Определители. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Определители

Правила вычисления

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее **определителем**, следующим образом:

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

2. n = 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

#

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix}=$$

$$2\cdot 4(-12)+11(-1)(-3)+3\cdot 17\cdot 1-$$

$$-(11\cdot 4\cdot 1+3(-1)(-12)+2\cdot 17(-3))=5$$

Ответ:5

Определитель n-го порядка.

Записывается в виде квадратной таблицы, содержащей n^2 элементов вида a_{ik}, расположенных в n строках и n столбцах:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минор элемента a_{ik}

- Минором некоторого элемента a_{ik} определителя n-го порядка называется определитель n-1 –го, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент и обозначается M_{ik}.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{23}=4$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}=60+20+0-250-0-42=13$$

$M_{31}=5$ $M_{14}=11$

Алгебраическое дополнение A_{ik}

- Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} данного D называется M_{ik} , взятый со знаком «+», если (i+k)- четное число, и со знаком «-», если (i+k)- нечетное число.

Для предыдущего примера:

$A_{23}=-M_{23}=-13$
$A_{31}=M_{31}=5$
$A_{14}=-M_{14}=-11$

Формула Лапласа.

Теорема: Определитель равен сумме произведений элементов всякой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

Свойства определителей.

1. Транспонирование определителя , т.е. замена строк столбцами и наоборот, не меняет его значения.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Перестановка любых двух строк (столбцов) , меняет только знак D.

D’=-D

3. Общий множитель всех элементов одной строки (столбца) м.б. вынесен за знак D.

$$\begin{vmatrix} ma_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ma_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) равны или пропорциональны, то определитель равен 0.

5. Если элементы какой-либо строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, различающихся между собой только элементами одной строки (столбца), бывшими ранее отдельными слагаемыми.

6. Если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответственные элементы другой строки или одинаковые пропорциональные им числа ,то исходный определитель не изменится.

Формулы Крамера

Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными D≠0, то система совместна и имеет единственное решение, выражаемое по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

D_n – это определитель, который получается из определителя системы путем замены только n-го столбца столбцом свободных коэффициентов системы.