Множество комплексных чисел.

Комплексным числом называется выражение вида a + bi, в котором a и b – действительные числа, а i – некоторый символ такой, что

$$i^2 = -1$$

Действительное число a называется действительной частью z=a+bi (Re z), а число b-мнимой частью (Im z)

Комплексное число z=a+bi изображают точкой плоскости с координатами (a;b)

Точка M(a;b), соответствующая комплексному числу z=a+bi, называется ***аффиксом*** данного числа z.

Два комплексных числа (a; b) и (c; d) называются ***равными***, если a = c и b = d.

Комплексное число a-bi называется комплексно сопряженным с числом a+bi и обозначается через

$\bar{z}$ $\qquad \bar{z} = \overline{a+bi}$ = a-bi

Комплексные числа вида a+bi и –a-bi называются противоположными.

Арифметические операции над комплексными числами

Суммой комплексных чисел $z = (a; b)$ и

$w = (c; d)$ называется комплексное число

$(a+c; b+d)$.

Разностью комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют такое число u, которое в сумме с числом w даёт число z

u

$z = w + u$.

u

Справедливо следующее правило:

(a; b) – (c; d) = (a – c; b – d).

Произведением комплексных чисел *z = (a; b)* и *w = (c; d)* называют комплексное число (ac – bd; ad + bc)

Частным от деления *z* на *w* называют число u, равное:

$$\boxed{u} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$$

Пример 1

Пример 1

Вычислить: $$(1+2i)i-\frac{3+2i}{1-i}$$

$$1)\,(1+2i)i=i+2i^2=-2+i$$

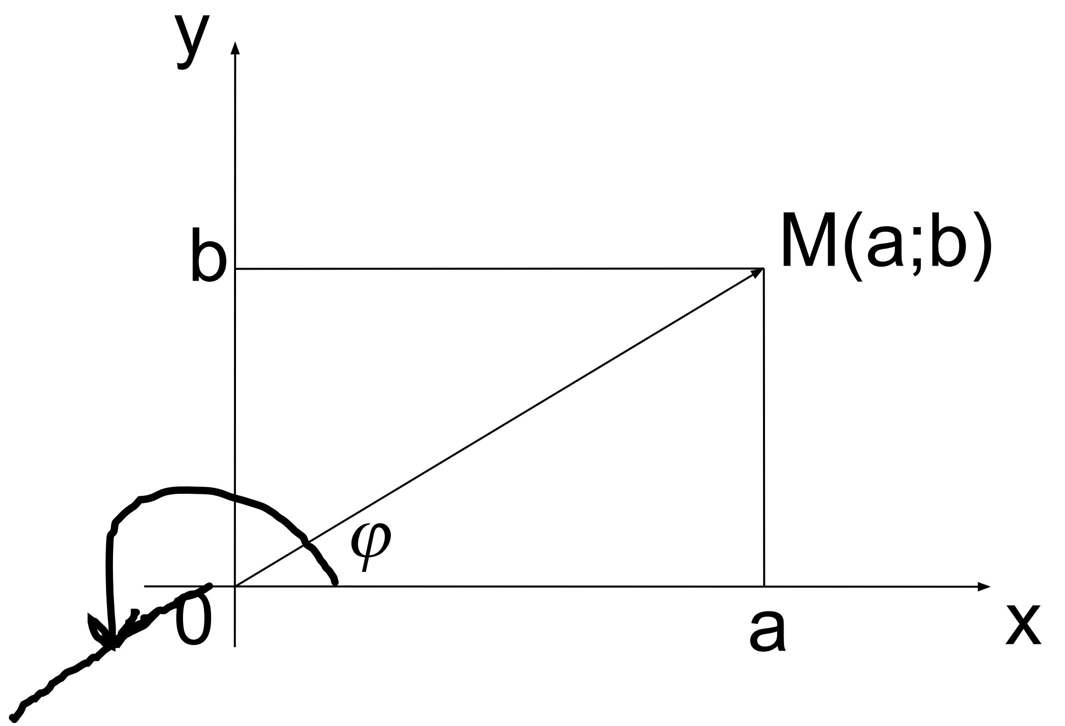
$$2)\,\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3+5i-2}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$3)\,(-2+i)-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

Геометрический смысл комплексного числа

Каждой точке М плоскости с координатами (a,b) соответствует один и только один вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$

с началом в точке z = 0 и концом в точке z=a+bi



Если комплексное число Z= a+bi трактовать как точку M (a,b) плоскости xOy, то модуль Z равен расстоянию точки M (a,b) от начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если на плоскости ввести полярные координаты (r,φ), где φ ***аргумент*** *числа z (φ=argz) - угол между действительной осью OX и вектором OM, то* $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

В силу этого комплексное число Z можно записать в форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где r – модуль числа Z, φ – угол (в рад.), который составляет вектор OM с положительным направлением оси ox

Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрической формой комплексного числа называют его запись в виде:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль, а

φ – аргумент числа z, связанный с a и b формулами:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Угол φ из промежутка $[-\pi;\pi]$ называется главным аргументом. Все остальные значения угла φ могут быть получены прибавлением к главному аргументу значений 2π n, где n – любое целое число.

Пример2.

Записать в тригонометрической форме: $-2\sqrt{3}+2i$

Сначала находим модуль числа: $r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

Далее, согласно формулам (*),

имеем: $\cos\varphi=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\sin\varphi=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Учитывая, что угол $\varphi\in[-\pi;\pi]$ $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$

Итак, $z=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2)$$

Пример3. Выполнить действия:

$$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)*\frac{1}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

Используя формулу (1), находим:

$$=\frac{4}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{2}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{2}{5}i$$

При возведении комплексного числа **$z = r\,(Cos\varphi + iSin\varphi)$** в натуральную степень n модуль данного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени:

формула Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(4)$$

Пример4. Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$

Корнями данного уравнения являются все значения $\sqrt{-4}$

Для числа - 4 имеем $r = 4$, $\varphi = \pi$

Согласно формуле(3),

находим: $\sqrt{-4} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\kappa}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\kappa}{2}\right)$

Если к = 0, то $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

Если к = 1, то $\omega_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

Корень n-й степени из комплексного числа *z* = r (Cosφ + iSinφ) *имеет n различных значений, которые находятся по формуле :*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right) (3)$$

Здесь к = 0, 1, 2, … *n-1*