СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ. ГРАДИЕНТ.

Скалярное поле и его геометрическое изображение.

Опр-е: Скалярным полем называется часть пространства (или все пр-во), каждой точке P которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины U.

Пр-ры: неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, поле распределения температуры в данном теле; поле распределения электрического потенциала и т.д.

Скалярная величина U не зависит от времени, а зависит от положения точки P в пространстве. Величина U рассматривается как функция точки P: u=F(P). Эта функция называется **функцией поля.**

$$U=F(P)=F(x,y,z)$$

Всякая функция трех переменных U=(x,y,z) задает некоторое скалярное поле.

Скалярные поля изображаются геометрически с помощью поверхностей уровня.

Опре-е: Поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) скалярного поля называется геометрическое место точек пространства, в которых функция поля $U=F(x,y,z)$ имеет одно и то же значение C.

Ур-е поверхности уровня имеет вид:

$$F(x,y,z)=C$$

Пр-р: 1) $U=x^2+y^2+z^2$

поверхности уровня сферы : $x^2+y^2+z^2=C$.

2) если скалярным полем является поле распределения температуры в некоторой части пространства, то поверхностями уровня этого поля будут так называемые изотермические поверхности, т.е. поверхности, на каждой из которых температура постоянна.

Производная по направлению.

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля U=F(x,y,z). Рассмотрим точку P(x,y,z) этого поля и луч l, выходящий из точки P в направлении единичного вектора.

$$\vec{e_l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

где α, β, γ - углы вектора $\vec{e}$ с осями координат.

Опр-е: Производной функции U=F(x,y,z) по направлению l

называется предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta l}$.

Обозначение: $\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изменения функции U в этом направлении.

Формула для: $\dfrac{\partial u}{\partial l}$

(*) $$\frac{\partial u}{\partial l}=F'_x(x,y,z)\cdot\cos\alpha+F'_y(x,y,z)\cdot\cos\beta+F'_z(x,y,z)\cdot\cos\gamma$$

Следствие: если вектор $\vec{e}$ совпадает с одним из векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то производная U по направлению l совпадает с соответствующей частной производной этой функции.

Пр-р: Найти производную функции $u=x^2-2xz+y^2$ в точке $P_1(1;2;-1)$ по направлению, идущему от точки P_1 к точке P_2 (2;4;-3).

Решение:

$$\overline{P_1P_2}=(2-1)\vec{i}+(4-2)\vec{j}+(-3+1)\vec{k}=i+2\vec{j}-2\vec{k}$$

соответствующий ему единичный вектор

$$\vec{e}=\frac{\overline{P_1P_2}}{\left|\overline{P_1P_2}\right|}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}; \cos\beta \frac{2}{3}; \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

Найдем частные производные функции:

$u=x^2-2xz+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2z; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = -2x$$

Их значения в точке P_1 (1;2;-1);

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left|p_1\right| = 2 + 2 = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left|p_1\right| = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left|p_1\right| = -2$$

Подставляем в формулу (*) найденные значения, получим искомую производную: $\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2)(-\frac{2}{3}) = \frac{16}{3}$

Градиент.

При изучении скалярных полей наряду с функцией поля U=F(x,y,z) рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией – **градиент скалярного поля.**

Опр-е: Градиентом в точке P(x,y,z) скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией U=F(x,y,z), называется вектор, равный:

$$gradF(P) = F'_x(x,y,z)\vec{i} + F'_y(x,y,z)\vec{j} + F'_z(x,y,z)\vec{k}$$

Связь между градиентом функции U=F(x,y,z) в данной точке и производной по направлению в этой же точке.

Теорема: Проекция вектора grad u на единичный вектор $\vec{e} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ равна производной ф-ии U по направлению l

$$np_l gradu = \frac{\partial u}{\partial l}$$

! Проекция grad u на вектор $\vec{e}$ равна скорости изменения поля U=F(x,y,z) в направлении вектора $\vec{e}$.

Пусть φ угол между $\vec{e}$ и gradu.

Тогда $$np_l gradu = |gradu| \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |gradu| \cdot \cos\varphi$$

если $\varphi = 0$, то $\frac{du}{\partial l}$ имеет наибольшее значение ,

равное $|gradu|$.

Вывод: gradu есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.