

Элементы теории множеств

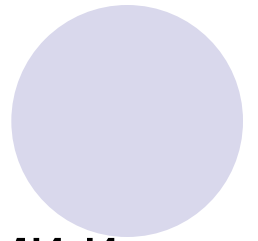
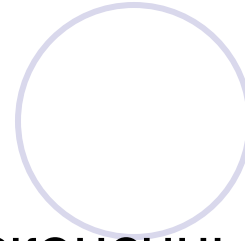
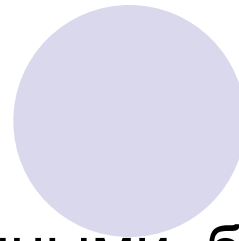
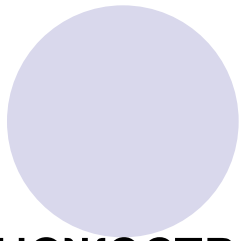




Понятие множества

Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет

- Обычно множества обозначают большими буквами: A, B, X, N, \dots , а их элементы – соответствующими маленькими буквами: a, b, x, n, \dots
- В частности, приняты следующие обозначения:
- \mathbb{N} – множество натуральных чисел;
- \mathbb{Z} – множество целых чисел;
- \mathbb{Q} – множество рациональных чисел;
- \mathbb{R} – множество действительных чисел (числовая прямая).
- \mathbb{C} – множество комплексных чисел. И верно следующее:
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Принадлежность элемента m множеству M обозначается так: $m \in M$



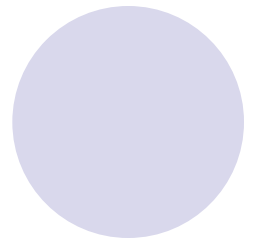
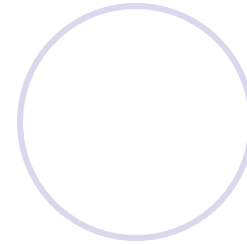
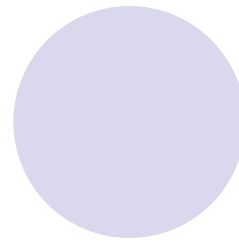
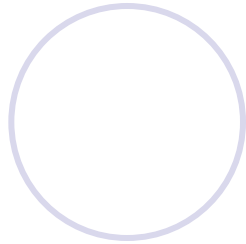
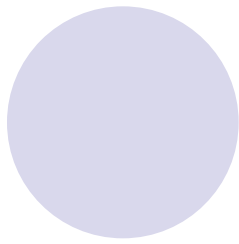
- Множества могут быть конечными, бесконечными и пустыми.
- Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**.
- Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым** и обозначается \emptyset .

Например:

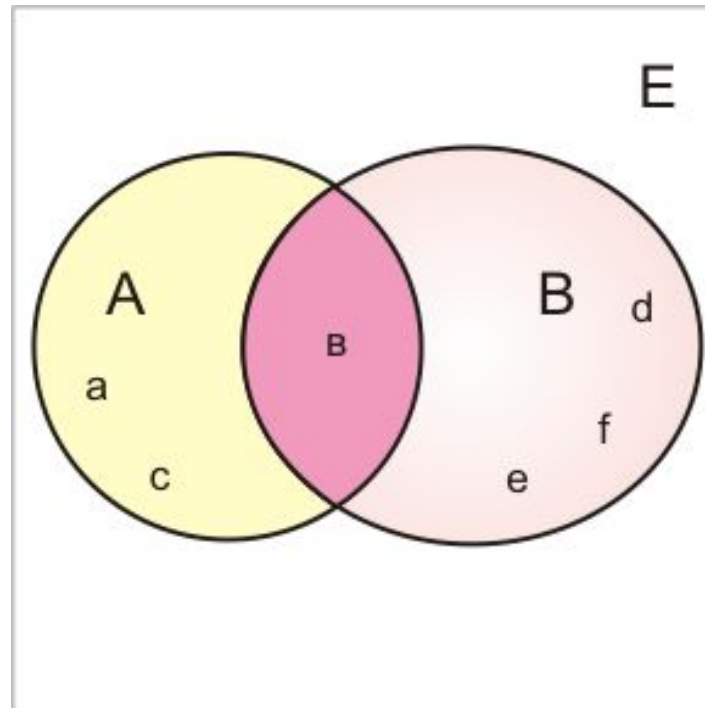
- множество студентов 1 курса - конечное множество;
- множество звезд во Вселенной - бесконечное множество;
- множество студентов вашего курса, хорошо знающих три иностранных языка (японский, китайский и французский), видимо, пустое множество.

Способы задания множеств

- Существуют три способа задания множеств:
- **1) описание множества**
- Примеры: $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 10\}$ – множество значений y из отрезка $[1; 10]$
- $X = \{x \mid x > 2\}$ – множество всех чисел x , больших 2.
- **2) перечисление множества**
- Примеры:
- $A = \{a, б, в\}$ – три начальные буквы русского алфавита
- $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – натуральные числа
- **3) графическое** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера-Венна



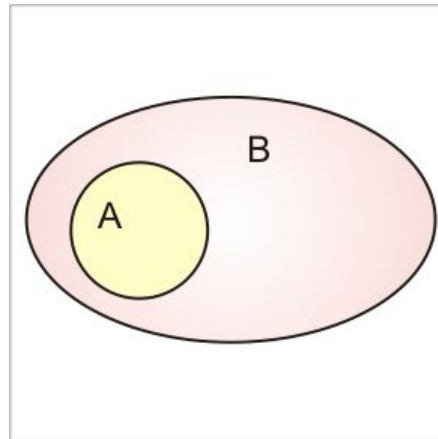
- Заданы два множества: $A = \{a, b, c\}$.
 $B = \{b, d, e, f\}$.
Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно.





- Множество **A** называют подмножеством множества **B** (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент множества **A** является элементом множества **B**:

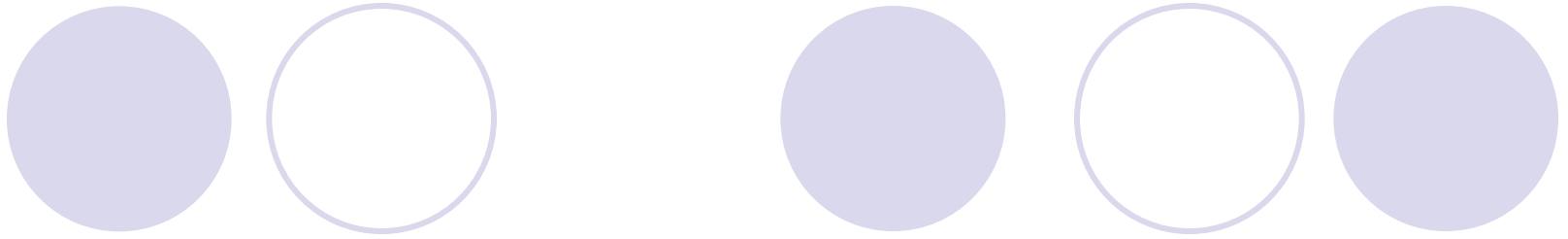
$$A \subseteq B \leftrightarrow a \in A \rightarrow a \in B$$



При этом говорят, что **B** содержит **A**, или **B** покрывает **A**

Невключение множества **C** в множество **B**,
обозначается так: $C \not\subseteq B$

- Множества A и B **равны** ($A=B$) тогда и только тогда, когда, **$A \subseteq B$ и $B \subseteq A$** , т. е. элементы множеств A и B совпадают.
- **Пример:** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,2,1\}$, $C=\{1,2,3,3\}$ - равны. Множество C – это множество A , только в нем элемент 3 записан дважды.
- **Пример:** $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ - **НЕ РАВНЫ**
- Семейством множеств называется множество, элементы которого сами являются множествами.
- Пример: $A=\{\{\emptyset\},\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ - семейство, состоящее из трех множеств.
- Каждое непустое множество $A \neq \emptyset$ имеет по крайней мере два различных подмножества: само множество A и \emptyset .



- Множество A называется собственным подмножеством множества B , если $A \subseteq B$, а $B \not\subseteq A$. Обозначается так: $A \subset B$.
- Например, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, c, d\}$, $A \subset B$

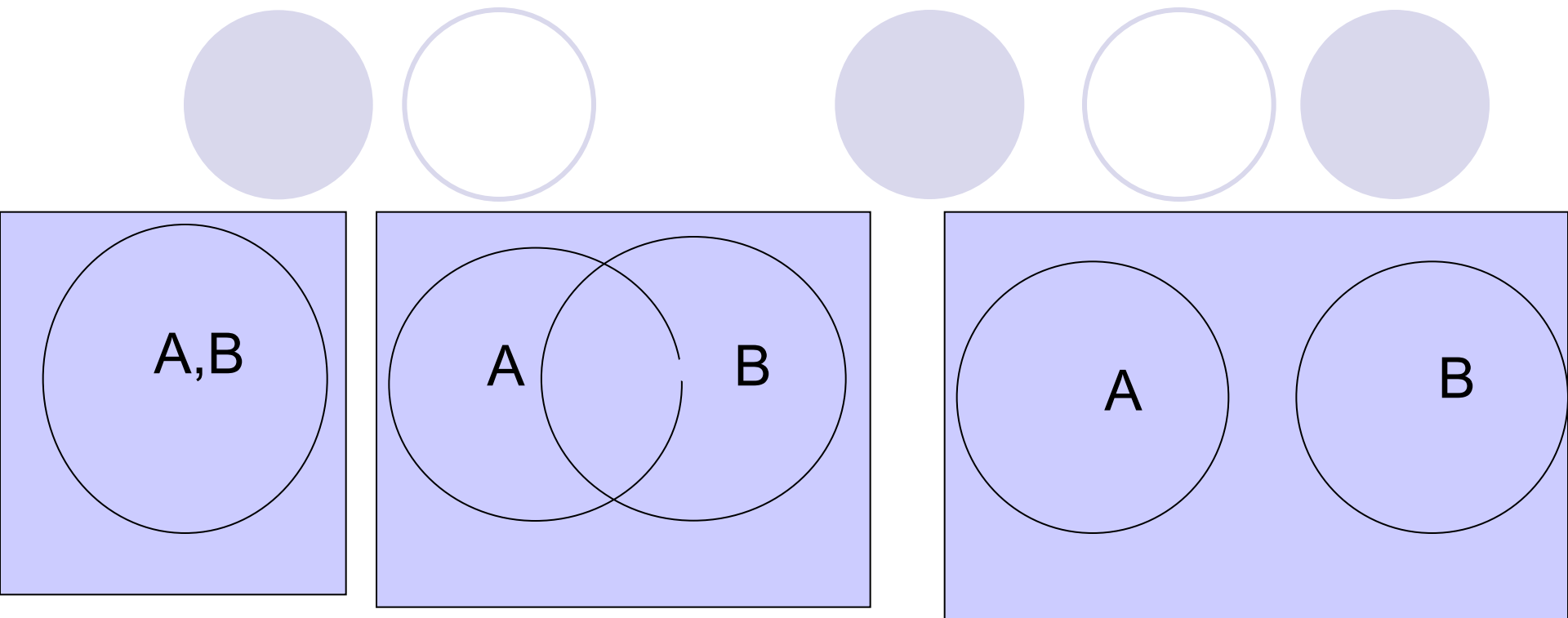
Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Мощностью конечного множества M называется число его элементов. Обозначается $|M|$

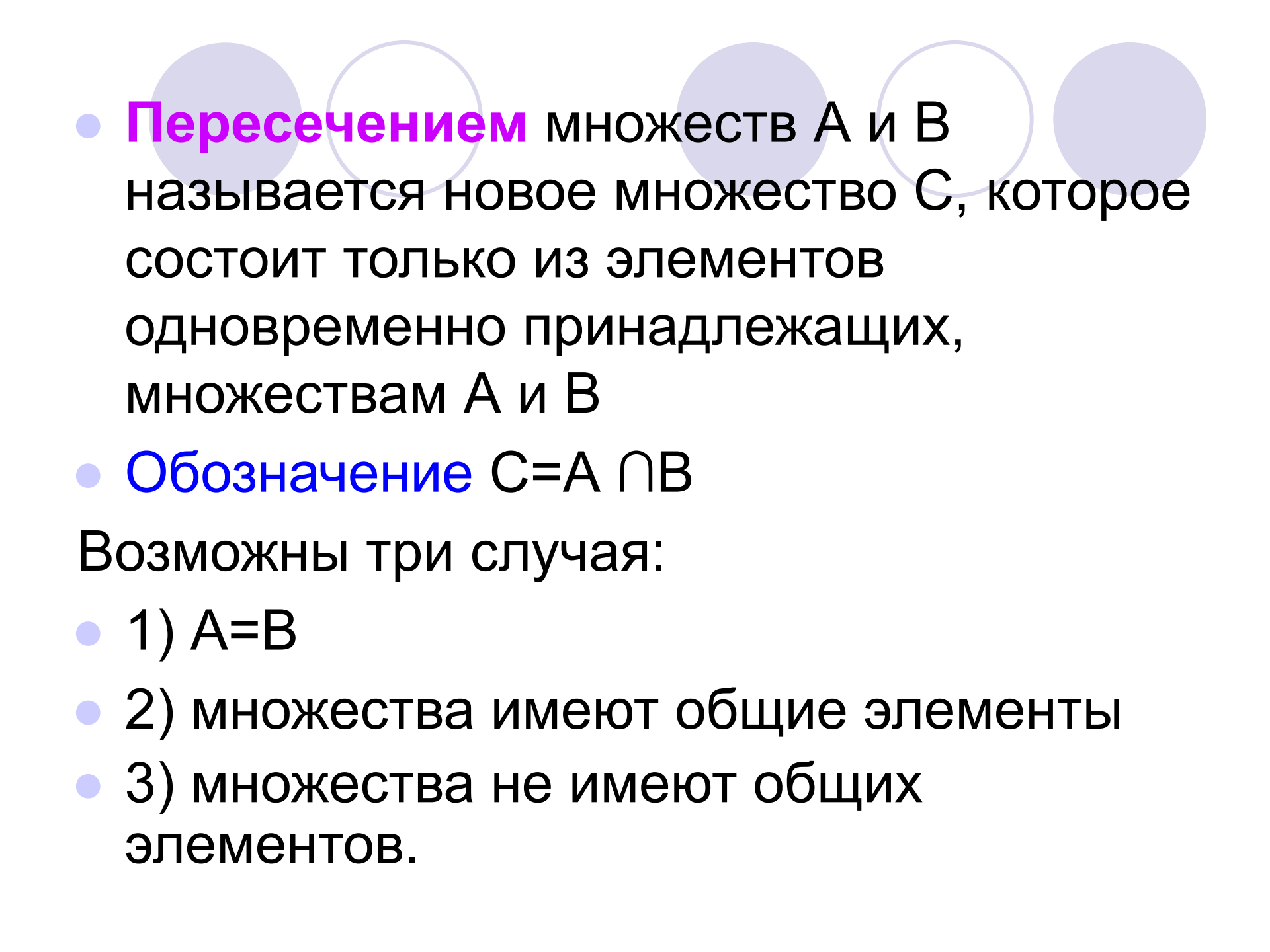
Например, $|B| = 6$. $|A| = 3$.

Операции над множествами

- **Объединением** (суммой) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество C тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B . Возможны три случая:
 - 1) $A=B$;
 - 2) множества имеют общие элементы;
 - 3) множества не имеют общих элементов.
- Примеры:
 - 1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3\}$.
 - 2) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
 - 3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$




- Рассмотренные случаи наглядно проиллюстрированы на рисунке

- 
- **Пересечением** множеств A и B называется новое множество C , которое состоит только из элементов одновременно принадлежащих, множествам A и B
 - **Обозначение** $C = A \cap B$

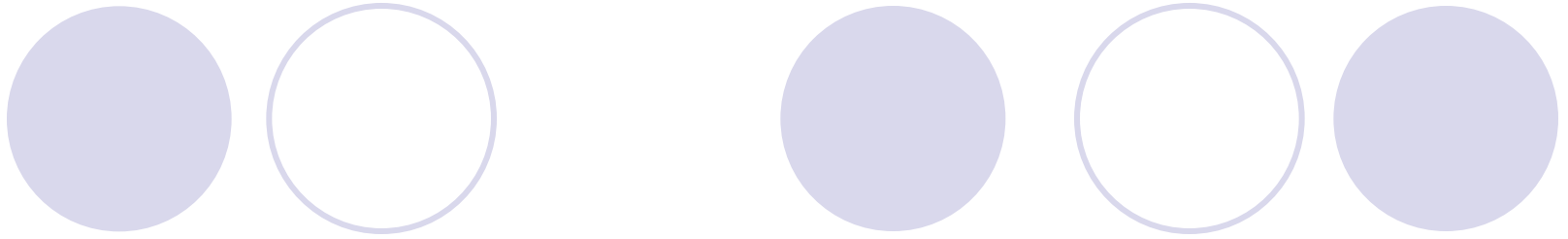
Возможны три случая:

- 1) $A = B$
- 2) множества имеют общие элементы
- 3) множества не имеют общих элементов.

- 
- Примеры:
 - 1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$, тогда $A\cap B=\{1,2,3\}$.
 - 2) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, тогда $A\cap B=\{2,3\}$
 - 3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,6,8\}$, тогда $A\cap B=\emptyset$



- **Разностью** множеств A и B называется множество C , состоящее из элементов принадлежащих только множеству A и не принадлежащих B .
- Обозначение: $C=A \setminus B$



- Даны два множества:
- $A = \{1, 2, 3, b, c, d\}, B = \{2, b, d, 3\}$.
- Тогда:
- $A \cup B = \{1, 2, 3, b, c, d\}$
- B подмножество A
- $A \setminus B = \{1, c\}$
- $A \cap B = \{2, 3, b, d\}$



● **Свойства:**

- 1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$
- 2. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
- 3. Сочетательный закон $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 4. То же и для пересечения.
- 5. Распределительный относительно пересечения
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 6. Распределительный относительно объединения
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 7. Закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$
- 8. Закон поглощения $A \cap (A \cup B) = A$
- 9. $A \cup A = A$
- 10. $A \cap A = A$



- **Декартово (прямое) произведение A и B** - это новое множество C, состоящее из упорядоченных пар, в которых первый элемент пары берется из множества A, а второй из B.
- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{4, 5\}$
- $C = A \times B = \{(1, 4); (1, 5); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (3, 5)\}$
- Мощность декартова произведения равна произведению мощностей множеств A и B:
 - $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- $A \times B \neq B \times A$, кроме если $A=B$ (в этом случае равенство выполняется)
- Дано:
- Координатная числовая ось $X. x \in (-\infty, +\infty)$.
Координатная числовая ось $Y. y \in (-\infty, +\infty)$.
- $D = X \times Y$
- Декартово произведение двух осей - точка на плоскости.

- Рассмотрим декартово произведение, которое обладает свойством коммутативности. $A = \{\text{Иванов, Петров}\}$
- $B = \{\text{высокий, худой, сильный}\}$
- $A \times B = \{\text{Иванов высокий, Иванов худой, Иванов сильный, Петров высокий, Петров худой, Петров сильный}\}$