Интегральное исчисление функций одной переменной.

План лекции.

- Первообразная
- Неопределенный интеграл
- Основные свойства неопределенного интеграла
- Методы интегрирования

Первообразная

Дана функция $f(x)$. Необходимо найти такую функцию *F*(x), производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Другими словами, по производной $F'(x)$ будем отыскивать саму функцию *F*(x), т.е. будем заниматься **интегрированием.**

Определение 1

$$\left.\begin{matrix} F'(x) = f(x) \\ x \in [a;b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(x)$$

называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке [a;b].

Пример:

Найти первообразную для функции $f(x) = \cos x$

Известно, что $(\sin x)^{/} = \cos x$, следовательно $F(x) = \sin x$ - первообразная для *cosx.*

Но $(\sin x + 1)^{/} = \cos x, (\sin x + C)^{/} = \cos x$ (С-*const*), т.е. первообразных *cos*x бесконечно много.

Можно доказать, что функции вида $\sin x + C$ исчерпывают все первообразные для функции $f(x) = \cos x$

Определение 2

$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C = \int f(x)dx$ т.е. если *F(x)* – первообразная для $f(x)$,то семейство *F(x)*+*C*, обозначаемое символом $\int f(x)dx$, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ (*C-const*).

В символе $\int f(x)dx$

$\int$ - знак интеграла,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C,$ или $\int F'(x)dx = F(x) + C, C - const$
4. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
5. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

Методы интегрирования

Для интегрирования функций $f(x)$, т.е. для нахождения семейства F(x)+C существуют:

1. Таблица основных интегралов
2. Методы интегрирования

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n, C - const, n \neq -1$	9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, a - Const$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, a \neq 0$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert + C, a \neq 0$
7. $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
8. $\int ctgx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C, a \neq 0$

Методы интегрирования

а) «Полезное» правило.

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *F(x) – первообразная* для $f(x)$

Тогда $$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$, где *k, b, C – const*

Примеры

1. Найти $\int \frac{dx}{2x+1}$

Подберем подходящий «табличный» интеграл : $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Здесь $f(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \ln|x|$

В нашем случае $\frac{1}{2x+1} = f(2x+1)$ т.е. $kx + b = 2x + 1$, где *k* =2.

Тогда $$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} F(2x+1) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

2. Найти $\int \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, kx + b = -4x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow k = -4$$

тогда $\int \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = -\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{3} - 4x) + C$

б) «Полезная» формула.

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{d(\psi(x))}{\psi(x)} = \ln|\psi(x)| + C$$

Пример: Найти $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx = I$

$$(x^2-4x+6)' = 2x-4 \Rightarrow I = \ln|x^2-4x+6|$$

Свойство инвариантности

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$ Тогда $\int f(u)du = F(u) + C,$

где $u = u(x)$

<u>*Пример:*</u>

$$\int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

Благодарю
за
внимание