Приложения производной

Функции нескольких переменных

План

1. Правило Лопиталя
2. Дифференциал функции
3. Приближенные вычисления
4. Функция двух переменных:

   а) частные производные;

   б) дифференцирование сложной функции;

   в) экстремум функции двух независимых переменных

Правило Лопиталя

- *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует (в указанном смысле).*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ +\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Примеры:

1 . $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x\to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

2 . $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Дифференциал функции

y=f(x), $x_0 \in (a,b)$ по определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При малых $|\Delta x|$ это отношение сколь угодно мало отличается от производной ф-и в т x_0, т.е. можно принять, что $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$ или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (1)$$

левая часть (1) есть приращение ф-и $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ (*)

Это приближённое значение приращения ф-и
Называется дифференциалом функции и обозначается dy.

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Определение дифференциала функции

Если y=x , то

dy=dx=1$\cdot \Delta x$

Def: *Дифференциалом функции называется произведение производной функции на дифференциал независимой переменной.*

Def: Дифференциалом второго порядка функции *f(x)* называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции

$$d^2 f(x) = d(df(x))$$

Дифференциалы высших порядков от независимой переменной равны 0.

Приближенные вычисления

Дифференциал применяется в приближённых вычислениях. Рабочая формула следует из соотношения (1) $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$

Примеры:

1. $\sqrt[3]{65}=\sqrt[3]{64+1}\approx\sqrt[3]{64}+\dfrac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}\cdot 1=4+\dfrac{1}{48}\approx 4{,}02$

f(x)= $\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$ $\quad x_0=64 \quad \Delta x=1$

2. $\lg 0{,}9=\lg\left(1-0{,}1\right)\approx\lg 1+\dfrac{1}{\ln 10}\cdot\left(-0{,}1\right)=-\dfrac{1}{10\cdot\ln 10}$

$f\left(x\right)=\lg x,\quad f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x\cdot\ln 10},\quad x_0=1,\ \Delta x=-0{,}1$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Всякая функция от нескольких переменных становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать, т. е. придать им постоянные значения.

Определение 1. Если каждой паре действительных чисел (x;y) из области D ставится в соответствие по определенному правилу только одно число z из области E, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных z = z (x, y). Здесь D – область определения функции, E – множество ее значений, x, y – независимые переменные.

Значение z (a; b) функции z (x, y) есть значение этой функции, вычисленное при x = a, y = b.

<u>Пример 1.</u> Дана функция $z = \dfrac{y^2 \cos x - x^3}{2y + \ln(x+1)}$. Найти значение функции в т. M (0; 1). $z(0;1) = \dfrac{1^2 \cdot \cos 0 - 0^3}{2 \cdot 1 + \ln(0+1)} = \dfrac{1 \cdot 1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

Частные производные

Определение 2. *Частной производной функции z = z (x, y) по аргументу x называется производная этой функции по x при постоянном y.*

Обозначения: z’x, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично *частной производной функции*
z = z (x, y) по аргументу y называется производная этой функции по y при постоянном x.

Обозначения: z’y, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Из определения следует, что на момент дифференцирования функция z является функцией одной переменной и, следовательно, при нахождении частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования функций одной переменной.

При дифференцировании полезна следующая таблица:

$x'_x = 1$, $x'_y = 0$

$y'_y = 1$, $y'_x = 0$

$C'_x = 0$, $C'_y = 0$, C = const.

Частные дифференциалы

Пусть функция z=f(x,y) имеет частные

производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда *произведение каждой частной производной на дифференциал соответствующей независимой переменной называется частным дифференциалом данной функции, взятым по этой переменной.*

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$$ частный дифференциал по x

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$ частный дифференциал по y

Полный дифференциал

Def: Пусть функция двух переменных имеет в окрестности некоторой точки непрерывные частные производные по каждой переменной. Тогда полный дифференциал этой функции равен сумме всех её частных дифференциалов и обозначается так:
dz   для функции z=f(x,y)

Пример: $z = x^2 + 3 \cdot x \cdot y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot x + 3 \cdot y\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cdot x$$

$$dz = \left(2x + 3y\right) \cdot dx + 3x \cdot dy$$

Частные производные второго порядка

Def: **Частными производными второго порядка функции z = z (x, y) называются производные от частных производных первого порядка т.е.** $z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Порядок дифференцирования указан в индексе при прочтении слева направо.

Последние две производные, отличаются только порядком дифференцирования, называются смешанными и в случае их непрерывности равны.

Дифференцирование сложной функции

Пусть $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, u и v – независимые переменные, т.е. $z = z(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v)$ – сложная функция. Тогда ее частные производные z'_u и z'_v могут быть найдены по формулам:

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u \quad (1)$$

$$z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v \quad (2).$$

Задача:

Дана функция z = y^x, где $x = \ln(u - 2v),\ y = e^{-\frac{v}{u}}$.
Найти z′u и z′v

$$z'_x = (y^x)'_x = y^x \ln y$$

$$z'_y = (y^x)'_y = xy^{x-1}$$

$$y'_u = (e^{-\frac{v}{u}})'_u = e^{-\frac{v}{u^2}} \cdot \frac{v}{u^2}$$

$$y'_v = (e^{-\frac{v}{u}})'_v = -e^{-\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{u}$$

$$x'_u = (\ln(u - 2v))'_u = \frac{1}{u - 2v}$$

$$x'_v = (\ln(u - 2v)'_v = -\frac{2}{u - 2v}$$

$$z'_u = y^x \ln y \cdot \frac{1}{u - 2v} + xy^{x-1} \cdot e^{-\frac{v}{u}} \cdot \frac{v}{u^2}$$

$$z'_v = -2y^x \ln y \cdot \frac{1}{u - 2v} - xy^{x-1} \cdot e^{-\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{u}$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Def: Пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0\right)$. Говорят,что функция имеет в этой точке строгий максимум (минимум) , если $f\left(x, y\right) < f\left(x_0, y_0\right)\left(f\left(x, y\right) > f\left(x_0, y_0\right)\right)$ для всех точек (x,y), достаточно Близких к $\left(x_0, y_0\right)$.

Достаточное условие существования экстремума

Th: Пусть функция z=f(x,y) непрерывна в D(f) вместе со своими частными производными первого и второго порядков и т. P (x_0, y_0) является критической. Найдём в точке P производные второго порядка и примем следующие обозначения:

$$A = \left(z''_{xx}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \qquad B = \left(z''_{xy}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \qquad C = \left(z''_{yy}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функция имеет в т. P экстремум:

---- максимум при A<0 и

---- минимум при A>0

Если Δ<0, то в т. P нет экстремума

Если Δ=0, то заключение об экстремуме сделать нельзя. В этом случае требуются дополнительные исследования.