Основные понятия теории вероятностей. Определение вероятности случайного события. Элементы комбинаторики:

Перестановки;

Размещения;

Сочетания.

Теория вероятностей изучает закономерности массовых случайных явлений (не единичных!).

Зародилась в связи с азартными играми в Швейцарии (XVI – XVII в.в н.э.)

Отцы-основатели: Паскаль, Ферма, Гюйгенс, Якоб Бернулли.

Русские: Чебышев П.Л., Буняковский, Хинчин, Колмогоров.

Пространство элементарных событий

- Будем полагать, что результатом реального опыта (эксперимента) может быть один или несколько взаимоисключающих исходов; эти исходы неразложимы и взаимно исключают друг друга. В этом случае говорят, что эксперимент заканчивается одним и только одним *элементарным исходом*.

Множество всех элементарных событий, имеющих место в результате *случайного* эксперимента, будем называть ***пространством элементарных событий*** **Ω**

- *Случайными событиями* будем называть подмножества пространства элементарных событий Ω .

Определение. Под **случайным событием** или просто **событием** будем понимать всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

События будем обозначать большими латинскими буквами **A, B, C, D,** …

Пример

- Бросаем один раз игральную кость. В этом опыте пространство элементарных событий $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, где w_i - выпадение *i* очков.
- Событие *A* - выпадение четного числа очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$, $A \subset \Omega$.

Достоверное событие

- **Событие Ω** называется ***<u>достоверным событием</u>***

Достоверное событие не может не произойти в результате эксперимента, оно *происходит всегда*.

- **Пример.** Бросаем один раз игральную кость. Достоверное событие состоит в том, что выпало число очков, не меньше единицы и не больше шести, т.е. $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, где w_i - выпадение *i* очков, Ω - достоверное событие.

Невозможное событие

- ***Невозможным*** событием называется пустое множество $\varnothing$.
- Невозможное событие не может произойти в результате эксперимента, оно *не происходит никогда*.
- **Пример.** Бросаем один раз игральную кость. Выпадение более шести очков - невозможное событие .

Совместимость событий

- Два события называются **несовместными**, если наступление одного из них исключает наступление другого в одном и том же испытании.
- **Совместными** называются события, если они могут наступить одновременно в одном испытании

Противоположное событие

- Два несовместных события, составляющих полную группу, называются противоположными
- Обозначается $\overline{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- **Пример.** Бросаем один раз игральную кость. Событие A - выпадение четного числа очков, тогда событие $\overline{A}$ - выпадение нечетного числа очков. Здесь Ω = {w $_1$, w $_2$, w $_3$,w $_4$, w $_5$,w $_6$}, где w $_i$- выпадение *i* очков, *A* = {w $_2$,w $_4$,w $_6$}, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ = $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

Действия со случайными событиями

- ***Суммой*** *событий A* и *B* называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одному из событий *A* или *B.* Обозначается *A* + *B.*
- **Пример.** Бросаем один раз игральную кость. В этом опыте пространство элементарных событий
  $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, Событие *A* - выпадение четного числа очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$, событие *B* - выпадение числа очков, большего четырех, $B = \{w_5, w_6\}$.
  Событие $A + B = \{w_2, w_4, w_5, w_6\}$

Произведением *событий A* и *B* называется событие, состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно событиям *A* и *B*. Обозначается *AB*.

- **Пример.** Бросаем один раз игральную кость. В этом опыте пространство элементарных событий $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Событие *A* - выпадение четного числа очков, $A = \{w_2, w_4, w_6\}$, событие *B* - выпадение числа очков, большего четырех, $B = \{w_5, w_6\}$.
  Событие *A B* состоит в том, что выпало четное число очков, большее четырех, т.е. произошли оба события, и событие *A*, и событие *B*, $A\,B = \{w_6\}$

  $A\,B \subset \Omega$.

Классическое определение вероятности события. Его свойства.

Рассмотрим следующую классическую схему:

1. Пространство элементарных исходов Ω - конечно; т.е. состоит из конечного числа элементарных исходов.
2. Элементарные исходы ω_i равновозможные.

Определение:

Вероятностью события А (обозначение Р(А)) называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу **n** всех несовместных, равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Свойства вероятности согласно классическому определению.

- $P(\Omega)=1$;
- $P(\varnothing)=0$;
- $0 \le P(A) \le 1$, A- случайное событие.

Слабые стороны классического определения вероятности:

1) Не всегда интересующие нас событие можно представить в виде совокупности элементарных исходов.

2) Даже если удастся построить пр-во элементных исходов, зачастую нет никаких оснований считать эти исходы равновозможными.

3) Во многих случаях пр-во элементарных исходов бесконечно

Статистическое определение вероятности. Относительная частота (частность) события.

В основе статистического определения вероятности лежит понятие **частоты.**

Def: **Относительной частотой Ẃ (A) случайного события А** - называется отношение числа m испытаний, в которых событие А наступило, к общему числу n, фактически проведённых испытаний.

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Пример:

\# Монета подброшена 100 раз. Герб выпал 47раз. Если А- выпадение герба, то

$$\acute{W}(A)=\frac{47}{100}=0,47$$

<u>! Относительная частота – величина случайная.</u>

Свойства относительной частоты:

Из определения следует, что:

- $\acute{W}(\Omega)=1$
- $\acute{W}(\varnothing)=0$ - $\varnothing$-невозможное событие.
- $0 \le \acute{W}(A) \le 1$

Свойство устойчивости:

Длительные наблюдения показали, что, если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает **свойство устойчивости**. Это свойство состоит в том, что:

- **в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.**

В качестве статистической **вероятности случайного события** выбирают относительную частоту этого события или число, близкое к относительной частоте.

$$\boxed{P(A) \approx W(A)}$$

Для существования статической вероятности события А требуется:

а)Возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие А наступает или не наступает;

б)Устойчивость относительных частот появления А в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Элементы комбинаторики:
перестановки; размещения; сочетания.

Комбинаторика – раздел алгебры, занимающийся подсчётом количества комбинаций элементов, которые можно составить по определённым правилам из элементов конечных множеств.

M – конечное множество, содержащее n различных элементов.

$$M=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

1) Перестановки без повторений:

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же **n** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!\ ,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n-факториал)

По определению полагаем:

$$0! = 1$$

<u>Задача.</u> Сколькими способами можно расставить трехтомник на полке?

Каждое расположение трёх различных книг в определенном порядке (на полке) представляет собой перестановку из 3-х книг, и следовательно, м. б. реализовано P_3=3! =6 различными способами.

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2),$$

$$(a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_2, a_1).$$

2)Размещения без повторений.

Размещениями называют комбинации, составленные из **n** различных элементов по **m** элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1);$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Задача. Сколько можно составить сигналов из 7 флагов разного цвета, взятых по 3?

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

3)Сочетания без повторений.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Пример:

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 различных деталей?

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{1\cdot 2\cdot (3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8)\cdot 9\cdot 10}{(1\cdot 2)\cdot 1\cdot 2\cdot (3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8)} = \frac{90}{2} = 45$$

Связь между размещениями, сочетаниями и перестановками:

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$\boxed{A_n^m = P_m \cdot C_n^m}$$

Замечание:

Предполагалось, что все n элементы различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2 \ldots) = n!/(n_1! n_2! \ldots),$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n.$