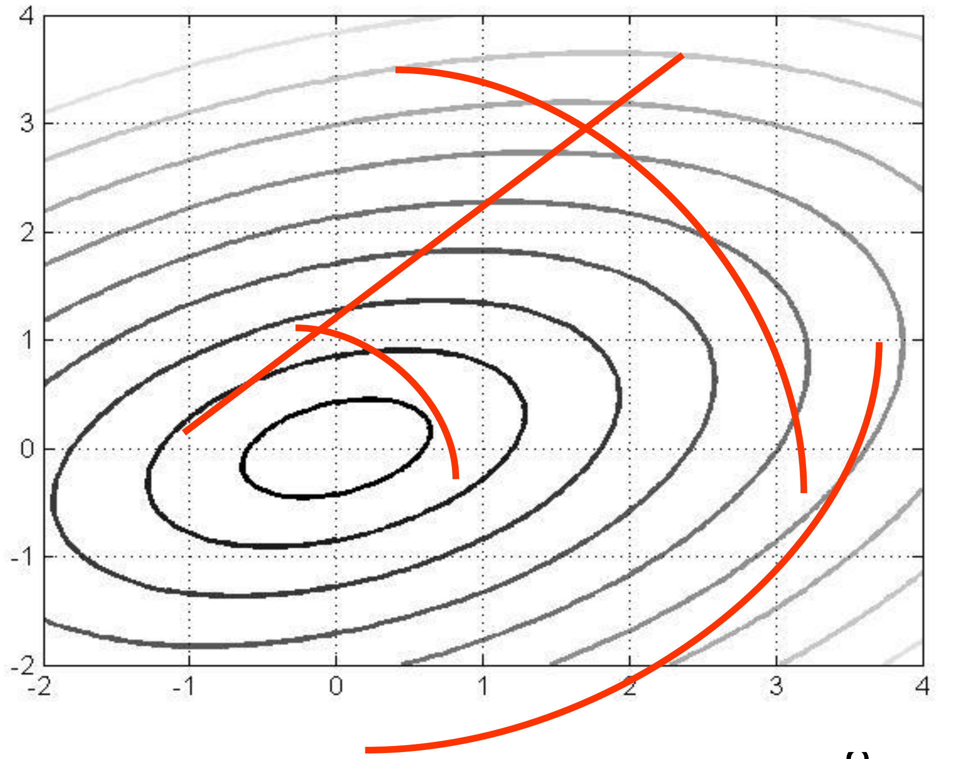
Точка минимума лежит вне области D

Точка условного минимума лежит на одной из кривых, ограничивающих область



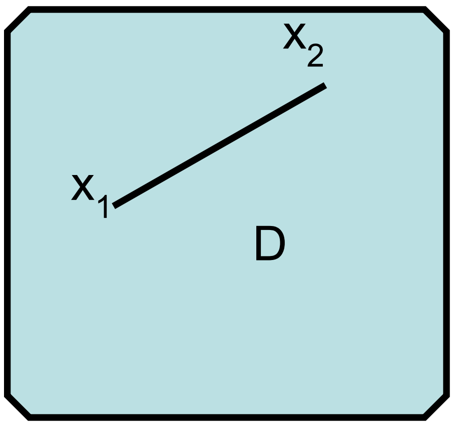
Область с локальными минимумами

Возможны несколько локальных условных минимумов

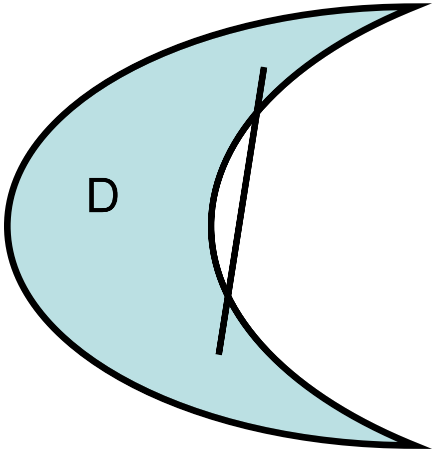


Выпуклая область

- Область D называется выпуклой, если отрезок прямой, соединяющий любые две точки принадлежащие D принадлежит D.



Выпуклая

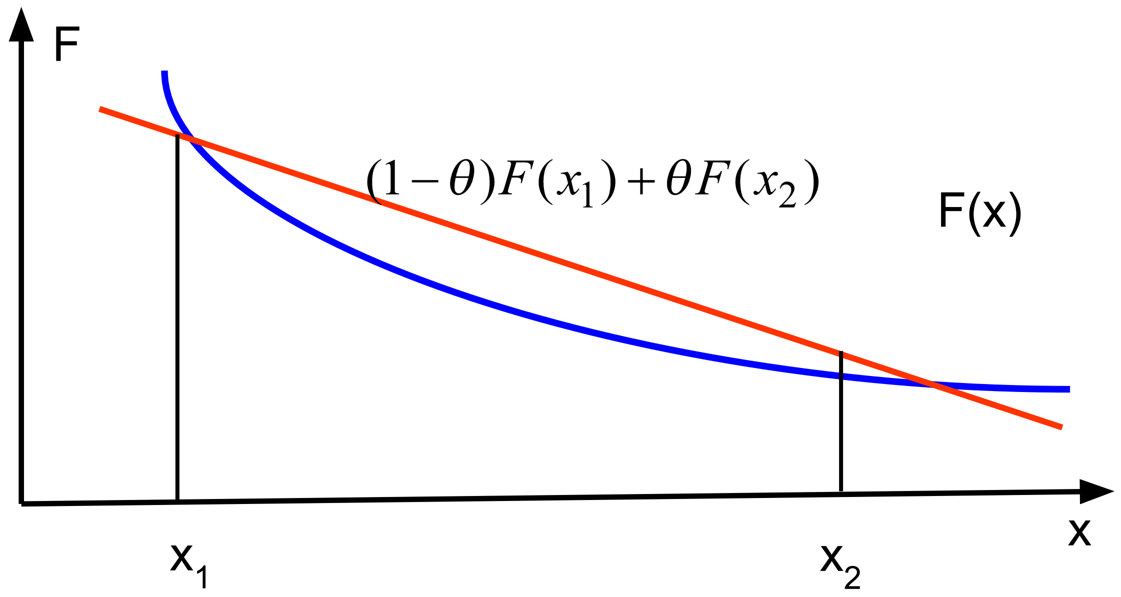


Невыпуклая

Выпуклая функция

- Функция F(x) называется выпуклой, на области $x \in X$ если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ выполняется соотношение

$$F[(1-\theta)\vec{x}_1 + \theta \vec{x}_2] \le (1-\theta) F(\vec{x}_1) + \theta F(\vec{x}_2); \quad 0 < \theta < 1$$



Матрица Гессе выпуклой функции положительно определена

Условие выпуклости области

- Для того чтобы область D описанная неравенствами

$$g_k(\vec{x}) \le 0,\ k = 1...m$$

была выпуклой,
необходимо, чтобы функции $g_k(x)$, были выпуклыми.

- Если целевая функция f и область D выпуклы, то приходим к задаче выпуклого программирования, для которой справедлива вся нижеприведенная теория

Метод штрафных функций

- Напомним постановку задачи

- Найти минимум функции

$$y = f(x_1 \ldots x_n) = f(\vec{x}).$$

- При ограничениях

$$g_k(\vec{x}) \le 0, \; k = 1 \ldots m$$

$$g_k(\vec{x}) = 0, \; k = m + 1..m + p$$

Метод штрафных функций

- Введем следующую вспомогательную функцию

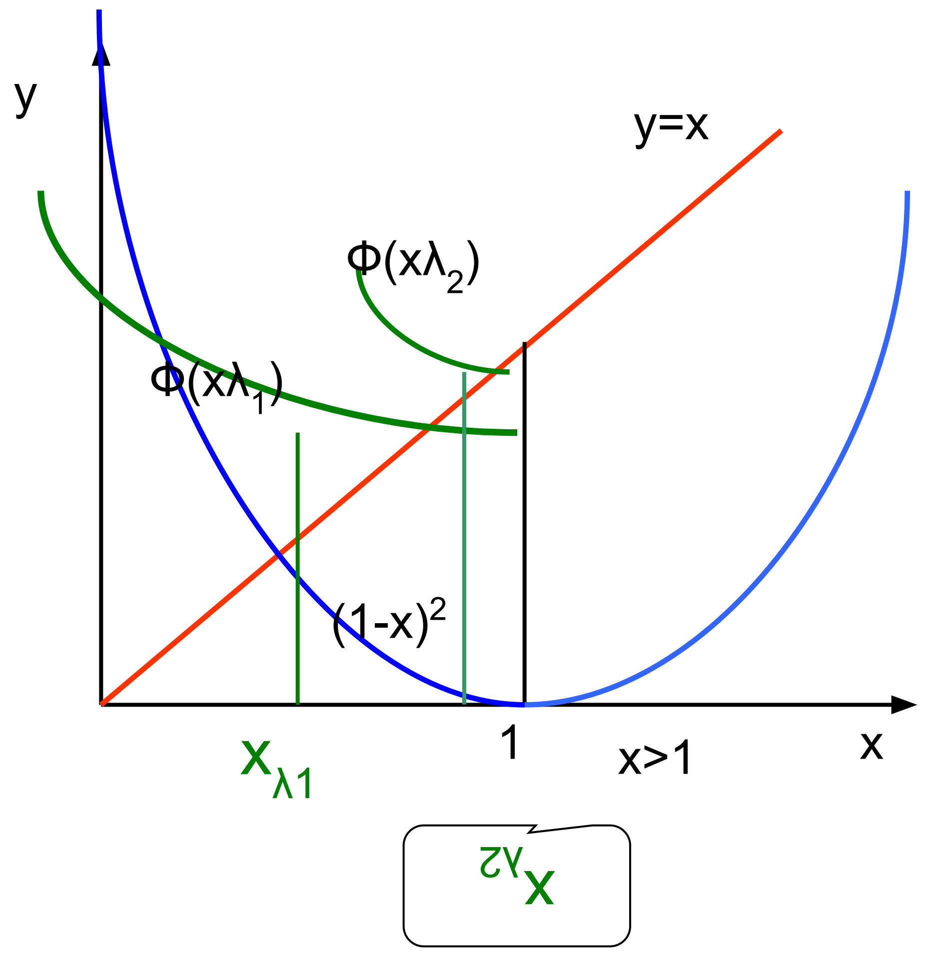
$$\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(\vec{x}) g_k^2(\vec{x}) \Big(1 + \operatorname{sign}(g_k(\vec{x}))\Big) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k(\vec{x}) g_i^2(\vec{x}), \quad \lambda_k(x) > 0,$$

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$

Поясним простым примером

- $\min f(x)=x$
- $g(x)=1-x\leq 0$
- $\Phi(x)=x+\lambda(1-x)^2$
- $x_\lambda=1-0.5/\lambda$
- $\lambda\to\infty \quad x_\lambda\to 1$



Программная реализация

- **нахождение минимума функции одной переменной**

```
• function optim
• global x0;
• x0=2
• xmim=fminbnd(@foc,-5.0,5.0)

• function y=foc(x);
• global x0;
• y=(x-x0).^2; %здесь записывается своя функция
• return
•
• Результат:
• x0 =
•       2
• xmim =
•       2
```

- **нахождение минимума функции двух переменных**

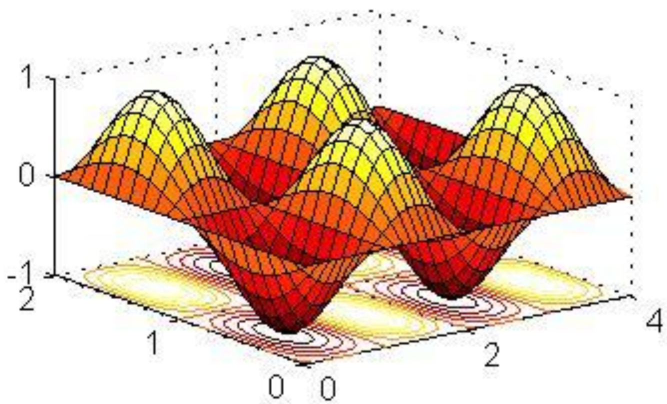
- `function optim`
- `global x0;`
- `x0=0.3`
- `options = optimset('Display','iter','TolX',1.0e-3);`
- `[xmim,fmin]=fminsearch(@foc,[1.0,1.5],options)`

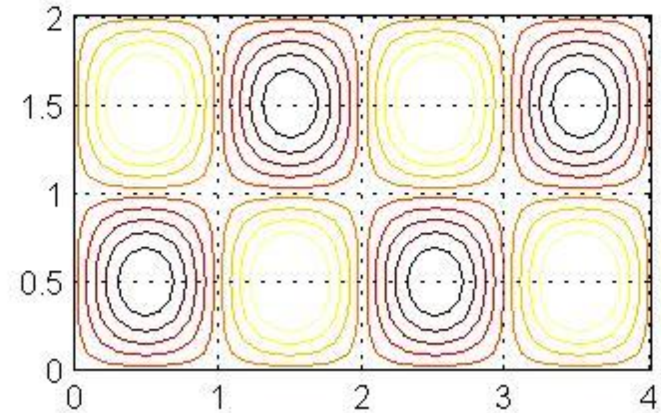
- `function y=foc(x);`
- `global x0;` %передача x0 внутрь функции
- `x1=x(1);`
- `x2=x(2);`
- `y=-sin(pi*(x1-x0)).*sin(pi*x2);`
- `return`

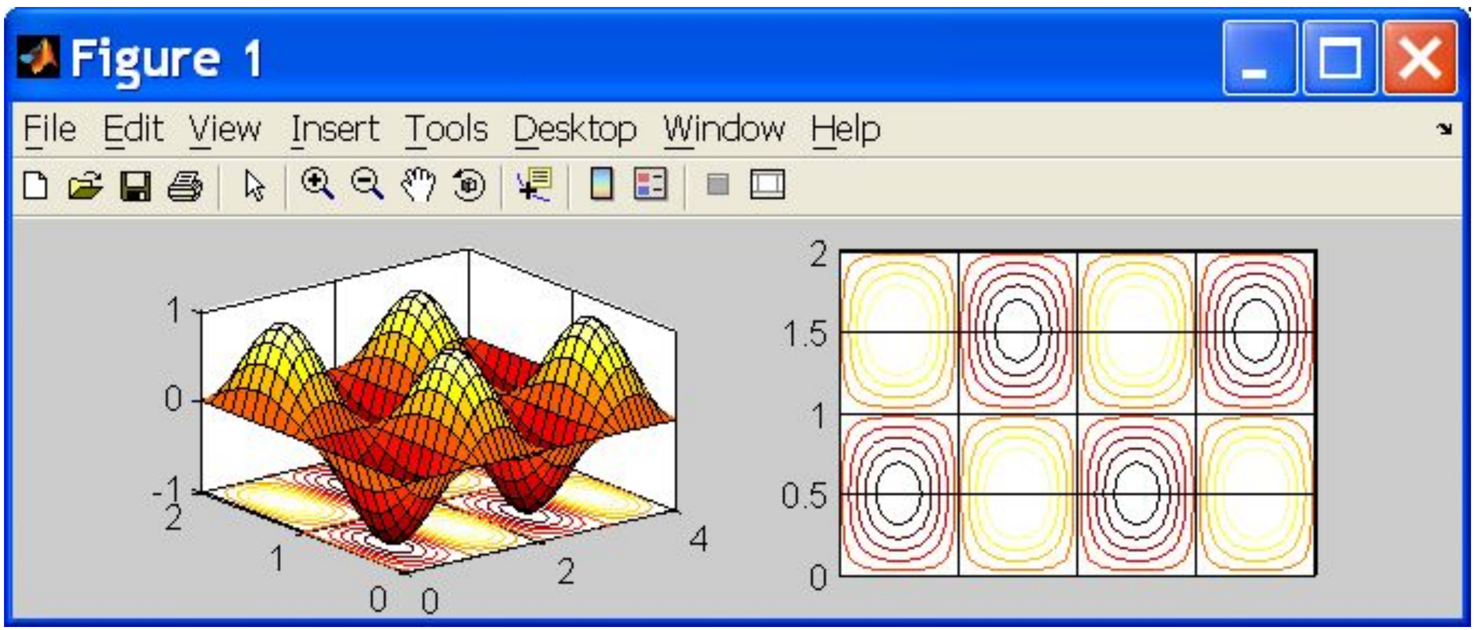
Графическое исследование двумерной функции

```
function grf;
[x,y]= meshgrid(0:0.1:4,0:0.1:2);
z=-sin(pi*x).*sin(pi*y);

subplot(1,2,1);
surfc(x,y,z);
%colormap(winter)

subplot(1,2,2);

%levels = 0:-0.1:-5;
%contour(x,y,z,levels)
contour(x,y,z,10)
%colorbar
colormap(hot) %(jet) (hot) (winter)(gray)
grid on
return
```

Получаемый график







ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№	функция f(x1,x2)	ограничения
N	$(x_1-1)^2+x_2$	$x_1+x_2^2\le 0$
N1	$-x_1^2-x_2^2$	$x_1\ge 0;\ \ x_2\ge 0;\ \ x_1+2x_2\le 3$

$$\Phi_N=(x_1-1)^2+x_2+\lambda\left(x_1+x_2^2\right)^2\left(1+sign(x_1+x_2^2)\right)$$

$$\Phi_{N1}=-x_1^2-x_2^2+\lambda_1(-x_1)^2(1+sign(-x_1))+\lambda_2(-x_2)^2(1+sign(-x_2))+$$
$$+\lambda_3(x_1+2x_2-3)^2(1+sign(x_1+2x_2-3))$$