Тема:

- ***Определенный интеграл, его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла.***

ПЛАН

1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Метод замены переменной.
4. Несобственные интегралы.
5. Приложения определенного интеграла.

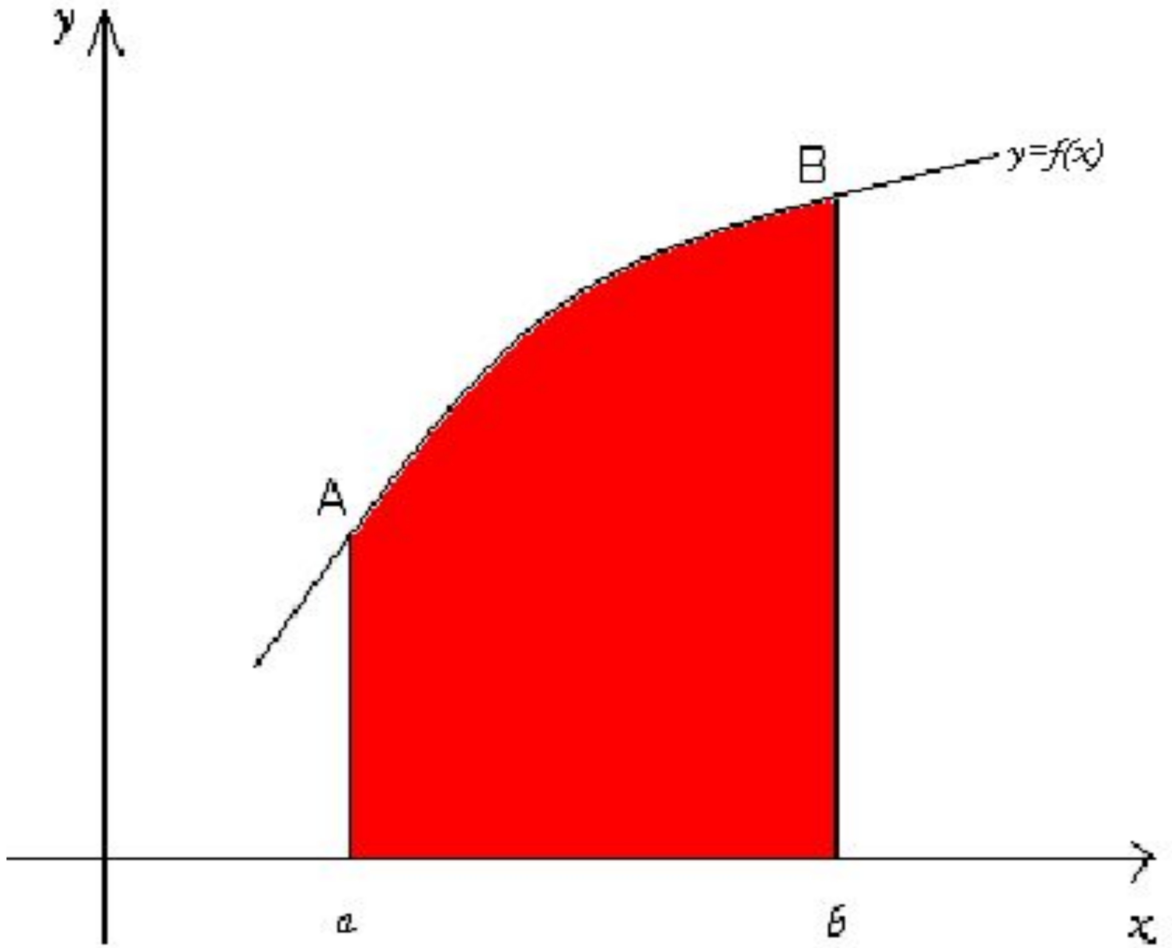
1. Понятие определенного интеграла

- К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
- Пусть на некотором интервале [a,b] задана непрерывная функция $y = f(x) > 0$

Задача:

Построить ее график и найти F площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми x = a и x = b, а снизу – отрезком оси абсцисс между точками x = a и x = b.

Фигура aABb называется **криволинейной трапецией**



Def.

- Под определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$
- от данной непрерывной функции f(x) на данном отрезке [a;b] понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть

$$F(b) - F(a) = F(x)/_a^b$$

- Числа a и b – пределы интегрирования, [a;b] – промежуток интегрирования.

Правило:

- Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
- Введя обозначения для разности

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big/_{a}^{b}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница.

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646 – 1716 гг.)

щийся немецкий
м тфрид Вильгельм
Лейбниц принадлежал к роду,
ому своими учеными и
п и деятелями. Он изобретал
в е универсальные приемы для
решения всех задач сразу и, может быть, поэтому вслед за Паскалем стал строить вычислительные устройства.

Исаак НЬЮТОН (Newton)

(04.01.1643 - 31.03.1727)

ский физик и математик,
ретических основ механики
Он открыл закон
тяготения, разработал
Г. Лейбницем)
льное и
исчисления, изобрел зеркальный
л автором важнейших
экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

2. Основные свойства определенного интеграла.

1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

где x и t – любые буквы.

2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x)dx$$

(свойство аддитивности)

4) Если промежуток [a;b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [a;b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

3. Замена переменной в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a;b]$

для $t \in [\alpha;\beta]$, функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

Пример: $\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx =$

x	1	5
t	0	4

$x - 1 = t$

$dt = dx$

$$= \int_0^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} t\sqrt{t} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

4. Несобственные интегралы.

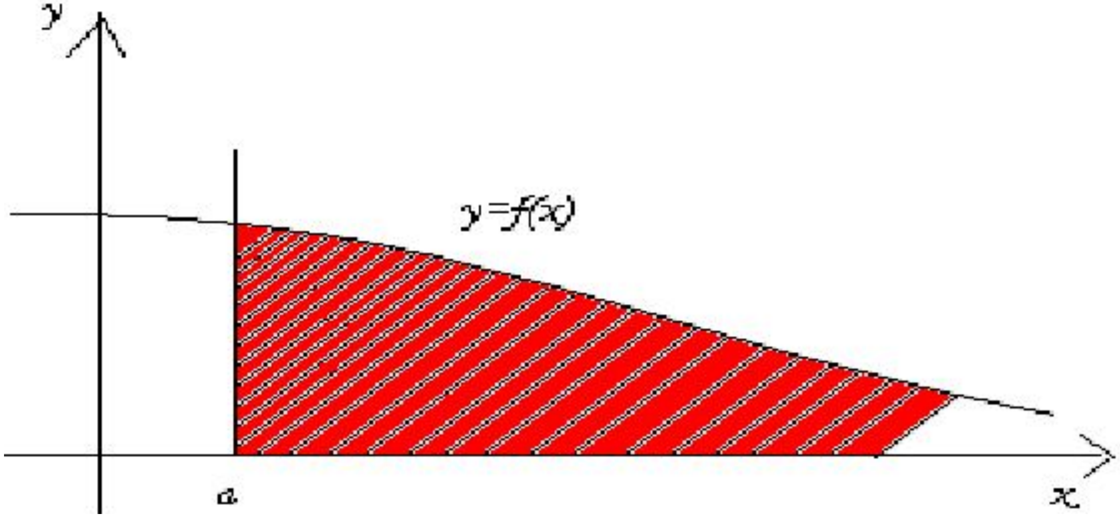
Def: Пусть функция f(x) определена на бесконечном интервале [a; + ∞) и интегрируется на любом интервале [a;b], где b < + ∞. Если существует

$$,\ \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции *f(x)* на интервале [a; + ∞) и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

- Таким образом, по определению,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$$



которое

щимся, если $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

ен ∞, то говорят, что интеграл **расходится**.

ПУАССОН, СИМЕОН ДЕНИ (Poisson, Simeon-Denis) (1781–1840 гг.)

…узский математик,
…изик. В 1811 он вывел
… широкое
… уравнение,
…ее электрический
… плотностью
…енного распределения
заряда (уравнение Пуассона).

Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

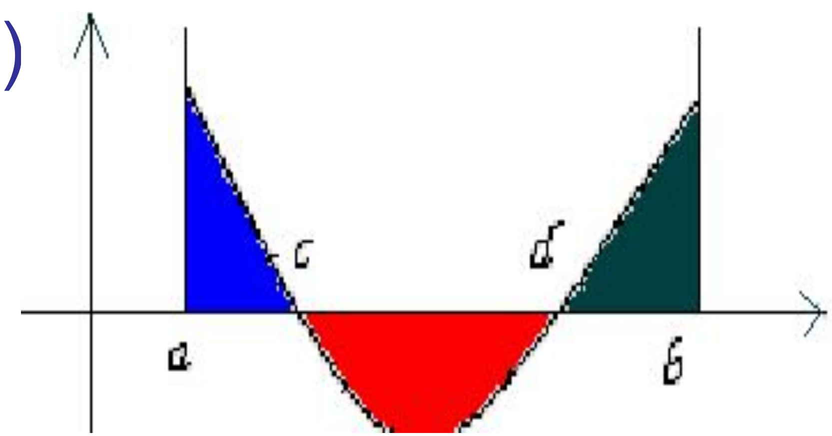
- если а = 1, то $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$
- Интеграл сходится, и его значение $=\sqrt{\pi}$

5. Приложения определенного интеграла

1) Площадь плоских фигур.

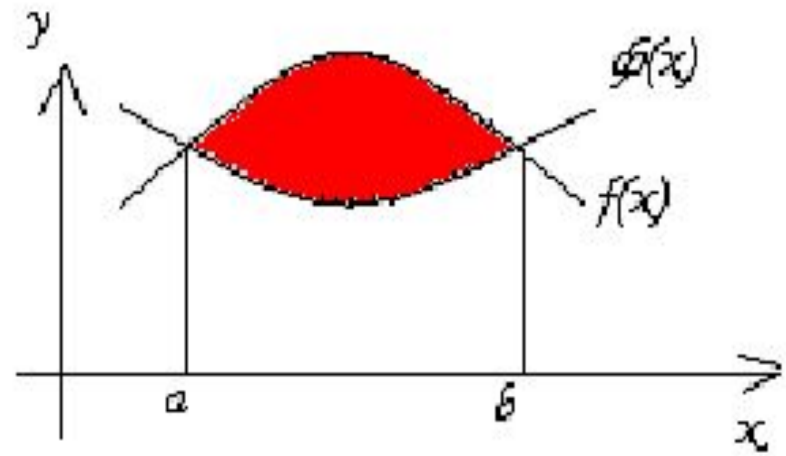
а) если $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$

б) если $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

в) 

$$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^b f(x)dx$$

г) $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$



2) $A = \int_a^b F(x)dx$ интеграл от величины силы по длине пути.

3) Прирост численности популяции.

N(t) прирост численности за промежуток времени от t_0 до T, v(t) – скорость роста некоторой популяции.

$$N(t) = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt$$

интеграл от скорости

по интервалу времени ее размножения.