«Повторение испытаний»

План

I. Формула Бернулли
II. Локальная теорема Лапласа
III. Интегральная теорема Лапласа
IV. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

I.

- Стоит задача, вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится (n – k) раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторялось ровно k раз в определенной последовательности.
- Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$ (#$P_5(3)$).
- Задачу можно решить с помощью формулы Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно сложно, т.к. формула требует выполнения действий над громадными числами. (# $P_{50}(30)$)

II.

- Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. *Локальная теорема Лапласа* дает формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления событий ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Th:

- Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np) / \sqrt{npq}$

- $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (x \geq 0)$ - локальная функция Лапласа
- Функция φ(x) четная, т.е. φ(-x) = φ(x)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

#.

- Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.
- $n = 400$
- $k = 104$
- $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi\left(\frac{104 - 80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \varphi\left(\frac{24}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(3) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}0044 = 0{,}00055$$

$$P_{400}(104) \approx 0{,}0006$$

III. Интегральная теорема Лапласа

- Th: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A, появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz,$$

$$x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq} \quad \text{и} \quad x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$$

- При решении задач пользуются специальной таблицей.
- Таблица для интеграла $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \quad x > 0$

  для $x < 0$ пользуемся той же таблицей, т.к. $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
- В таблице приведены значения до $x = 5$ для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0,5$
- $\Phi(x)$ – *функция Лапласа.*

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{0}e^{-z^2/2}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''}e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''}e^{-z^2/2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x'}e^{-z^2/2}dz=\Phi(x'')-\Phi(x')$$

- Итак, вероятность того, что событие A появиться в независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$\boxed{P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x')}$$

# #

- Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.
- $p = 0{,}75, \ \ q = 0{,}25$
- $n = 100$
- $k_1 = 70, k_2 = 80$

$$P_{100}(70,\, 80) \approx \Phi\left(\frac{80-75}{\sqrt{75\cdot 0{,}25}}\right) - \Phi\left(\frac{70-75}{\sqrt{75\cdot 0{,}25}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{5}{0{,}5\cdot 5\sqrt{3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2\Phi(1{,}15) =$$

$$= 2\cdot 0{,}3749 = 0{,}7498$$

IV.

- Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $E > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$|m/n - p| \leq E$$

- Эту вероятность будем обозначать так:

$$P(|m/n-p|\le E)\approx 2\Phi(E\sqrt{n/(pq)})$$

Итак, вероятность осуществления неравенства |m/n – p| ≤ E приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа

2Ф(x) при $x=E\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$

# #

- Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p = 0,75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсциссе величине не более чем на 0,001

#

- Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.