Функциональные ряды.

Опр-е: Выражение $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ (1) называется рядом относительно переменной х.

Придавая переменой х некоторое значение x_0, x_1 и т.д., мы будем получать те или иные числовые ряды.

В зависимости от значения принимающего переменной х, численный ряд может оказаться сходящимся или расходящимся.

Опр-е: Совокупность всех значений переменной х, для которых ряд (1) сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Опр-е: Функциональный ряд вида $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (2), где a_0, a_1, $a_2\ldots$ не зависят от переменой х, называется степенным относительно переменный х рядом.

Области сходимости степенных рядов устроены довольно просто. Они описываются следующей теоремой.

Теорема Абеля: если степенной ряд (2) сходится при некотором $x=x_0$,то он сходится абсолютно при всех значениях x, для которых $|x|<|x_0|$. Наоборот, если ряд (2) расходится при $x=x_0$, он расходится при всех значениях x, для которых $|x|>|x_0|$

Для каждого степенного ряда существует такое вещественное неотрицательное число R, что при |x|<R ряд (2) сходится, а при |x|>R расходится. **R-радиус сходимости.**

Опр-е: Область значений переменной x, удовлетворяющих соотношению –R< x <R называется в случае вещественного ряда его **интервалом сходимости.**

1) Степенные ряды вида (2), которые сходятся лишь в точке x=0 относятся к рядам **первого класса.**

$1+x+1!x^2+\ldots+n!x^n+\ldots$

2) Степенные ряды вида (2), которые сходятся на всем R относятся к рядам II-го класса.

#

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

3) Ряды вида 2, не принадлежащие к I и II классам относятся к рядам III классам.

Теорема: Пусть для ряда (2) существует и отличен от нуля предел: $R \neq 0, R \neq \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

Тогда R= $\frac{1}{L}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

\# $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

Составим предел отношения $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n} = 3$

Интервал сходимости: -3<x<3.

Ряды по степеням разности x-a

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots a_n(x-a)^n + \ldots$$

Интервалом сходимости степенного ряда (3) является интервал длинной 2R с центром в точке x=a.

Разложение функций в степенные ряды

Ряд Тэйлора

Если функция F(x) является суммой ряда (3), то в этом случае говорят, что F(x) разлагается в ряд по степеням (x-a)

Мы имеем возможность приближенно заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда (т.е. многочленов).

.Если функция F(x) на интервале (x_0-R; x_0+R) разлагается в степенной ряд

$$F(x)= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots a_n(x-x_0)^n + \ldots \qquad (4)$$

то это разложение единственно.

Коэффициенты (4) определяется единственным образом функциями:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!} \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в равенство (4) получаем ряд Тейлора – разложение функции F(x) по степеням разности (x-a).

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Пример: Найти коэффициент a_4 в разложении функции $F(x)=x^3-1$ по степеням разности (x-1).

$$a_4 = \frac{f^{IV}(1)}{4!}$$

$F'(x)=3x^2$

$F''(x)=6x$

$F'''(x)=6$

$F^{IV}(x)=0 \longrightarrow a_4=0$

Пример: $f(x) = 4x^5-10x^3+3$ разложить по степеням $(x-1)$, чему равен коэффициент при $(x-1)^2$.

Порядок 5, значит слагаемых будет 6.

$$a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{20}{2!} = 10$$

$F'(x)=20x^4-30x^2$

$F''(x)=80x^3-60x$

$F''(1)=80-30=20$

Ряды Фурье

Опр-е: Тригонометрический ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad (8)$$

где a_0, a_n, b_n (n=1,2 и т.д.) – постоянные числа, называемые коэффициентами тригонометрического ряда, называется рядом Фурье ф-ции f(x).

f(x) – периодическая с периодом $T = 2\pi$

Коэффициенты ряда (8) определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx (9)$$

Достаточные условия представимости функции ряда Фурье.

Пусть функция f(x) на отрезке [- π ; π] удовлетворяет условиям Дирехле

1. Это значит, что функция на этом отрезке непрерывна или кусочко – непрерывна (т.е. имеет конечное число точек, разрыва первого рода) и

2. Монотонно или кусочно-монотонно.

I. Дирихле: Если функция f(x) удовлетворяет условиям Дирехле на отрезке [- π ; π], то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке, и сумма этого ряда равна значению функции f(x) в точках непрерывности функции, и $(f(x_0-0)+f(x_0+0))/2$, в точке x_0 – разрыва ф-ции,

Нахождение суммы числового ряда с помощью разложения в ряд Фурье.

С помощью имеющегося разложения в ряд Фурье можно вычислять значения сумм числовых рядов, соответствующих данному ряду.

Пример: Дана функция $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi \le 0 \\ 0, 0 < x < \pi \end{cases}$

Вычислив коэффициент ряда Фурье, имеем:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k_x}{k}$$

Найти сумму числового ряда:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Второе слагаемое ряда Фурье содержит нужную нам сумму, но с множителем cos(2k-1)x, который является мнимым. Пусть cos(2k-1)x=1, тогда: cos(2k-1)x=1

(2k-1)x=0

x=0$\in(-\pi;\pi)$ в этой тоже функция f(x) определена и значит по теореме Дирихха сумма ряда равна значению функции в этой точке: S=f(x), f(0)=-x/0=-0=0‹

Рассчитаем третье слагаемое:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 0}{k}=0$$

Подставим все найденные значения в разложение:

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+0;$$

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}S_r\Rightarrow S_r=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{\pi^2}{8},m.e.1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\frac{\pi^2}{8}$$

Упр: с помощью разложения функции f(x)=x^2 $\in[-\pi;\pi]$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$$ найти сумму числового ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Разложение функции в неполный ряд Фурье.

Разложения будет неполным (говорят о неполном ряде Фурье), если исходящая функция является: а) четной – разложение по cos:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx$$

б) нечетная – разложение по sin:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

в) определенная на полуинтервале т.е. на $[-\pi;0]$ или $[0;\pi]$

В этом случае функция продолжается на другой полуинтервал и просчитываются соответствующие коэффициенты (a_k или b_k).

Пример: f(x)=x на $(0;\pi)$

Зададим продолжение функции на интервал $(0;\pi)$ нечетную функцию.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin k_x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi} xd\cos k_x =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(x\cos kx \Big/_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos kxdx) = \frac{2}{\pi k}(\pi\cos\pi k - 0 + \frac{1}{k}\sin kx \Big/_0^{\pi}) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(\pi(-1)^k + \frac{1}{k}\cdot 0 - \frac{1}{k}\cdot 0) = \frac{2}{\pi k}\cdot\pi(-1)^k = \frac{2(-1)^k}{k}$$

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k}}{k}\sin kx \quad \text{на} \quad (0;\pi)$$

Упр: та же функция, продолжение - четное.