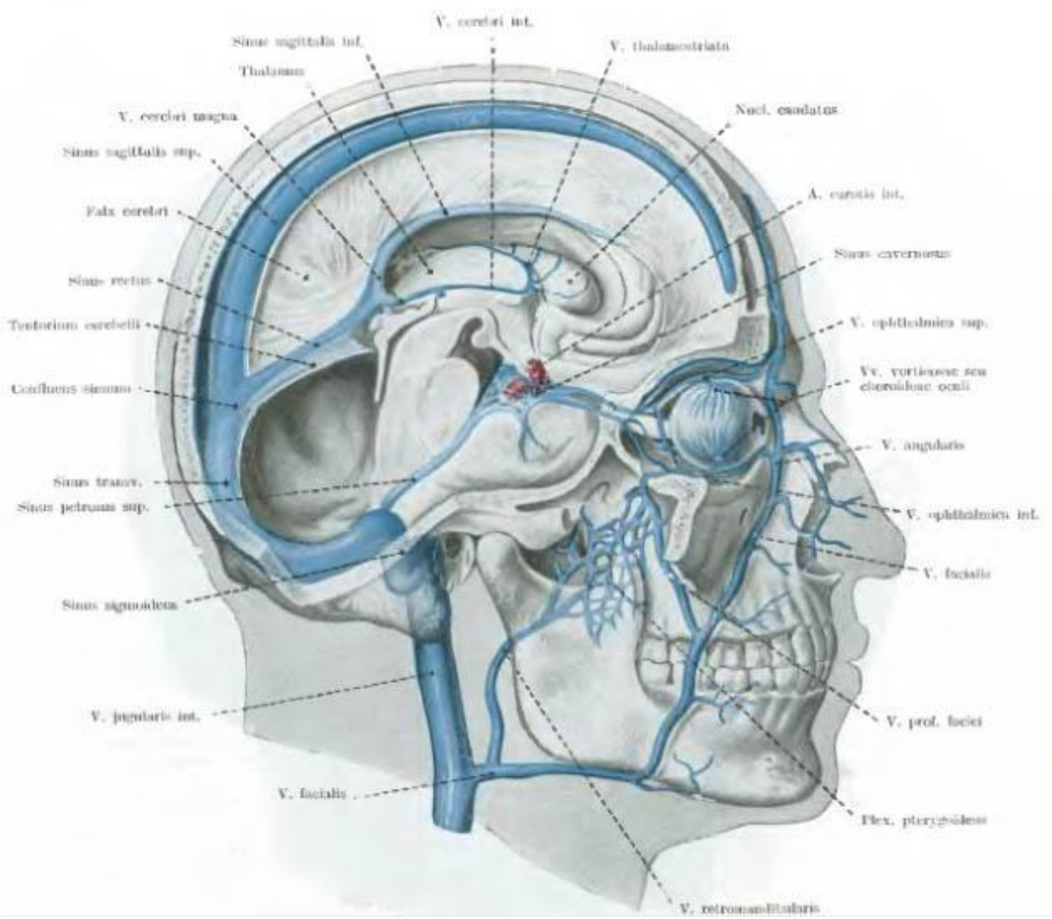
3. Основной математический аппарат



3.1. δ – функция Дирака

- В 1930 году для решения задач теоретической физики английскому физику П. Дираку, одному из основателей квантовой механики, не хватило аппарата классической математики, и он ввел новый объект, названный “**дельта-функцией**”, который выходил за рамки классического определения функции.

δ – функция Дирака

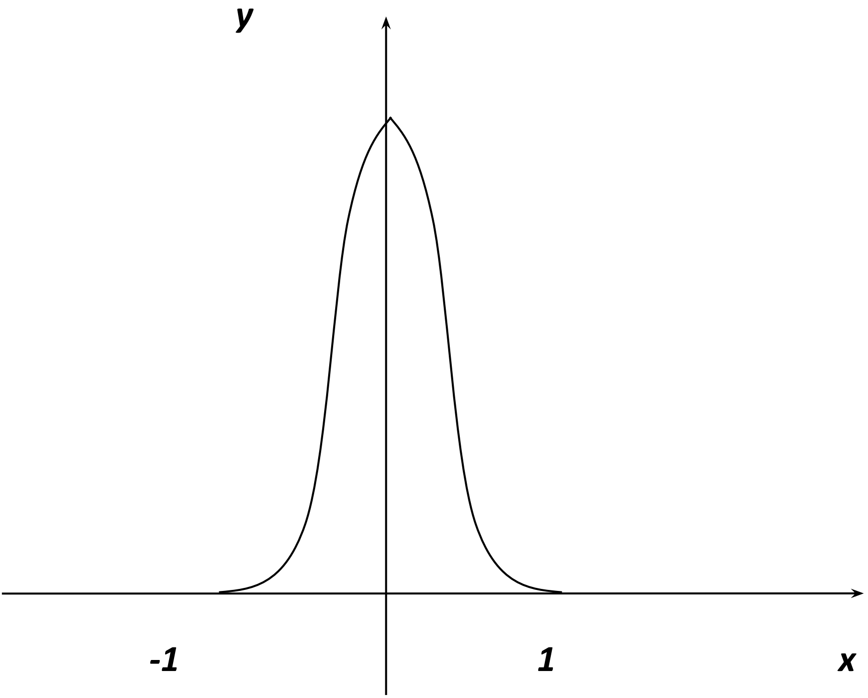
- П. Дирак определил дельта-функцию δ(x) следующим образом:

$$\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases}$$

Кроме того задается условие:

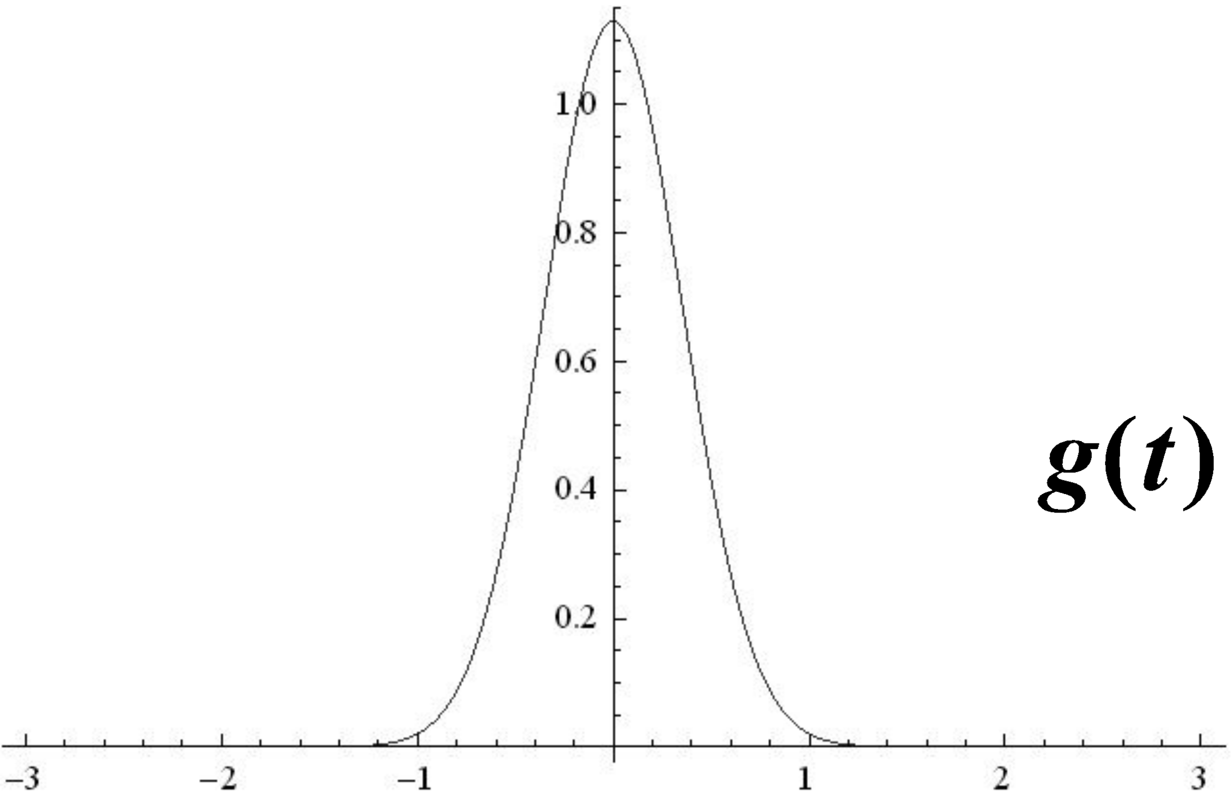
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

δ – функция Дирака



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

δ – функция Дирака



$$g(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1.$$

δ – функция Дирака

- Чем более узкой сделать полоску между левой и правой ветвью, тем выше должна быть эта полоска, для того чтобы площадь полоски (т.е. интеграл) сохраняла свое заданное значение, равное **1**. При сужении полоски мы приближаемся к выполнению условия $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, то есть функция приближается к дельта-функции. Такая функция широко применяется в радиофизике.

δ – функция Дирака

- $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле, так как из этого определения следуют несовместимые условия с точки зрения классического определения функции и интеграла: $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$

но $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

В классической математике такая функция не существует

δ – функция Дирака

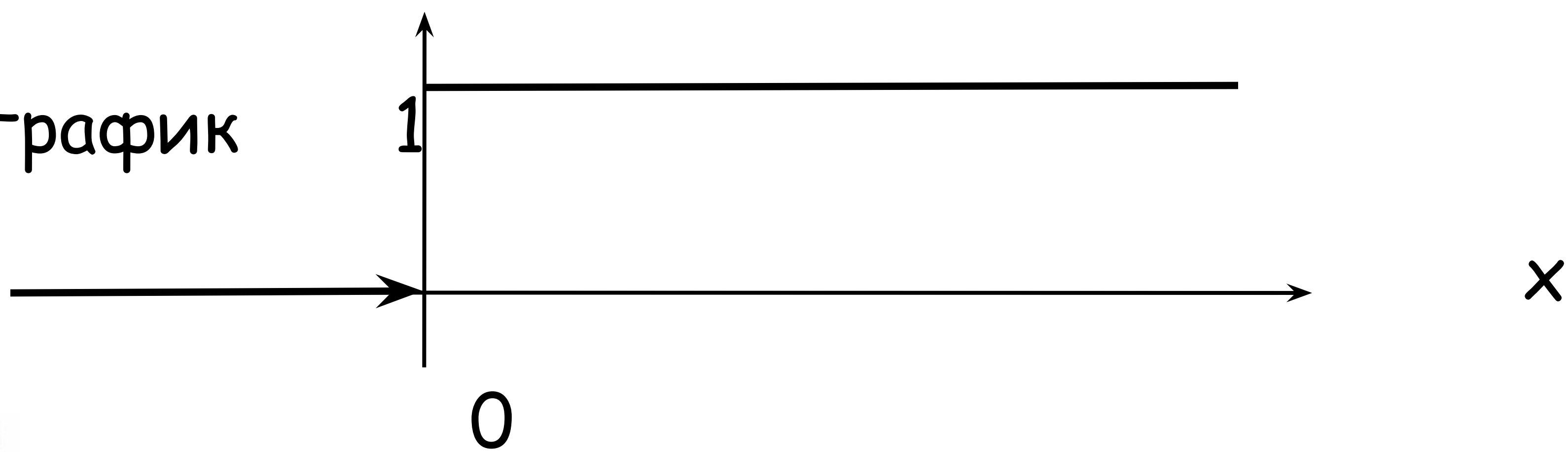
- Функции, из которых предельным переходом получается δ – функция могут быть непрерывными и разрывными.
- **Импульс** в электротехнике – это одиночный, кратковременный скачок электрического тока или напряжения.
- В математической модели импульс соответствует δ – функции.

Функция единичного скачка

- Определим **функцию единичного скачка**, которая называется еще **функцией Хевисайда**:

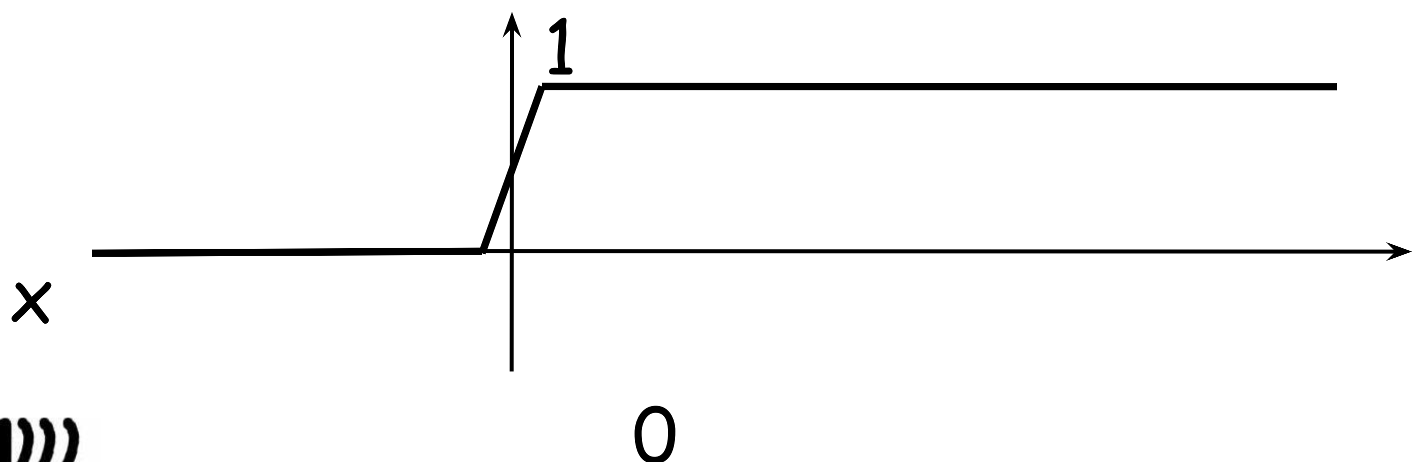
$$1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Ее график



Функция единичного скачка

- Производная функции Хевисайда существует и равна нулю во всех точках, кроме **x=0**. В этой точке предел отношения приращения функции и приращению аргумента уходит на бесконечность. Если построить последовательность кусочно-линейных функций вида,



Функция единичного скачка

- то очевидно, что производными для таких функций служат ступенчатые функции (прямоугольные импульсы !), последовательность которых стремится к **δ-функции**. Таким образом, **производной функции Хевисайда является δ-функция**.

$$\frac{d1(x)}{dx} = \delta(x) \qquad \frac{d1(x-a)}{dx} = \delta(x-a)$$

- Применение функции Хевисайда и δ-функции сохраняет математических свойств в приложениях (например, в теории вероятностей) и позволяет применять аппарат математического анализа.

3.2. Функция распределения дискретной случайной величины

- Пусть дискретная случайная величина **X(ω)** принимает три значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ с вероятностями:

$$X(\omega) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{с вероятностью } \boldsymbol{p_1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \\ \mathbf{1}, \text{с вероятностью } \boldsymbol{p_2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \\ \mathbf{2}, \text{с вероятностью } \boldsymbol{p_3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}. \end{cases}$$

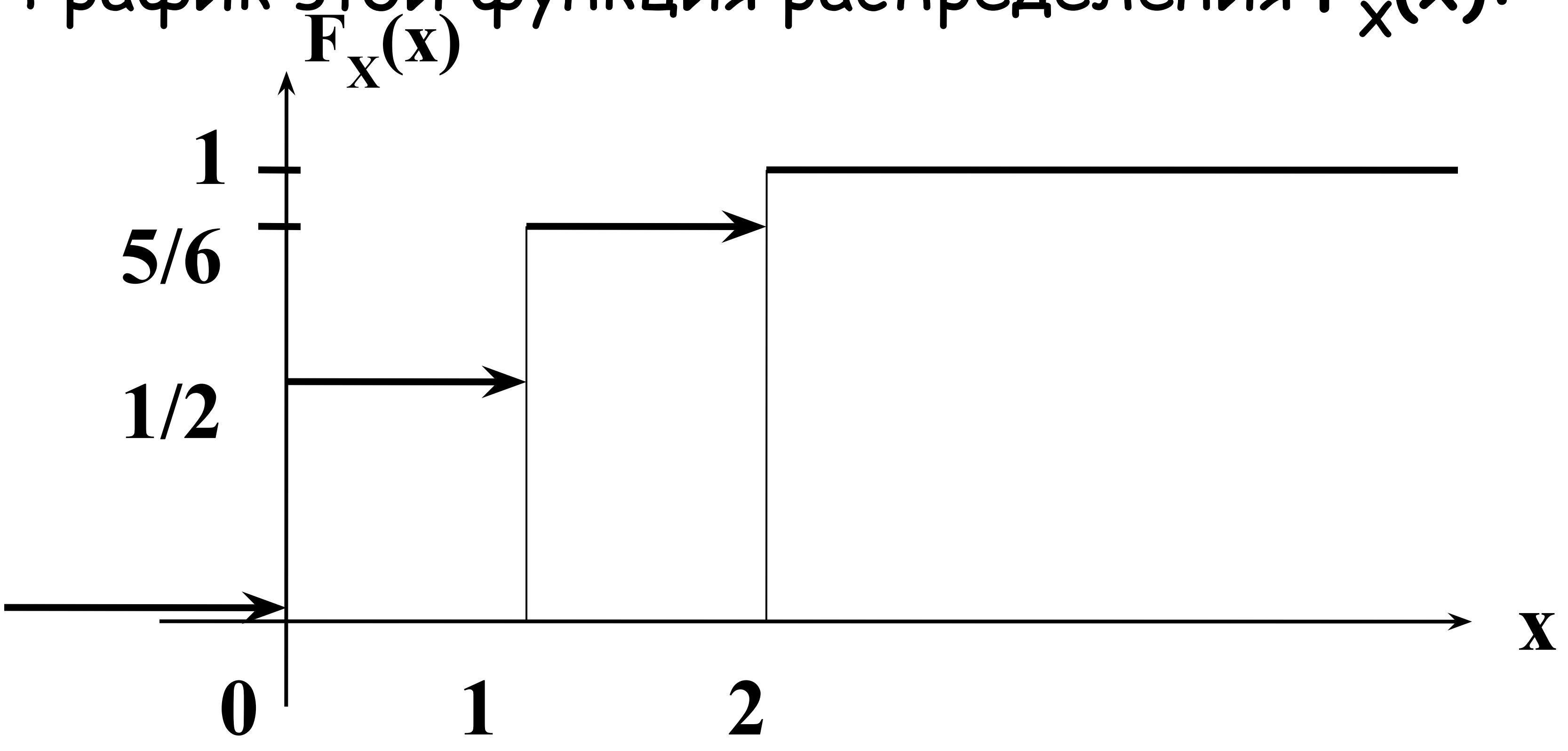
Функция распределения дискретной случайной величины

- Тогда функция распределения $F_X(x)$ дискретной случайной величины $X(\omega)$ по определению равна $F_X(x) = P\{X(\omega) \le x\}$, она равна

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \frac{5}{6}, & \text{если } 1 \le x < 2, \\ 1, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Функция распределения дискретной случайной величины

- График этой функция распределения $F_X(x)$:

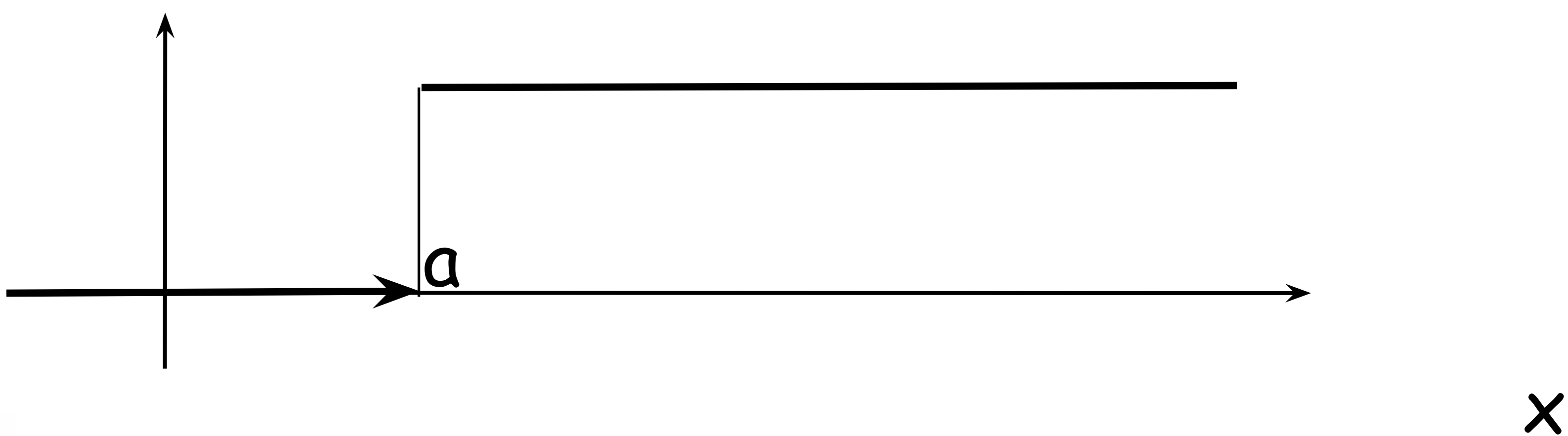


Функция распределения дискретной случайной величины

- Как известно из теории вероятностей, производной такой функция распределения $\mathbf{F_X(x)}$ не существует, то есть случайная величина $\mathbf{X(\omega)}$ не имеет функции плотности распределения $\mathbf{p_X(x) = F'_X(x)}$.
- Но применяя **δ-функцию**, можно построить функции плотности распределения $\mathbf{p_X(x)}$ и для $\mathbf{X(\omega)}$.

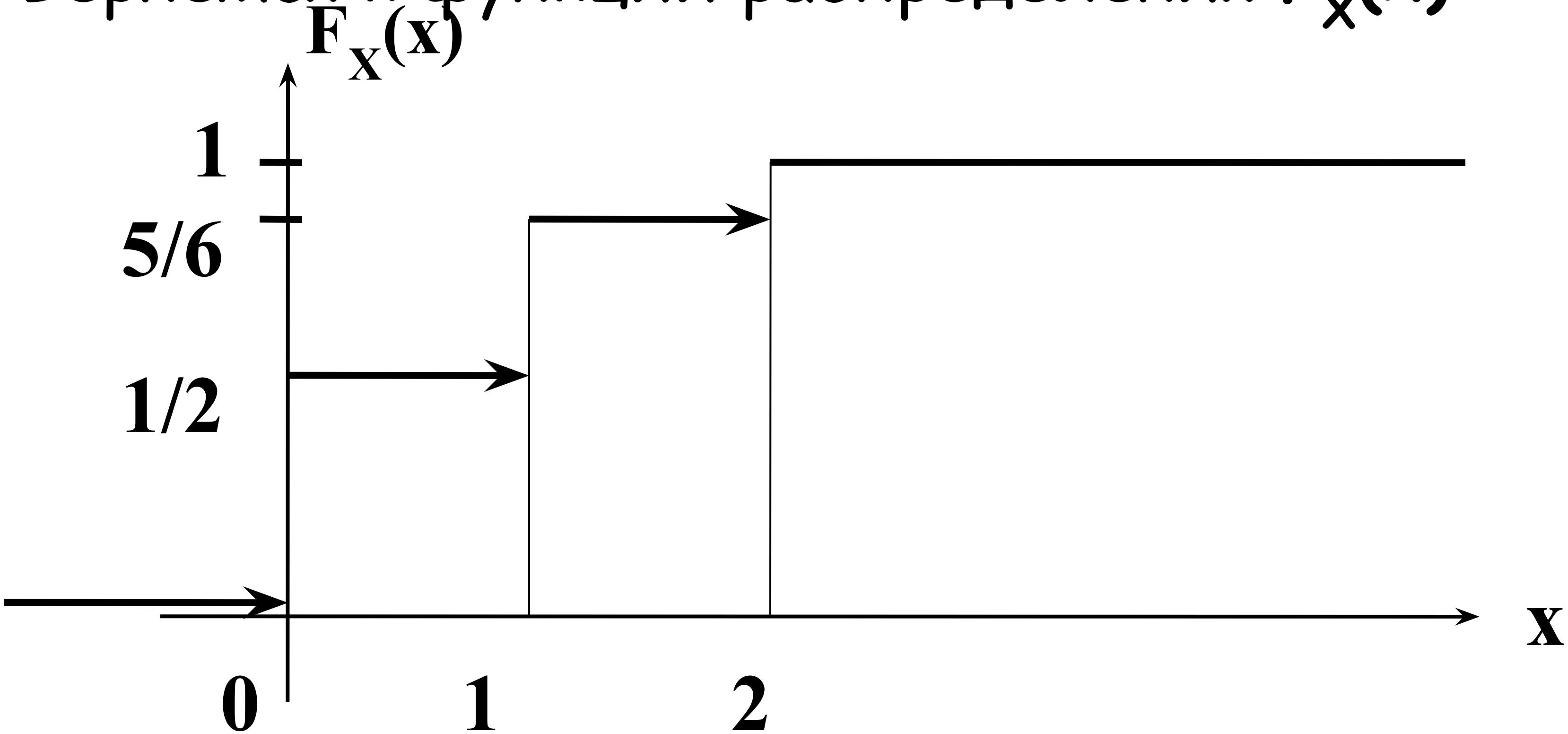
Функция распределения дискретной случайной величины

- Для построения функции плотности $p_X(x)$ вначале построим функцию распределения $F_X(x)$ с использованием **функции единичного скачка**
- График функции $a\,1(\,x - c\,)$



Функция единичного скачка

- Вернемся к функции распределения $F_X(x)$:



Функция распределения дискретной случайной величины

- Такую функцию плотности $F_X(x)$ можно выразить через функцию единичного скачка **1(x)** . В точках разрыва функция распределения $F_X(x)$ увеличивается на вероятность в точке разрыва, то выполняется скачок, например, в точке **x=1** скачок равен **1/3**. Этот скачок можно выразить функцией Хевисайда с коэффициентом **1/3**.

$$\frac{1}{3}1(x-1)$$

- \- это скачок на **1/3** в точке **x=1**.

Функция распределения дискретной случайной величины

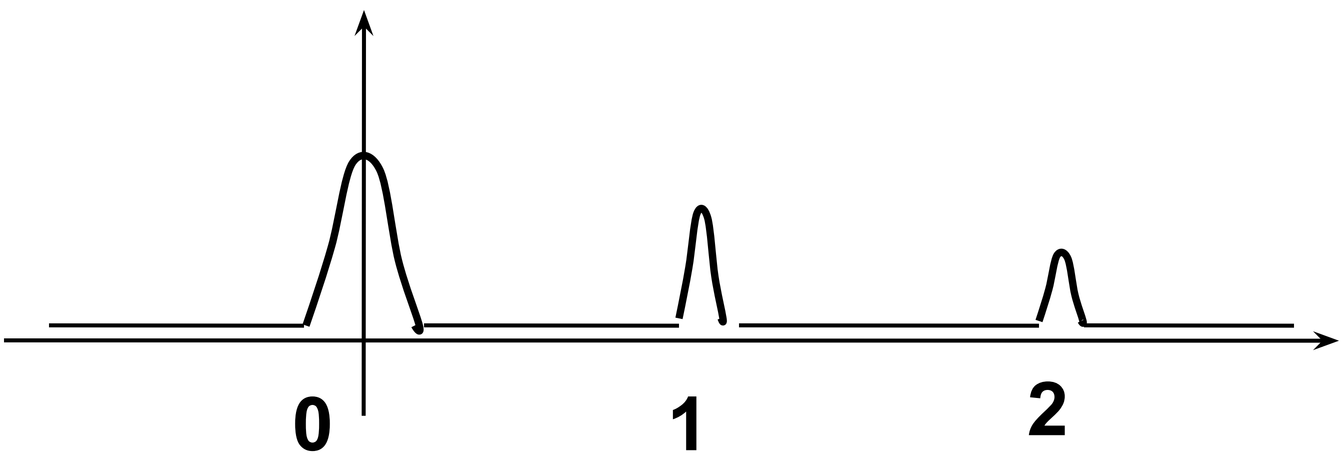
- Функцию плотности $\mathbf{F_X(x)}$ можно записать через функцию единичного скачка $\mathbf{1(x)}$ в следующем виде

$$F_X(x) = \frac{1}{2}1(x) + \frac{1}{3}1(x-1) + \frac{1}{6}1(x-2)$$

- производная функции $\mathbf{F_X(x)}$:
- $\mathbf{p_X(x) = F'_X(x) = 1/2\ \delta(x) + 1/3\ \delta(x-1) + 1/6\ \delta(x-2)}$

Функция распределения дискретной случайной величины

- Такая функция $p_X(x)$ удовлетворяет всем свойствам функции плотности. Ее график приблизительно такой:



3.2. Преобразование Лапласа

- Преобразование Лапласа применяется для исследования дифференциальных уравнений. Оно преобразует **дифференциальное уравнение в алгебраическое**, которое обычно решается проще. Затем полученное решение может быть преобразовано к решению дифференциального уравнения обратным преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа

$\mathcal{L}\{ f(t)\} = F(s)$

Дифференц уравнение $f(t)$ → **Прямое** → **Алгебраическое уравн** $F(s)$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

Алгебраическое уравн $F(s)$ → **Решение алг уравнения** $F(s)$

Решение алг уравнения $F(s)$ → **Обратное** → **Решение диф уравнение** $f(t)$

Преобразование Лапласа

- Преобразованием Лапласа **F(s)** функции **f(t)**, определенной для **t ≥ 0**, называется интегральное преобразование:

$$F(s) = L(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

(обычно требуется брать интеграл по частям).

Переменная **s** комплексная, переменная **t** тоже может быть комплексной.

Преобразование Лапласа

- Пример. Найти преобразование Лапласа функции единичного скачка (Хевисайда)

$$\mathbf{1(t)} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ если } \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, \qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

- Решение. $$L(1(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}$$

- При Re **s** > $\leq$ этот несобственный интеграл сходится и равен **-1/s**, при Re $L(1(t)) = -\frac{1}{s}$рал не существует.
- Таким образом, если Re **s** > **0** , то

Преобразование Лапласа

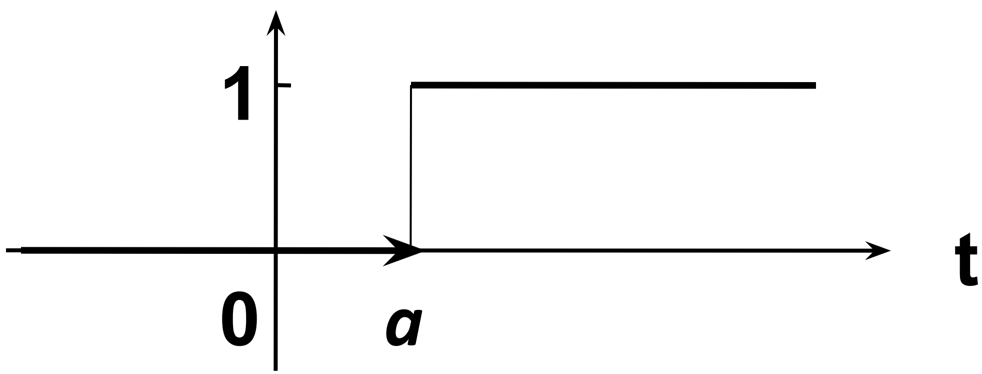
- Пример. Найти преобразование Лапласа функции ***e^at***
- Решение. $L(e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt =$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}$$

- При Re ***(a-s)*** $L(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$ ˌдится.

Преобразование Лапласа

- Функция Хевисайда от аргумента ***(x-a)*** **-** важная ступенчатая функция, найдем ее Лаплас-образ для ***a > 0***. График этой функции:



Преобразование Лапласа

- Найдем преобразование Лапласа для функции Хевисайда с параметром ***a*>0**

$$L\big(1(t-a)\big)=\int_0^{+\infty}e^{-st}1(t-a)dt=$$

$$=\int_0^{a}e^{-st}0dt+\int_a^{+\infty}e^{-st}1dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Bigg|_a^{+\infty}$$

- Если Re **s** > 0, то интеграл сходится и

$$L\big(1(t-a)\big)=\frac{e^{-as}}{s}$$

Преобразование Лапласа

- Существуют таблицы преобразований Лапласа
- f(t) F(s)
-

f(t)	F(s)
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$

Преобразование Лапласа

- Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: $L(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)) = a \cdot L(f(t)) + b \cdot L(g(t))$.
2. Свойство сдвига: если **Re (s–a) > 0** и **L(f) = F**, то

$$L(e^{at} f(t)) = F(s-a).$$

3. Преобразование производн
4. Преобразование интеграла: $L\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{s} L(f(t))$

Преобразование Лапласа

- Применяя свойство 3 найдем преобразование Лапласа для дельта-функции **δ(t - a)**. Эта функция является производной от функции Хевисайда **1(t - a)**, для кот

$$L\left(\mathbf{1}(t-a)\right)=\frac{e^{-as}}{s}$$

- Тогда

$$L\left(\delta(t-a)\right)=L\left(1'(t-a)\right)=$$

$$=s\frac{e^{-as}}{s}-1(0-a)=e^{-as}$$

Преобразование Лапласа

- Пример. Применение преобразования Лапласа к диф уравнению RC-цепи.
- **x(t) = C*R * y'(t) + y(t)**
- Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. По свойству линейности получаем:
- **L(x(t)) = CR L(y'(t)) + L(y(t))**
- По свойству преобразования производной:
- **L(x) = CR** усть **y(0) = k.**

$$L(y) = \frac{L(x) + CRk}{1 + CRs}$$

- Отсюда **L(** **k**
- о есть

Преобразование Лапласа

- Пример. Применение преобразования Лапласа к диф уравнению RC-цепи

$$L(y) = \frac{L(x) + CRk}{1 + CRs}$$

Если задана функция **x(t)**, то это выражение дает решение исходного дифференциального уравнения (но это Лаплас –образ решения!).

Преобразование Лапласа дифференциального уравнения привело к простому алгебраическому уравнению. Теперь дело за возвратом к исходной переменной **t**, то есть требуется обратное преобразование.

Преобразование Лапласа

- Пример. Применение преобразования Лапласа к диф уравнению колебания.
- $y''(t) + \omega^2 y(t) = r(t)$
- Дважды применяя свойство преобразования производной,
  получаем
- $s^2\ Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = R(s)$, где Y и R обознач… ующих функци…

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

- Решая полученное алгебраическое уравнение, получаем

3.3. Обратное преобразование Лапласа

- Преобразования Лапласа содержит интеграл с пределами интегрирования от 0 до +∞. Будем предполагать, что функция **f(t) = 0** для **t < 0**.

- Обратным преобразованием Лапласа функции **F(s)** называется интегральное преобразование

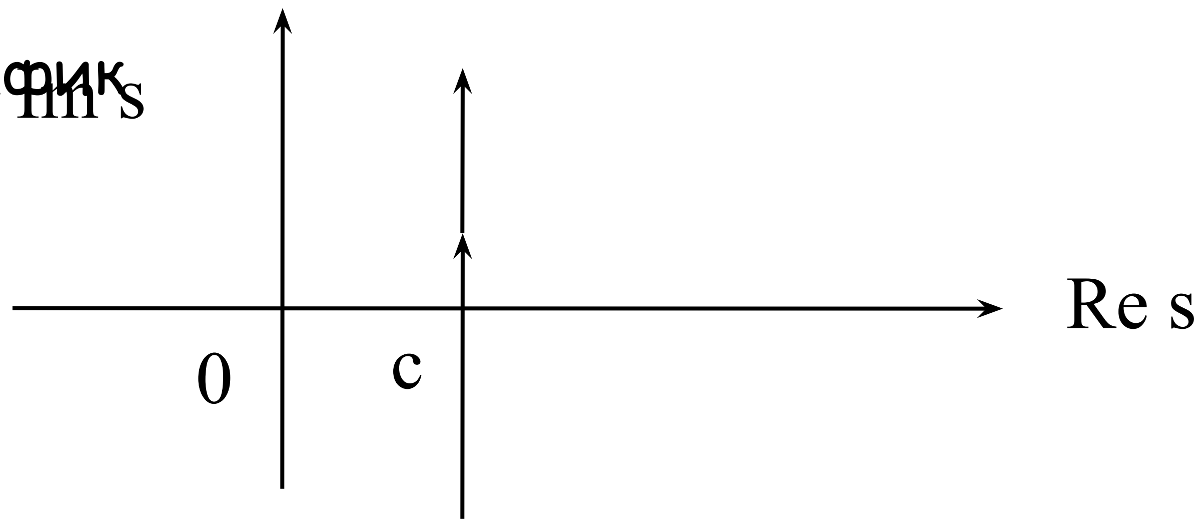
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) e^{st} ds$$

- где путь интегрирования идет вдоль прямой линии

  - **C: Re s = c, c = const**

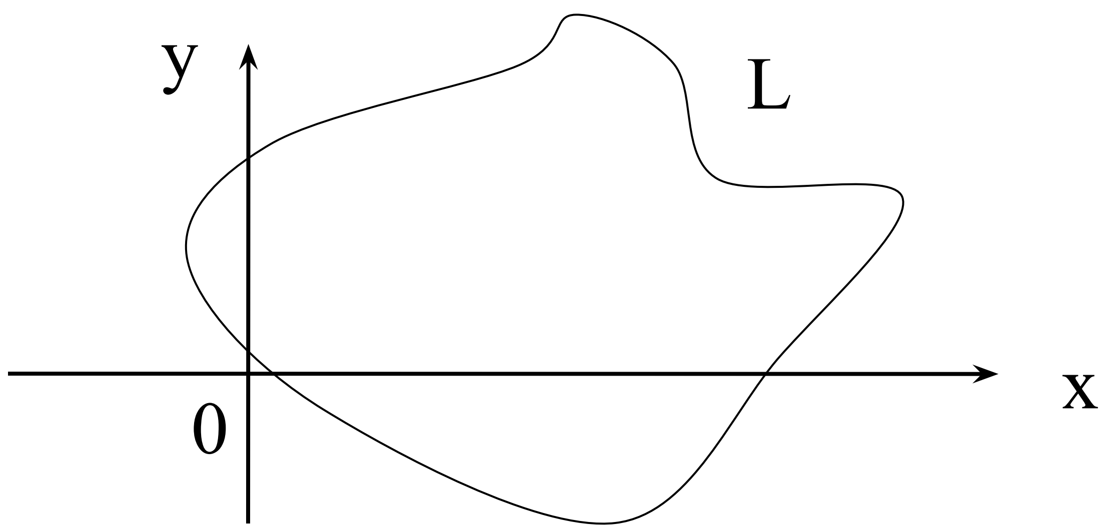
Обратное преобразование Лапласа

- Прямая линии
  - **C: Re s = c, c = const**
- имеет график



Обратное преобразование Лапласа

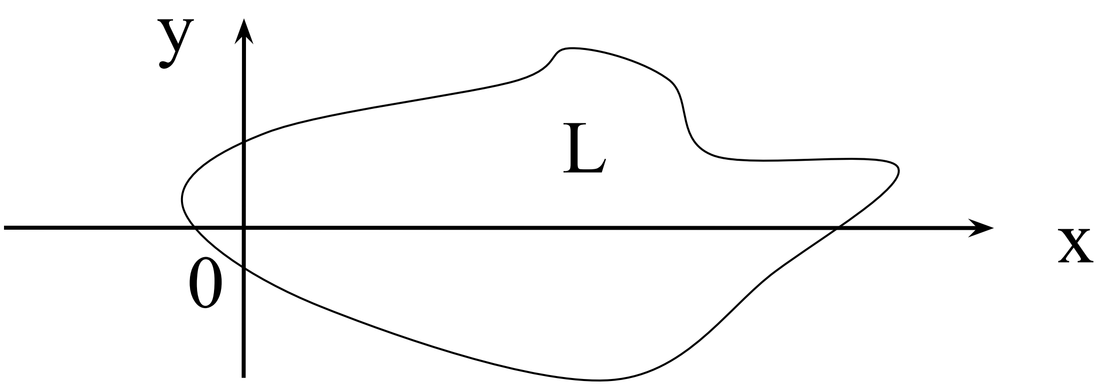
- *<u>Вспоминаем высшую математику</u>*
- Интегрирование ф $\oint_L f(x,y)\,dl$ двух переменных по контуру



Обратное преобразование Лапласа

- *<u>Вспоминаем высшую математику</u>*
- Если контур замкнут и функция **f(x,y)** от двух переменных имеет производные всех порядков по **x**, по **y** и смешанные производные, то

$$\oint_L f(x,y)\,dl \qquad = 0$$

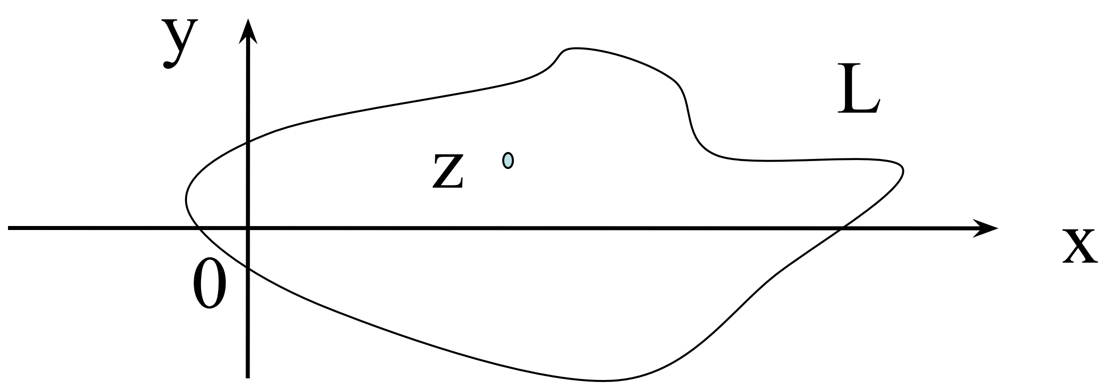


Обратное преобразование Лапласа

- *<u>Вспоминаем высшую математику</u>*

- Если при этом функция **f(x,y)** от двух переменных имеет производные во всех точках внутри контура, кроме точки **$z=(x_0, y_0)$** то

$$\oint_L f(x,y)\,dl \quad = 2\pi i \text{ Вычет}(f(z))$$

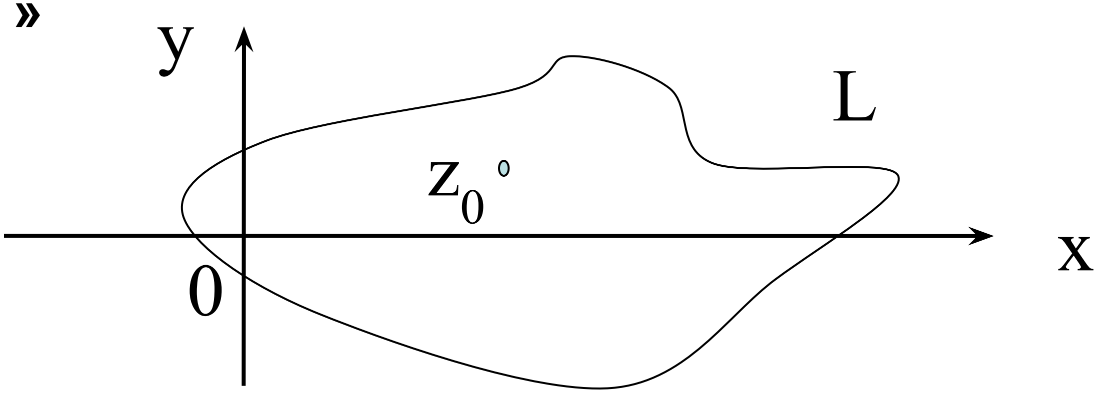


Обратное преобразование Лапласа

- <u>*Вспоминаем высшую математику*</u>

- Если $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-a}$, то вычет в точке $a=(x_0, y_0)$ равен $g(a)$.

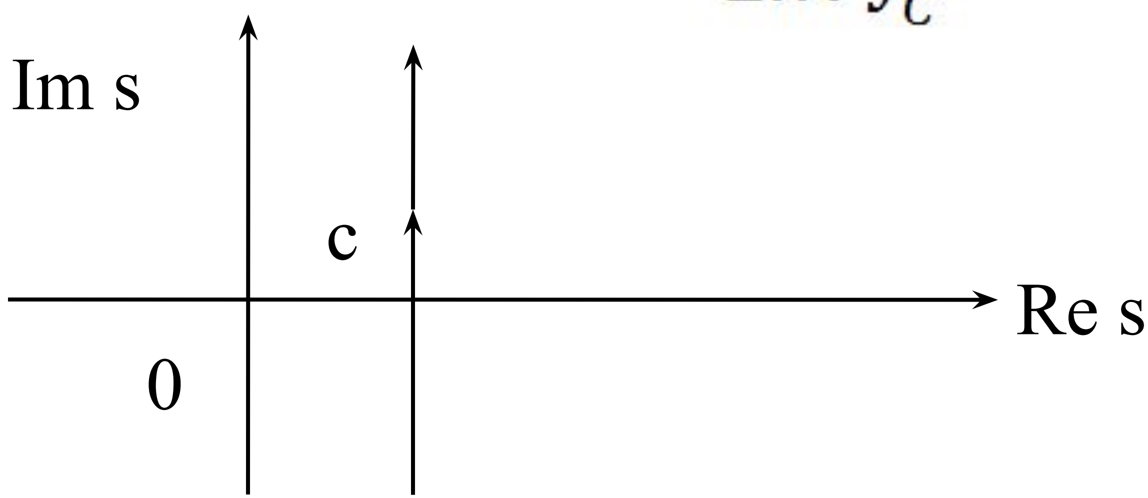
»



Обратное преобразование Лапласа

- Пример. Найти обратное преобразование Лапласа функции
$$F(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)}$$

- Требуется вычислить инте
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)e^{st}ds$$



Обратное преобразование Лапласа

- Пример. Найти обратное преобразование для **F(s)**
- Функцию **дробно-рационального вида интегрируют простыми правилами**.
- **F(s)** разлагается в сумму простых дробей:

$$F(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3}$$

- Коэффициенты $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ вычисляются решением линейных уравнений.

Обратное преобразование Лапласа

- Пример. Найти обратное преобразование для **F(s)**

$$F(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

- Т … ункции **F(s)**:

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}\right) = \left(4e^{-2t} + 3e^{3t}\right) \cdot 1(t)$$

- Существуют таблицы обратного преобразования Лапласа

Обратное преобразование Лапласа

- Преобразование Лапласа от свертки $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = F(s)G(s)$

Доказательство:

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(v+\tau)} f(\tau)g(v)\,d\tau dv, \quad Let \quad v = t-\tau$$

$$= \left[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau\right]\left[\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv\right]$$

$$= F(s)G(s)$$

Обратное преобразование Лапласа

- Обратное преобразование Лапласа от свертки.

- Аналогично прямому преобразованию свертки для обратного справедлива формула

- $L(F(s)G(s)) = f(t)*g(t)$