

Дифференциальные уравнения (продолжение)

План лекции

- I. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)
- II. Линейные однородные уравнения 1-ого порядка.
- III. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
- IV. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

I. Примеры

$$1. (x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$$

Найти общий интеграл.

Поделим обе части на $(x+1)^3 \cdot (y-2)^2 \neq 0$
чтобы разделить переменные.

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0 \quad \text{Проинтегрируем обе части:}$$

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = C \quad (C - \text{const}) \Rightarrow$$

$$\int (y-2)^{-2} \cdot d(y-2) - \int (x+1)^{-3} \cdot d(x+1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = C \quad \text{- общий интеграл}$$

После нехитрых преобразований можно разрешить это уравнение относительно y и получить общее решение.

$$2. \quad y = y' \cos^2 x \ln y$$

Перепишем уравнение, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{dy}{dx} \cos^2 x \ln y \quad | \cdot dx$$

$$y dx = \cos^2 x \ln y dy \quad | : y \cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \ln y \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y dy}{y} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \int \ln y d(\ln y) \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y + C - \text{общий интеграл}$$

3.

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$$

Приведем уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, вынося общие множители за скобки:

$$y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0 \quad | : (yx)$$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1+x}{x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = C \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = C \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int dx + \int \frac{dy}{y} - y = C \Rightarrow$$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \quad \text{- общий интеграл}$$

4. Найти частный интеграл уравнения

удовлетворяющий начальному условию

$$y dx + \operatorname{ctg} x \cdot dy = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Найдем вначале общий интеграл.

$$y dx + \operatorname{ctg} x \cdot dy = 0 \quad | : (y \operatorname{ctg} x \neq 0)$$

$$\frac{dx}{\operatorname{ctg} x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \operatorname{tg} x dx + \int \frac{dy}{y} = C \Rightarrow$$

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\cos x}\right| = C \Rightarrow$$

$$\left|\frac{y}{\cos x}\right| = e^C \Rightarrow \left|\frac{y}{\cos x}\right| = C_1 \Rightarrow \frac{y}{\cos x} = \pm C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\cos x} = C_2 \Rightarrow y = C_2 \cos x - \text{общее решение}$$

$$(C_1 = e^c, C_2 = \pm C_1).$$

Используя начальное условие, подставляем в общее решение значения

$$x = \frac{\pi}{3}, y = -1$$

$$-1 = C_2 \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow C_2 = -2$$

Найденное значение константы C_2 подставляем в общее решение

$$y = -2 \cos x - \text{искомое частное решение}$$

II. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'

Общий вид линейного уравнения:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Рассмотрим случай однородного уравнения, когда $Q(x) = 0$, т.е.:

$$y' + P(x) \cdot y = 0$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \quad | \cdot \frac{dx}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x) = C \Rightarrow \ln|y| + \int P(x)dx = C$$

$$\ln|y| = C - \int P(x)dx \Rightarrow |y| = e^{C - \int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$|y| = e^C \cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y \pm C_1 \cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$y = C_2 e^{-\int P(x)dx}$$

(здесь $C_1 = e^C$, $C_2 = \pm C_1$)

Пример.

$y' - y \operatorname{ctg} x = 0$ Найти общее решение.

Здесь $P(x) = -\operatorname{ctg} x$ и тогда

$$y = C e^{\int \operatorname{ctg} x dx} \Rightarrow y = C^{\ln|\sin x|} \Rightarrow y = C|\sin x| \Rightarrow$$

$y = \pm C \sin x \Rightarrow y = C_1 \sin x$ - искомое общее решение

($C_1 = \pm C$)

III. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n-кратным интегрированием.

Умножаем обе части уравнения на dx:

$$y^{(n)} dx = f(x) dx$$

Интегрируем:

$$\int y^{(n)} dx = \int f(x) dx$$

Получаем уравнение (n-1)-го порядка:

$$y^{(n-1)} = F_1(x) + C_1 \text{ первообразная для } f(x)$$

Снова умножаем обе части на dx и интегрируем:

$$y^{(n-2)} = \int (F_1(x) + C_1) dx$$

$$y^{(n-2)} = F_2(x) + C_1 x + C_2$$

Общее решение будет зависеть от n произвольных констант

Пример.

$$y''' = 60x^2 \quad | \cdot dx$$

$$y''' dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y''' dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60 \int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad | \cdot dx \Rightarrow$$

$$y'' dx = (20x^3 + C_1) dx \Rightarrow \int y'' dx = \int (20x^3 + C_1) dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1 x + C_2 \quad | \cdot dx$$

$$y' dx = (5x^4 + C_1 x + C_2) dx \Rightarrow \int y' dx = \int (5x^4 + C_1 x + C_2) dx$$

$$y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

IV. Линейные однородные дифференциальные уравнения II-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Таковыми уравнениями называются уравнения вида:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

в котором все члены имеют первую степень относительно функции и её производных, а коэффициенты a_0, a_1, a_2 - постоянные ($a_0 \neq 0$)

Для отыскания общего решения уравнения составляется характеристическое уравнение:

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \quad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нём производных искомой функции соответствующими степенями r , причём сама функция заменяется единицей.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

где y_1 и y_2 - линейно независимые частные решения уравнения (1),

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Строится общее решение в зависимости от дискриминанта D квадратного уравнения (2):

1) $D > 0$

В этом случае имеем 2 различных действительных корня r_1 и r_2 , и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) $D = 0$

В этом случае имеем единственный действительный корень r_0 , и общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}$$

3) $D < 0$

В этом случае имеем пару комплексных сопряженных корней

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad \text{где } i = \sqrt{-1} \text{ - мнимая единица, } \alpha \text{ и } \beta \text{ - действительные числа.}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Примеры выделения чисел α и β :

$$\begin{aligned} 1. \quad r_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{-5} = -2 \pm \sqrt{5 \cdot (-1)} = -2 \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \\ &= -2 \pm \sqrt{5} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2, \quad \beta = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$2. \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Примеры интегрирования уравнений

1. $y'' - 5y' - 6y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 5r - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 6 \\ r_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow D > 0$$

Имеем случай 1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$ - общее решение

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \Rightarrow D = 0.$$

Имеем случай 2). Общее решение запишется:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

3. $\frac{d^2 S}{dt^2} - 6 \frac{dS}{dt} + 13S = 0$, $S = S(t)$.

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 6r + 13 = 0, \quad D = 36 - 52 = -16 < 0. \text{ Имеем случай 3).}$$

$$r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6}{2} \pm \frac{4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 2.$$

Общее решение:

$$S = e^{3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

4. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$
с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Найдём общее решение. Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2r + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow$$

имеем 2 комплексных корня

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -\frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 1$$

Общее решение:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad - \quad *$$

$$y' = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

В эти 2 равенства подставляем 2 начальных условия

$$x = 0, \quad y = 1 \quad x = 0, \quad y' = 1:$$

$$\begin{cases} 1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \\ 1 = e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0 (-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в общее решение (*):

$$y = e^{-x} (\cos x + 2 \sin x) \quad - \quad \text{искомое частное решение.}$$