План лекции:

- 1. Методы интегрирования (продолжение)
- 2. Определенный интеграл

Методы интегрирования

- 4) <u>Замена переменной</u>

Часть подынтегральной функции или вся функция Ψ(x) заменяется новой переменной, т.е.:

$$\underline{\Psi(x)=t}\ ,\ (*)$$

dx через t находится после дифференцирования обеих частей уравнения замены (*):

$$\underline{d\Psi=dt},\ \text{или}\ \ \underline{\Psi'(x)dx=dt}$$

Если интеграл с новой переменной найден , то, возвращаясь к прежней переменной X, согласно уравнению замены, получим искомый интеграл.

Пример:

1) Найти $$\int Cos3xdx = I$$

Сделаем замену 3x=t

$$d(3x) = dt \Rightarrow (3x)'dx = dt \Rightarrow$$

$$3dx = dt \xleftrightarrow{:3} dx = \frac{dt}{3}$$

Теперь...

$$I = \int Cost \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int Costdt = \frac{1}{3}S\operatorname{int} + C = \frac{1}{3}Sin3x + C$$

2) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+8} = I$

Замена

$$x^3+8=t \Rightarrow d(x^3+8)=dt \Rightarrow$$

$$3x^2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$$

Теперь $I = \int \frac{x^2 \cdot \frac{dt}{3x^2}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+8\right| + C$

Или $x^2 dx = \frac{dt}{3}$ и тогда $I = \int \frac{dt/3}{t}$ и т.д.

3) Пример $I=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

Делаем замену

$$\sqrt{1+\ln x}=t \Rightarrow 1+\ln x=t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(1+\ln x)=d(t^2) \Rightarrow (1+\ln x)'dx=(t^2)'dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=2tdt$$

Подставляем $\frac{dx}{x}$ через t в подынтегральное выражение:

$$I=\int t\cdot 2tdt=2\int t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$$

- 5) Метод преобразования дифференциала

Справедливы следующие формулы:

$$2xdx = d(x^2)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$Cosxdx = d(Sinx)$$

$$-Sinxdx = d(Cosx)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$d(x+C) = dx$$

$$d(Cx) = Cdx$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$$

Примеры

1) $$\int \sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1)^{1/2} d(\underbrace{x+1}_{u}) = \int u^{1/2} du =$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$$

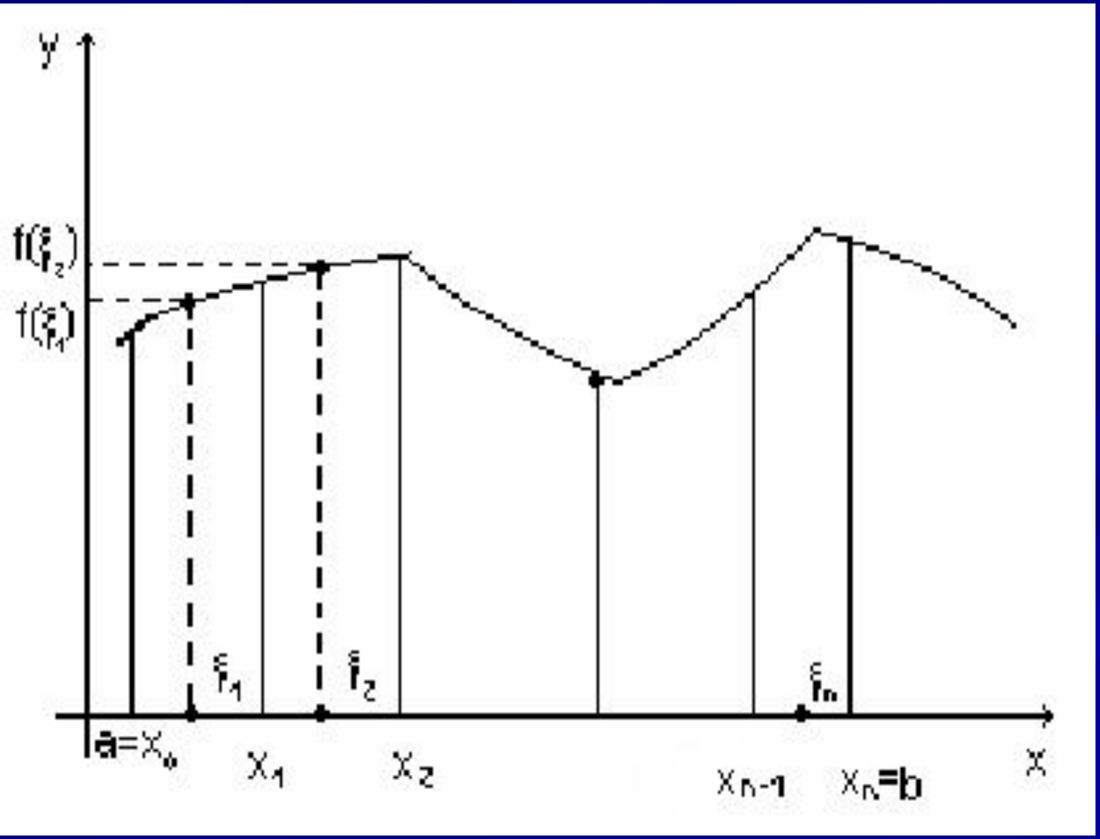
2) $$\int Cos3x\,dx = \int Cos3x \cdot \frac{3dx}{3} = \frac{1}{3}\int Cos3x\,d(\underbrace{3x}_{u}) =$$

$$= \frac{1}{3}\int Cosu\,du = \frac{1}{3} Sinu + C = \frac{1}{3} Sin3x + C$$

3) $$\int \frac{(1+\ln x)dx}{x} = \int (1+\ln x)d(\ln x) = \int (1+\ln x)d(\underbrace{1+\ln x}_{u}) = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C =$$

$$\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 + C$$

Определенный интеграл



Пусть функция f(x) определена на отрезке (a;b). Разобьем отрезок на n частей точками

$$a = x_0 \angle x_1 \angle x_2 \angle \ldots \angle x_n = b \,,$$

выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k , вычислим значение f(x) в каждой из этих точек и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

$$(k = 1,2,\ldots,n)$$

Определение 1:

Сумма вида $f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

называется интегральной суммой для f(x) на отрезке $[a;b]$

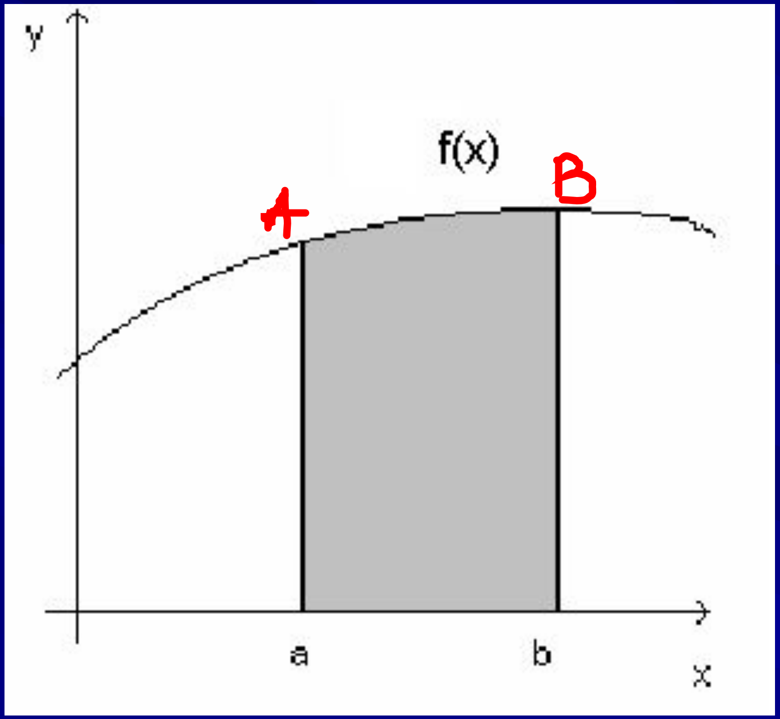
Определение 2:

Устремим максимальную длину отрезков к нулю. При этом $n\to\infty$. Тогда интегральная сумма стремится к некоторому пределу

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ (или в отрезке от a до b). a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования.

Геометрический смысл



Если $f(x) > 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями y=f(x), x=a, x=b, y=a.

Основные свойства определенного интеграла

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- формула Ньютона-Лейбница

Здесь F(x) – первообразная для f(x).

2) $$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

3) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Т.е. при перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла.

4) $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0.

5) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Т.е. отрезок интегрирования можно разбивать на части.

6) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Примеры

1.Вычислить $\int_1^2 5x^4 dx$

Найдем первообразную $\int_1^2 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$

Возьмем $F(x) = x^5 (C = 0)$

Тогда получаем по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^2 5x^4 dx = x^5 \Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 31$$

2. Вычислить $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$

Найдем первообразную

$$\int (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = \int 3xdx - \int e^{\frac{x}{4}}dx = \frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}} + C$$

Выберем

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}}$$

Тогда

$$\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = (\frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}})\Big|_0^4 = \frac{3}{2}\cdot 16 - 4e - (0 - 4\cdot e^0) = 28 - 4e$$

Спасибо за внимание!!!