Теоремы умножения и сложения вероятностей

Формула полной вероятности

$$P_A(B)$$

Def: Условной вероятностью называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Условная вероятность обладает теми же свойствами, что и безусловная вероятность.

\# Из ящика, содержащего 4 белых и 7 чёрных шаров наудачу последно извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что 2-й шар - чёрный при условии, если первым был извлечён белый шар.

$$A = \{1-\text{ый извлечён белый шар}\}$$

$$B = \{2-\text{ой извлечён черный шар}\}$$

$$P_A(B) = \frac{7}{10}$$

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Th: **Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.**

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Следствие: **Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:**

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot ...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$$

Из ящика, содержащего 4 кр., 6 зел., и 5 син. шаров наудачу последовательно извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что первым будет извлечён красный шар, вторым – зелёный и третим – синий (извлечённые шары обратно в ящик не возвращаются).

Решение:

$$R = \{\text{первый шар кр.}\}$$
$$Z = \{\text{втор. шар зел.}\}$$
$$S = \{\text{третий} - \text{синий}\}$$
$$A = R\cdot Z\cdot S$$

$$P(A) = P(R\cdot Z\cdot S) = P_R(Z)\cdot P_{RZ}(S) = \frac{4}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}$$

Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события В не зависит от появления события А.

Def: Событие В называют независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В, т.е., если условная вероятность события В равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B)$$

Свойство независимости событий взаимно, т.е., если событие В не зависит от события А, то и событие А не зависит от события В.

$$P_B(A) = P(A)$$

Th: Для независимых событий теорема умножения $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ имеет вид

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

Def: Два **события** называют **независимыми**, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называются **зависимыми**.

Замечание: *Если события A и B независимы,*

то независимы т.ж. события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Def: Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

Def: Несколько событий называют независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следствие из Th умножения:

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Следствия.

Th: **Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.**

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Следствие: **Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:**

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Th: **Вероятность появления хотя бы одного из событий** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий**

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$$

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n}$$

$$A_1, A_2, \ldots A_n$$

Частный случай.

Если события имеют

$$\boxed{P(A) = 1 - q^n}$$

...тность, равную р, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$\neq$ Вероятности попадания в цель при стрельбе из трёх орудий таковы:

$p_1 = 0{,}8;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}9.$

Найти вероятность хотя бы одного попадания (соб. A) при одном залпе из всех орудий.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Th: **Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:**

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Замечание: При использовании формулы следует иметь в виду, что события А и В могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обеих орудий) хотя бы одним из орудий.

Ответ: р=0,94

Формула полной вероятности

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$

<u>Th:</u> Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Имеются 5 урн. В двух урнах по 2 белых и одному чёрному шаров. В одной 10 чёрных. В двух по 3 белых и одному чёрному шаров.

Найти вероятность того, что вынутый наудачу выбранной урны шар окажется белым.

Решение:

$$A = \{\text{вынутый шар белый}\}$$

$$H_1 - \text{выбрана урна первой гр.}$$

$$H_2$$

$$H_3$$

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + H_3 \cdot A$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{0}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{15} + \frac{6}{20} = \frac{4}{15} + \frac{3}{10} = \frac{8+9}{30} = \frac{17}{30}$$