Элементы линейной алгебры

Матрицы

Элементарные преобразования и действия над матрицами

made by aspirin

Определение: **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины)

Матрицу А называют матрицей размера m x n

Матрица А имеет m-строк и n- столбцов /колонн/; говорят, что она имеет размер. Всего в матрице размера m x n имеется mn элементов.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \alpha_{m1}\ \alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Классификация матриц

1. **Матрицы полагаются равными** при совпадении у них соответствующих элементов. Это записывается так: А=В.

2. **Матрица,** у которой число строк равно числу столбцов **называется квадратной**. Квадратную матрицу размера n x n называют матрицей n – го порядка.

3. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной.**

4. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной.** Обозначается буквой Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0....0 \\ 0 & 1....0 \\ .... & \\ 0 & 0....1 \end{pmatrix}$$

5. Квадратная матрица называется **треугольной,** если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

6. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой О.

7. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор – столбец, или вектор - строка).

8.Матрица A_T называется **транспонированной** к А, если в матрице А строки заменены на столбцы соответствующих номеров:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число отличное от нуля;

3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Две матрицы А и В называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается А В.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической.

Действия над матрицами

- **Суммой матриц** одинакового размера называется матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых. Обозначение: A+B. Аналогично определяется разность матриц.
- **При умножении матрицы на число**, умножаются все элементы данной матрицы.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

- Операция **умножения двух матриц** вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Такие матрицы называются **согласованными** (n × m и m × k)

$$A_{(n\times m)}\cdot B_{(m\times k)}=C_{(n\times k)}$$

- **Произведением** 2-х согласованных матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times k}$ называется матрица размера $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times k}$, элементы которой вычисляются по формуле:
- $C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots.+a_{ik}b_{kj}+\ldots..+a_{in}\cdot b_{nj}$
- Таким образом, элементом новой матрицы является , который равен сумме произведений элементов n строки первой матрицы на соответствующие элементы k столбца второй матрицы.
- Возможно умножение матрицы на вектор-столбец справа и на вектор-строку слева.

Свойства произведения матриц

1. $A \times O = O$
2. $A \times E = A$
3. $A \times B \neq B \times A$
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$
5. $ABC = (AB) \times C = A \times (BC)$
6. $A (B + C) = AB + AC$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2+2.1+1.8+4.1 \\ -4.2+0.1+5.8+6.1 \\ 1.2+7.1+2.8+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 38 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$(9, \quad 2, \quad 3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

=(9.3+2(-4)+3.1; 9.2+2.0+3.7; 91+2.5+3.2; 9.4+2.6+3.1) =

=(22, 39, 25, 51).

Определители. Ранг матрицы.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее определителем**, следующим образом:**

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

2. n = 2.

#

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 4(-12) + 11(-1)(-3) + 3 \cdot 17 \cdot 1 -$$

$$-(11 \cdot 4 \cdot 1 + 3(-1)(-12) + 2 \cdot 17(-3)) = 5$$

Ответ:5

Определитель n-го порядка.

Записывается в виде квадратной таблицы, содержащей n^2 *элементов вида* a_{ik}, *расположенных в n строках и* n *столбцах:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минор элемента a_{ik}

- Минором некоторого элемента a_{ik} определителя n-го порядка называется определитель n-1 –го, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент и обозначается M_{ik}.

\# $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{23}=4$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60+20+0-250-0-42=13$$

$M_{31}=5$ $M_{14}=11$

Алгебраическое дополнение A_{ik}

- Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} данного D называется M_{ik} , взятый со знаком «+», если (i+k)- четное число, и со знаком «-», если (i+k)- нечетное число.

Для предыдущего примера:

$A_{23}=-M_{23}=-13$
$A_{31}=M_{31}=5$
$A_{14}=-M_{14}=-11$

Формула Лапласа.

Теорема: Определитель равен сумме произведений элементов всякой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

Свойства определителей.

1. Транспонирование определителя , т.е. замена строк столбцами и наоборот, не меняет его значения.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Перестановка любых двух строк (столбцов) , меняет только знак D.

D’=-D

3. Общий множитель всех элементов одной строки (столбца) м.б. вынесен за знак D.

$$\begin{vmatrix} ma_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ma_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) равны или пропорциональны, то определитель равен 0.

5. Если элементы какой-либо строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, различающихся между собой только элементами одной строки (столбца), бывшими ранее отдельными слагаемыми.

6. Если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответственные элементы другой строки или одинаковые пропорциональные им числа ,то исходный определитель не изменится.

- **Рангом матрицы А** называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.
- Ранг матрицы А обозначается rangA или r(A).
- Из определения следует:
- 1. Ранг матрицы A_{mxn} не превосходит меньшего из ее размеров.
- 2. r(A)=0 тогда и только тогда , когда все элементы матрицы равны 0.
- 3. Для квадратной матрицы n-ого порядка r(A)=n, тогда и только , когда матрица А – невырожденная.

Пример.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

Все миноры 3-ого порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

. Значит, ранг данной матрицы равен двум (rang A=2)

Ответ: r(A)=2

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример: найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang A = 2

Решение систем линейных уравнений. Матричный метод. Формулы Крамера.

Невырожденные матрицы

- Квадратная матрица А называется **невырожденной**, если определитель не равен нулю. В противном случае матрица А называется **вырожденной**.
- Матрицей, союзной к матрице А, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Где A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik} данной матрицы А.

Матричный метод решения системы

Матричная запись системы

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.
$$

В матричном виде: $AX = B$, где

A - основная матрица системы;

X – матрица-столбец переменных;

B – матрица-столбец свободных членов.

Если A – невырожденная, т.е. $\Delta \neq 0$ и A имеет единственную A^{-1} , то

$A^{-1} AX = A^{-1}B$, т.е.

$X = A^{-1}B$ – решение системы уравнений

Алгоритм нахождения A^{-1}

- 1) $\det A \neq 0$
- 2) составить для A союзную матрицу A^*
- 3) умножить A^* на $1/\Delta \rightarrow A^{-1}$

Алгоритм решения систем линейных уравнений матричным методом

1. Составляем матрицы А, В и Х
2. Вычисляем определитель матрицы А
3. Находим обратную матрицу A^{-1}
4. Находим решение системы уравнений по формуле:

$$X=A^{-1}B$$

Пример

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

$$\det A=1\ ;$$

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-2)+2\cdot 6+(-3)\cdot 5\\ -4\cdot(-2)+3\cdot 6+(-5)\cdot 5\\ 5\cdot(-2)+(-4)\cdot 6+7\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Формулы Крамера

Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными D≠0, то система совместна и имеет единственное решение, выражаемое по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

D_n – это определитель, который получается из определителя системы путем замены только n-го столбца столбцом свободных коэффициентов системы.

Алгоритм решения систем линейных уравнений по формулам Крамера

- 1. Составляем матрицы A, B, X
- 2. Вычисляем определитель матрицы A.
- 3. Составляем определитель Δ_1 путем замены первого столбца в матрице A на вектор-столбец матрицы B
- 4.Вычисляем определитель Δ_1 и находим первую неизвестную по формуле:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

5. Составляем определитель Δ_2 путем замены второго столбца в матрице A на вектор-столбец матрицы B

6. Вычисляем определитель Δ_2 и находим вторую неизвестную по формуле:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

7. Составляем определитель Δ_3 путем замены третьего столбца в матрице А на вектор-столбец матрицы В

8. Вычисляем определитель Δ_3 и находим третью неизвестную по формуле:

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

- Одним из универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических уравнений систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.
- Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (треугольному) виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

- Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.
- Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. Предыдущей пример демонстрирует совместную определенную систему линейных уравнений.
- Если система неопределенная каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением.***
- Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Решить систему (несовместную) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 4x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$A' = \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right\|$$

Переставим местами первую и вторую строки

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right\|$$

Умножим элементы второй строки на (-2) и прибавим к соответственным элементам третьей строки.

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right\|$$

Третьей строке соответствует уравнение: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -4$
Равенство неверное решений нет.

Ответ: система несовместна.