Элементы векторной алгебры

Вектор. Действия над векторами. Координаты вектора

Векторы. Основные понятия.

♦ Отрезок AB, у которого указаны его начальная точка A и конечная точка B, называется направленным отрезком.

Вектором называется любой параллельный перенос в пространстве.

Определенный так вектор может быть задан с помощью направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, где A – какая-либо точка пространства, а B – ее образ при данном параллельном переносе.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ изображают один и тот же вектор, если их длины равны, прямые (AB) и (CD) параллельны (в т.ч. совпадают), а направление от A к B одинаково с направлением от C к D.
Таким образом, направленных отрезков, изображающих один и тот же вектор, бесконечное множество.

Равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ определяют один и тот же вектор.

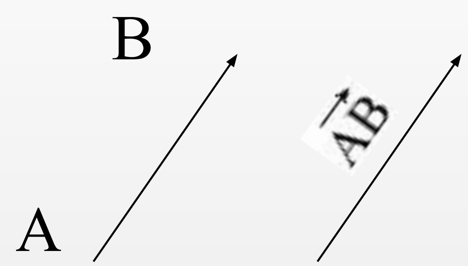
♦ Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначения: $|\overrightarrow{AB}|$

♦ Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым и обозначается $\overrightarrow{0}$.

♦ Вектор, длина которого равна единице, называется единичным (или ортом).

На чертежах вектор $\overrightarrow{AB}$ будем обозначать стрелкой с началом в точке A и концом в точке B:



♦ Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они могут быть изображены направленными отрезками параллельных прямых (в т.ч., одной и той же прямой).

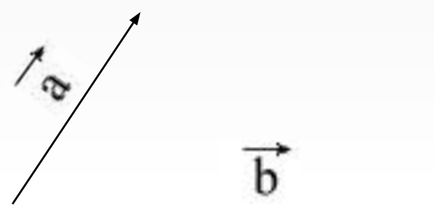
♦ Три ненулевых вектора называются компланарными, если они могут быть изображены направленными отрезками, принадлежащими параллельным плоскостям (в том числе, одной и той же).

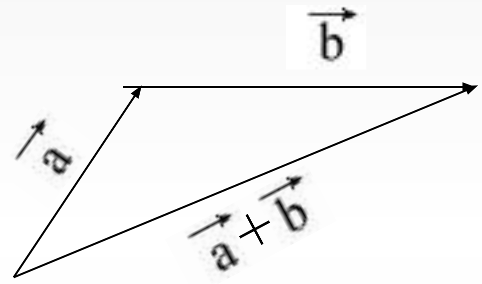
Линейные операции над векторами

Правило треугольника

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

называется вектор, начало которого лежит в начале вектора $\vec{a}$ и конец в конце вектора $\vec{b}$.





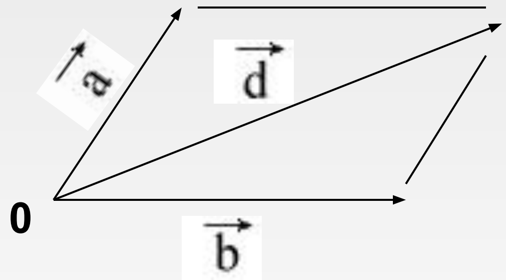
Правило параллелограмма

Если векторы отложены от общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$

и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$

есть вектор, совпадающий с вектором-диагональю этого параллелограмма, идущей из

общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

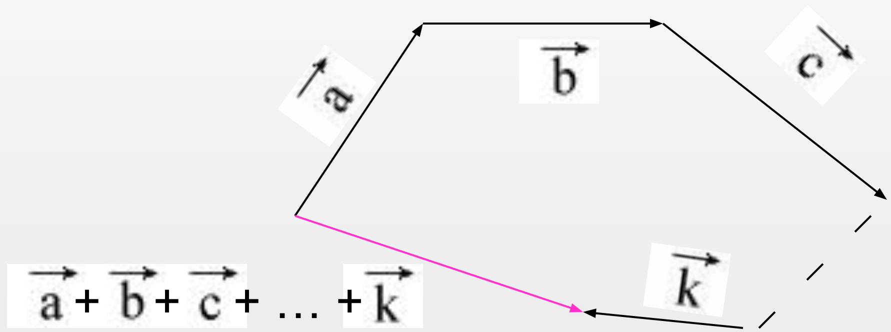


$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$

Отсюда следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

♦ Сложение многих векторов может производиться при помощи последовательного применения правила треугольника.

Другое правило: сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{k}$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, … строится так: от произвольной точки 0 откладывают вектор $\vec{a}$, затем от конца отложенного вектора а откладывают вектор $\vec{b}$, затем от конца отложенного вектора $\vec{b}$ откладывают вектор $\vec{c}$ и т.д. При этом началом вектора суммы $\vec{a} + \vec{b} + \ldots$ служит точка 0, а его концом – конец последнего отложенного вектора $\vec{k}$



♦ Преобразование, обратное по отношению к вектору $\vec{a}$, называется противоположным вектором (обозначается $-\vec{a}$). Противоположный вектор $-\vec{a}$ имеет ту же длину, что и вектор $\vec{a}$, но направлен в сторону, противоположную $\vec{a}$

♦ Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$

Легко видеть, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Т.е. построение разности равносильно прибавлению к одному вектору вектора, противоположного другому.

Свойства сложения векторов:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Умножение вектора на число.

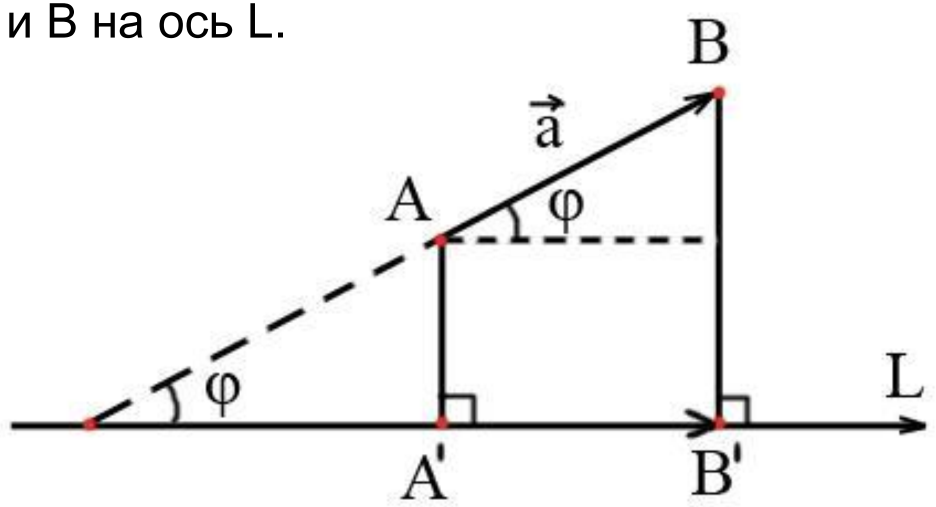
♦ Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ, называется вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную, если $\lambda < 0$ (отсюда: если $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$ то $\vec{b}$ и $\vec{a}$ - - коллинеарны)

Свойства умножения вектора на число:

1. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$
2. $\lambda \vec{a} + \mu \vec{a} = (\lambda + \mu)\vec{a}$
3. $\lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$
4. $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot 0 = 0$

Проекция вектора на ось.

Пусть даны ось L и вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Обозначим через A’ и B’ соответственно проекции точек A и B на ось L.

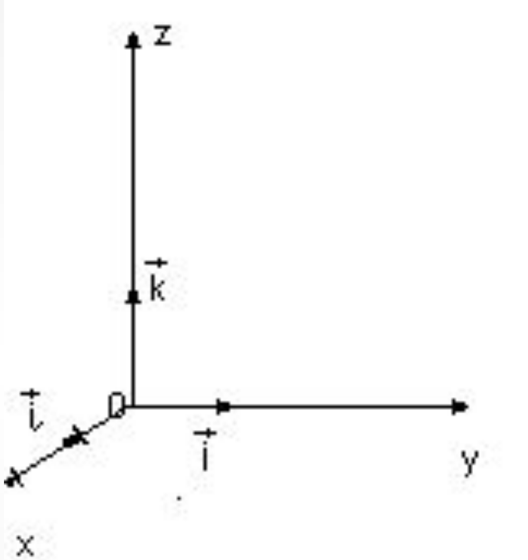


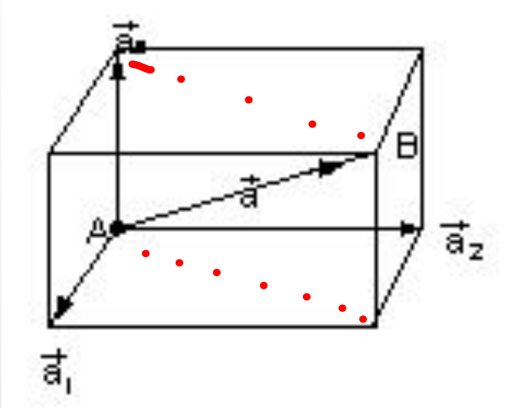
Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось L (обозначение: $Пр_L \overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{AB}$, взятое со знаком «+», если направления вектора $\overrightarrow{AB}$ и оси L совпадают, и со знаком «-» в противном случае.

Аналогично определяется проекция вектора на вектор.

Справедлива формула: $\boxed{Пр_L \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi}$, где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью L.

Введем единичные векторы (орты) i, j, k , направленные по осям координат. Они не равны, так как являются единичными векторами неколлинеарных векторов.





$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$\vec{a}_1 = a_x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_2 = a_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_3 = a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Это разложение единственно!

Пусть в пространстве Oxyz задан вектор $\vec{a}$

Проекция $a_x = пр_x \vec{a}$, $a_y = пр_y \vec{a}$, $a_z = пр_z \vec{a}$ вектора на оси координат называются координатами вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lfloor a_x, a_y, a_z \rfloor$$

Def: Длина (модуль) вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Def: Расстояние между двумя точками пространства равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Рассмотренные выше линейные операции над векторами можно теперь записать в следующем виде:

1) $$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x \cdot \vec{i} + \lambda a_y \cdot \vec{j} + \lambda a_z \cdot \vec{k}$$

λ - скаляр

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

2) $$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$$

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются).

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых векторов

3) Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны.

$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Bigg| = \lambda \quad \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ или } \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

Направляющие косинусы.

Если α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\vec{a}$

с осями координат, то cos α, cos β, cos γ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$

Вспоминая формулу для проекции вектора $\vec{a}$ на ось, получим:

$a_x = |\vec{a}| \cos\alpha$ $\qquad$ $a_y = |\vec{a}| \cos\beta$ $\qquad$ $a_z = |\vec{a}| \cos\gamma$

Подставив эти формулы в формулу для длины вектора $\vec{a}$, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$