# Скалярное и векторное произведения векторов.

# Скалярное произведение векторов.

Def: Под скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косину угла между ними, т.е

$$a \cdot в = (a, в) = |a||в| \cdot \cos(a, в)$$

Свойства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{в} = \vec{в} \cdot \vec{a}$

2) $(\vec{a} + \vec{в}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} \cdot \vec{в}\vec{c}$

3) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$$

4) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения, т.е

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{в}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{в}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{в}\right)$$

5) Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор, т. е

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{в},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{в},\vec{c}\right)$$

6) $\vec{a}\perp\vec{в}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{в}=0$

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю

# Скалярное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z$$

Скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат

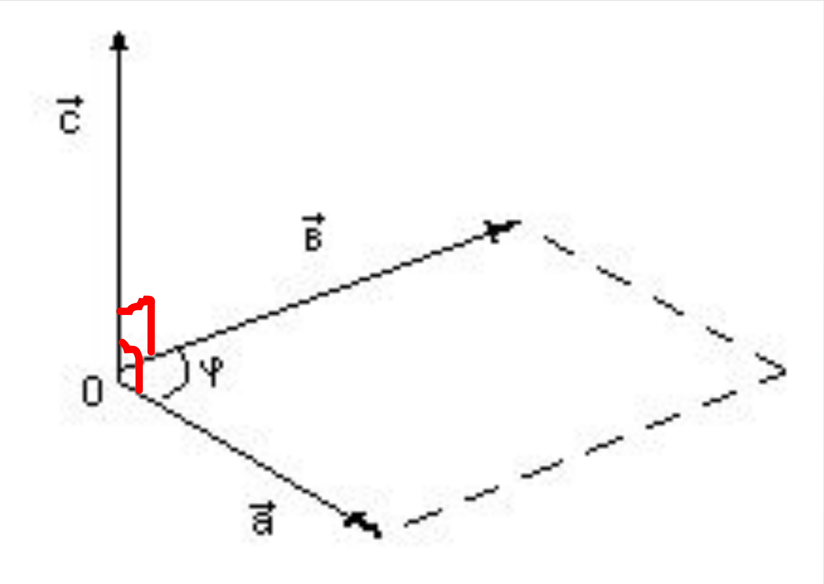
$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

# Векторное произведение векторов

Def: Под векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [a, b]$ , для которого:

1) Модуль равен площади параллелограмма, построенного на двух векторах, т.е $|c| = |a||в| \cdot \sin\varphi$

где $\varphi = (\vec{a}, \vec{в}), (0 \le \varphi \le \pi)$




2) Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{в}$

# Свойства векторного произведения

1) При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль, т.е $\vec{в} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{в})$

2) Векторный квадрат равен нуль-вектору, т.е $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е если $\lambda$-скаляр, то

$$(\lambda a \times в) = (a \times \lambda в) = \lambda(a \times в)$$

4) Для трех векторов $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ справедливо равенство

$$(a + в) \times c = (a \times c) + (в \times c)$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} \qquad \vec{в} \qquad \qquad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Для ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0},\ \vec{j} \times \vec{j} = 0,\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}$$

# Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ в_x & в_y & в_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ в_y & в_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ в_x & в_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ в_x & в_y\end{vmatrix}$$