
Числовые ряды

План

- 1. Числовые ряды.
Определение.**
- 2. Необходимый признак
сходимости.**
- 3. Достаточные признаки
сходимости рядов с
положительными членами.**
- 4. Знакопеременные ряды.**
- 5. Знакочередующиеся ряды.**
- 6. Признак Лейбница.**

Сумма ряда или **ряд**, — математическое выражение, позволяющее записать бесконечное количество слагаемых и подразумевающее значение их суммы, которое можно получить в предельном смысле. Если значение суммы (в предельном смысле) существует, то говорят, что ряд **сходится**. В противном случае говорят, что он **расходится**

Пусть дана бесконечная последовательность чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Выражение:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

называется числовым рядом, а числа - членами ряда.

Суммы $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots; S_n = a_1 + a_2 + a_n, \dots$

называются частичными суммами ряда. (2)

Если последовательность частичных сумм имеет

конечный предел
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (3)$$

то этот предел называется суммой ряда. В этом случае ряд называется сходящимся. Если же предел (3) не существует или равен ∞ то ряд расходится и суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (4)$$

При нарушении условия (4) ряд заведомо расходится.

Заметим, что из сходимости ряда (2) следует сходимость его остатка $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ и, наоборот, из сходимости остатка ряда следует сходимость исходного ряда. Иначе говоря, если отбросить конечное число начальных членов ряда, то это не отразится на сходимости (расходимости) ряда.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1) Признак сравнения рядов

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (5)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (6)$$

- Если, начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5) и из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

2) Признак Даламбера.

- Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается переменным.

3) Признак Коши

- Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ ($a_n > 0$) то при $l < 1$ ряд (5) сходится, а при $l > 1$ расходится. Если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Примеры

1. Написать пять первых членов ряда по данному общему

$$\text{члену } a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots \quad (*)$$

2. Найти для ряда (*) частичную сумму первых n членов() S_n

Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ запишем иначе:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Частичная сумма ряда

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Отсюда следует, что ряд (*) сходится и его сумма $S=1$

3. Написать формулу общего члена для ряда:

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{8} + \frac{6}{11} - \frac{8}{14} + \dots$$

Числители членов – четные числа вида $2n$,

а знаменатели – нечетные числа, получаются по

формуле $3n+2$. ($n=1,2,3,\dots$)

Учитывая, что знаки членов ряда чередуются, получим

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n}{3n+2}$$

4. *Гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad \text{- расходится!}$$

если $a_n = \frac{1}{C \times n}$, то расходится!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{3}{2} + \frac{5}{7} + \frac{7}{12} + \dots + \frac{2n+1}{5n-3} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

5. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad a_n = \frac{2^n}{n!} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

$l=0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

6. Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сходится}$$

Знакопеременные ряды

Определение: Если члены числового ряда с разными знаками, то такой ряд будет называться знакопеременным.

- Знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ (1)

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных

величин его членов $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$ (2)

Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

-
- Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется условно сходящимся.

Признаки абсолютной сходимости знакопеременного ряда те же, что и сходимости с положительными членами.

Знакопеременные ряды

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$ (3)

$$- a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots \quad (3')$$

где $n > 0$ ($n=1,2,3,\dots$) называется
знакопеременным. Этот ряд является частным
случаем знакопеременного ряда.

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда (3) убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то такой ряд сходится и сумма

его $0 < S < a_1$

Исследовать сходимость знакочередующегося ряда.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Члены данного ряда убывают по абсолютной величине, знаки чередуются и предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Составлен ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ (а)

и сравним его с расходящимся рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (\text{б})$$

(т.к. расходится гармонический ряд).

Каждый член ряда (а) больше соответственного члена ряда (б), следовательно, ряд (а) расходится, потому данный ряд **сходится условно**.

Итак: 1) Сходятся условно ряды с общим членом

$$\frac{(-1)^{n-1}}{an-1} \quad \text{или} \quad \frac{(-1)^n}{an-1} \quad \left(\frac{(-1)^n}{4n-1} \right)$$

2) Абсолютно сходятся ряды с общим членом

$$a_n = \frac{(-1)^n}{a^n}; \frac{1}{a^n} \quad - \text{ СХОДИТСЯ}$$

3) Расходятся ряды с общим членом

$$a_n = (-1)^n \times n$$

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n \times n +$$

Признак Лейбница не работает.

$$1+1+1+1+\dots$$

$S_n = n$ - ряд расходится, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$

4) $\sum \frac{1}{n}$ -
сходится.

5) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ - сходится условно.