Функция распределения вероятностей случайной величины

Способы задания дискретной случайной величины не являются общими – они неприменимы, например, для непрерывных случайных величин.

Действительно, пусть возможные значения случайной величины X полностью заполняют интервал (a;b). Можно ли составить перечень всех возможных значений X?   Нет.

Необходим общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Функцией распределения называют ф-цию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Отсюда определение: случайную величину называют непрерывной, если ее ф-ция распределения есть непрерывная кусочно-дифференцируемая ф-ция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. F(x) – неубывающая ф-ция, т. е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a;b), равна приращению ф-ции распределения на этом интервале:

$$P\ (a<X<b) = F\ (b) - F\ (a).$$

Пример №1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1 \\ x/4+1/4 & \text{при } -1<x\le 3 \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0;2):

$$P(0<X<2) = F(2) – F(0).$$

Решение. Т.к. на интервале $(0;2)$, по условию,

$$F(x) = x/4 + 1/4,$$ то

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) – (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

Итак, $P(0<X<2) = 1/2$.

Пример №2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2 \\ 0{,}5x - 1 & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) меньше 0,2; б) меньше 3; в) не меньше 3; г) не меньше 5.

а) $P(X<0,2) = F(0,2) = 0$.

б) $P(X<3) = F(3) = 0,5 \cdot 3 - 1 = 0,5$.

в) $P(X \geq 3) = ?$ Т.к. события $X \geq 3$ и $X<3$ противоположны, то

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

г) $P(X \geq 5) = 1 - P(X<5) = 1 - F(5) = 1-1 = 0$.

Пример №3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате 4-х независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

Вероятность того, что X примет значение $x \in (0{,}25;\ 0{,}75)$ в одном испытании, равна

$$P(0{,}25<X<0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) =$$

$$= x^2 \Big|_{0{,}25}^{0{,}75} = (3/4)^2 - (1/4)^2 = 9/16 - 1/16 = 1/2.$$

Итак, $p = 1/2$, $q = 1 - 1/2 = 1/2$.

Вероятность того, что X примет значение $x \in (0{,}25;\ 0{,}75)$ ровно 3 раза в 4-х испытаниях, равна по ф-ле Бернулли:

$$P_4(3) = C_4^3 (1/2)^3 \cdot 1/2 = 4 \cdot 1/16 = 1/4.$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна 0.

Таким образом, имеет смысл рассматривать вероятность попадания случайной величины в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Напр., интересуются вероятностью того, что размеры деталей не выходят за дозволенные границы, но не ставят вопроса о вероятности их совпадения с проектным размером.

Но неправильно думать, что равенство 0 вероятности $P(X=x_1)$ означает, что событие $X=x_1$ невозможно (если не ограничиваться классическим определением вероятности). В результате испытания случайная величина обязательно примет одно из возможных значений; в частности, это значение может оказаться равным x_1.

5. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a;b), то

1) $F(x) = 0$ при $x \le a$;

2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

] Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:

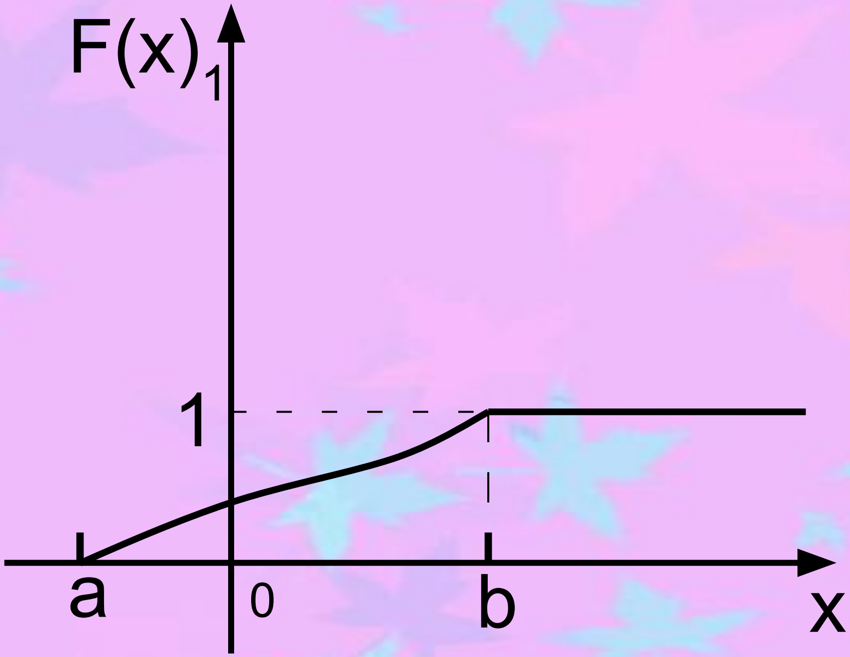
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения

] График расположен в полосе, ограниченной прямыми y=0, y=1

(1 свойство).

] При возрастании x в интервале (a; b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (2 свойство).



] При x ≤ a ординаты графика равны 0;
при x ≥ b ординаты графика равны 1.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Способ задания непрерывной случайной величины с помощью ф-ции распределения не является единственным.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую ф-цию, которую называют <u>плотностью распределения</u> или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют ф-цию f(x) – первую производную от ф-ции распределения F(x):

$$f(x) = F'(x).$$

Отсюда функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Пример. Дана ф-ция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

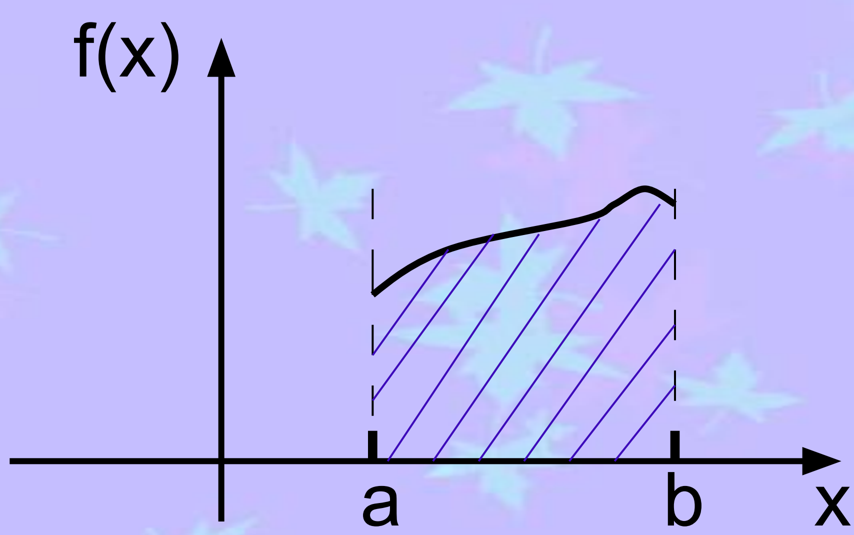
Найти плотность распределения f(x).

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a; b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение x∈(a; b), численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения f(x) и прямыми $x = a$ и $x = b$.



Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения – неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0.$$

   График плотности распределения называют кривой распределения.

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до ∞ равен 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрический смысл: вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох и кривой распределения, равна 1.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат (a; b), то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Вероятностный смысл плотности распределения

Функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки x.

Для достаточно малых Δx.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x.$$

Т.к. разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ определяет (см. выше) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(x; x + \Delta x)$, то

эта вероятность, след-но, приближенно равна произведению плотности вероятности в т. x на длину интервала Δx.

Конец