Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин на величины непрерывные.

♦ *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X, возможные значения которой x∈[a; b], называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$,

x – M (X) – есть отклонение величины X.

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т.е. существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$

♦ *Дисперсией непрерывной случайной величины* называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X Є [a; b], то

$$D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

Если x Є [-∞; ∞], то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

♦ *Среднее квадратическое отклонение* непрерывной случайной величины определяется, как и для дискретных величин, равенством:

$$\sigma (X) = \sqrt{D (X)} .$$

Замечание 1. Можно доказать, что св-ва мат. ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Пример. Найти мат. ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной ф-ей распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ x & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдем мат. ожидание:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - [1/2]^2 = x^3/3 \Big|_0^1 - 1/4 = 1/12.$$

Нормальное распределение

Нормальным называется распределение вероятностей непр. случ. величины, кот. определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)2/2\sigma 2}.$$

Норм. распределение опред-ся 2-мя параметрами **а** и **σ.**

Вероятностный смысл этих параметров таков:

а – есть математическое ожидание, а

σ – среднее квадратичное отклонение формального распределения.

Общим называют норм. распределение с произвольными параметрами **а и σ** (σ>0).

Нормированным называют норм. распр-ие с параметрами а=0 и σ=1. Напр., если

X – нормальная величина с параметрами а и σ, то

U = (X - a)/σ – нормированная нормальная величина, причем M(U)=0, σ(U)=1.

Плотность нормированного распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x2/2}.$$

Эта ф-ция фигурирует в локальной теореме **Лапласа** и затабулирована.

Локальная теорема Лапласа

При больших значениях **n** ф-ла Бернулли неудобна, и для приближенных вычислений используют локальную теорему Лапласа:

«Вероятность того, что в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, событие А наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } \varphi(x)= \frac{k-np}{\sqrt{2\pi}} e^{-x2/2}, \quad \mathbf{x}= \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Ф-ла тем точнее, чем больше n.

Ф-ция φ(x) затабулирована и ее таблица для положительных **x** приводится в приложениях учебных пособий. Т.к. ф-ия φ(x) четная, то для отрицательных значений **x** можно воспользоваться формулой $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, событие А наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-Z2/2} \cdot dz \text{ – ф-ия Лапласа,}$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad k_2 > k_1.$$

$\Phi(-x) = \Phi(x)$,

для $x>5$ $\Phi(x)=0,5$.

Спасибо

за

внимание!

Нормальная кривая

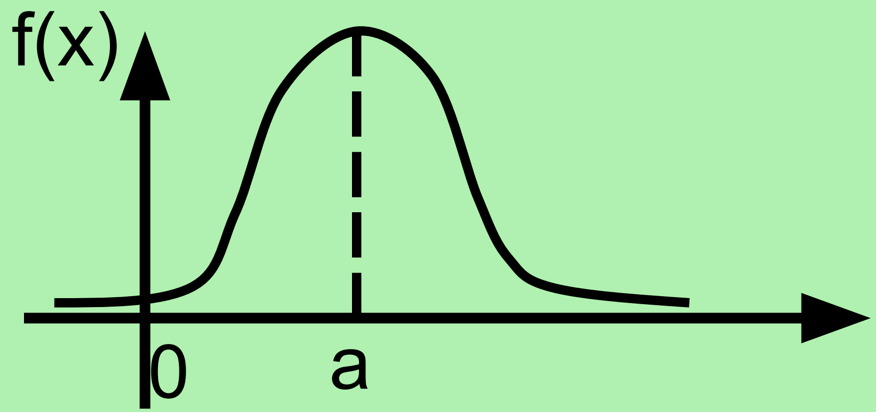
График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса).

Исследуем ф-ию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Методом дифференциального исчисления.

1. Очевидно, ф-ия определена на всей оси x.



2. $y > 0$, т.е. кривая расположена над осью x.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$, т.е. $y=0$ – ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика.

4. Исследуем ф-ию на экстремум.

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Легко видеть, что $y'=0$ при $x=a$, $y'>0$ при $x<a$ и $y'<0$ при $x>a$. Согласно достаточному условию экстремума при $x=a$ ф-ия имеет максимум:

$$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

5. Разность x-a содержится в аналитическом выражении ф-ии в квадрате, т.е. график симметричен относительно прямой x=a.

6. Исследуем ф-ию на точки перегиба (где график меняет характер выпуклости)

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)2/2\sigma 2}\cdot\left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

y''=0 при x=a±σ, а при переходе через эти точки 2-ая производная меняет знак (в обеих этих точках значение ф-ии равно

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi^{e}}}$$

Таким образом, точки графика

$$\left(a-\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi^{e}}}\right) \text{ и } \left(a+\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi^{e}}}\right)$$

являются точками перегиба.

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

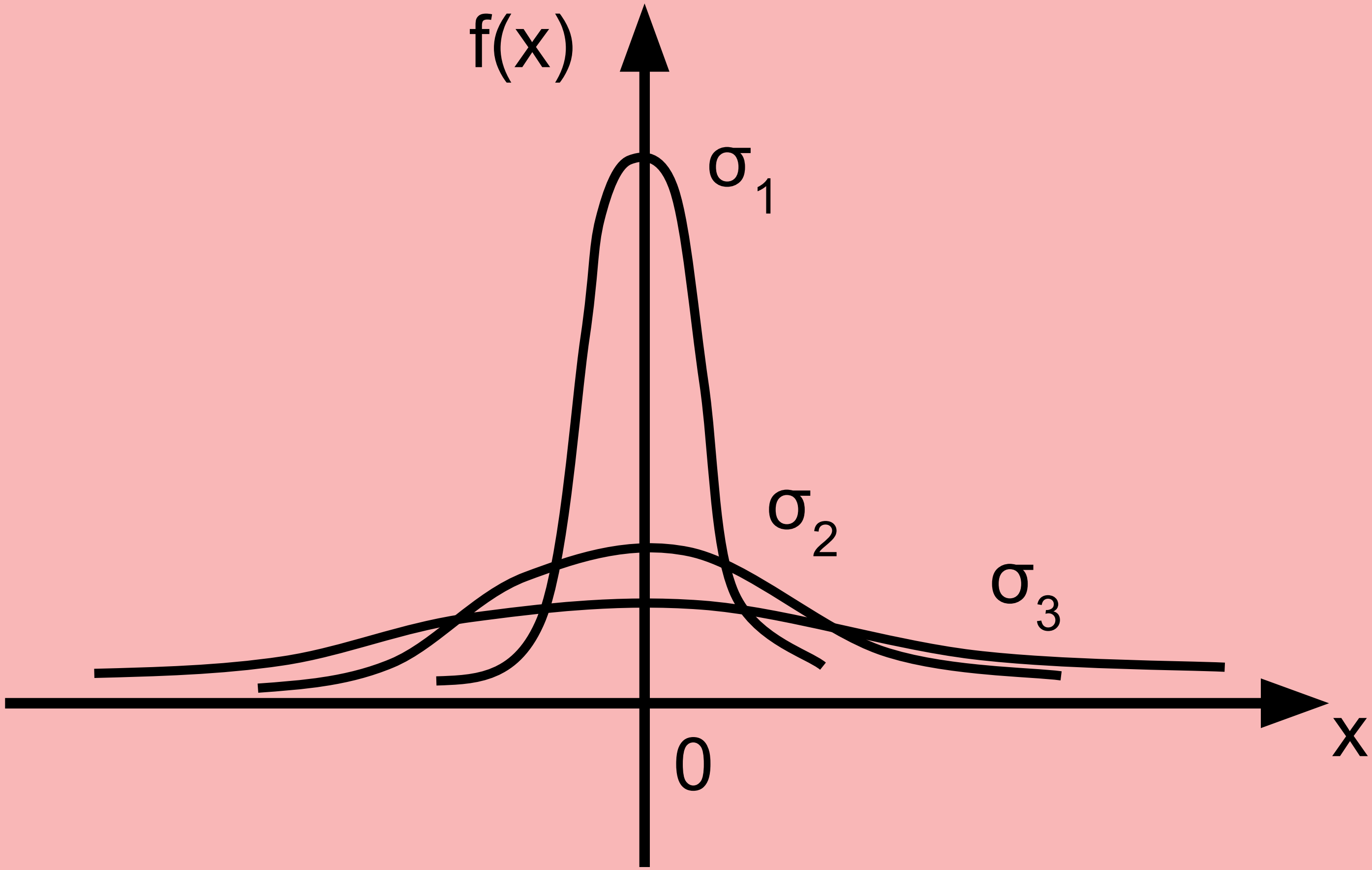
Известно, что график f(x-a) получается параллельным переносом графика f(x) на a единиц масштаба вправо, если a>0.

Отсюда следует, что изменение величины параметра а (матем. ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси Ox: вправо, если «а» возрастает, и влево, если «а» убывает. Иное дело с σ. Максимум нормальной кривой распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Отсюда следует, что с возрастанием σ максимум убывает, а сама кривая становиться более пологой, т.е. сжимается к оси Ох; при убывании σ нормальная кривая становиться более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси Оу.

Важно заметить, что при любых значениях а и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью х остается равной 1.

(В частности при $\sigma \to 0$ получаем одно из определений дельта-функции Дирака).



$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3;$ $a=0.$

($\sigma_1 \approx 1$ ⇨ кривую называют нормированной).

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Как известно

$$P\ (\alpha<X<\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$ – вероятность того, что случайная величина X примет значения из (α; β).

Пусть X – нормальная величина. Тогда

$$P\ (\alpha<X<\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Чтобы пользоваться готовыми таблицами, преобразуем эту формулу:

$$P\ (\alpha<X<\beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

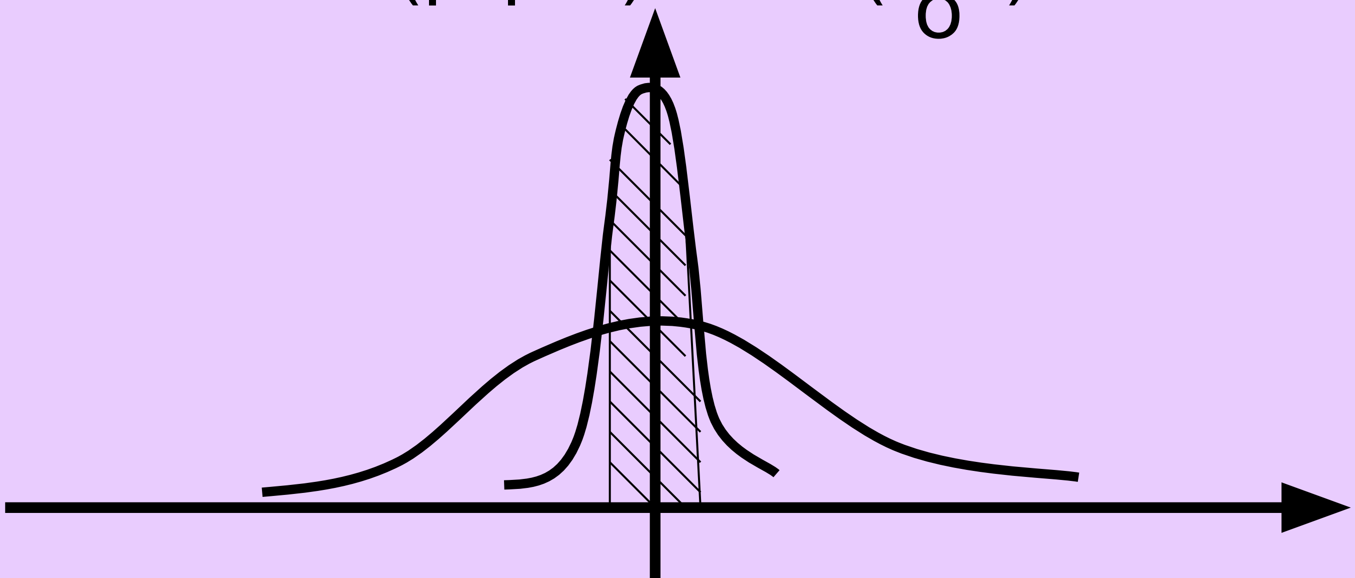
Вычисления вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность то, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т.е. требуется найти вероятность осуществления неравенства $|X-a|<\delta$.

$$P\,(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, при a=0

$$P(|X|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$



Т.е. чем меньше σ (рассеяние нормальной случайной величины вокруг ее мат. ожидания), тем больше вероятность принять значение, принадлежащее интервалу (-δ; δ).

Правило трех сигм

В ф-ле $P(|X-a|<\delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$ положим $\delta=\sigma\cdot t$, тогда

$$P(|X-a|<\sigma t) = 2\Phi(t).$$ Если $t = 3$ и, следовательно, $\boxed{\sigma t = 3\sigma}$, то

$$P(|X-a|<3\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = \boxed{0{,}9973},$$

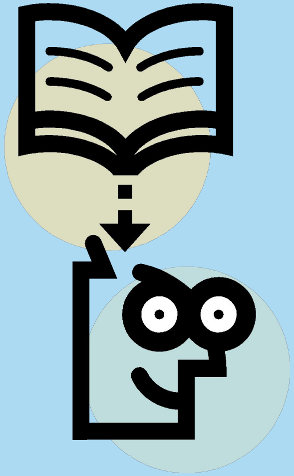
т.е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратичное отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Т.е. в 0,27% случаев так может произойти. Такие события можно считать практически невозможными.

Правило 3-х сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике, если распределение неизвестно, но выполняется условие в правиле 3-х сигм, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально.

В противном случае она не распределена нормально.




Запомнил?
Отдыхай!