

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.1

4.1 Определение и классификация сигналов

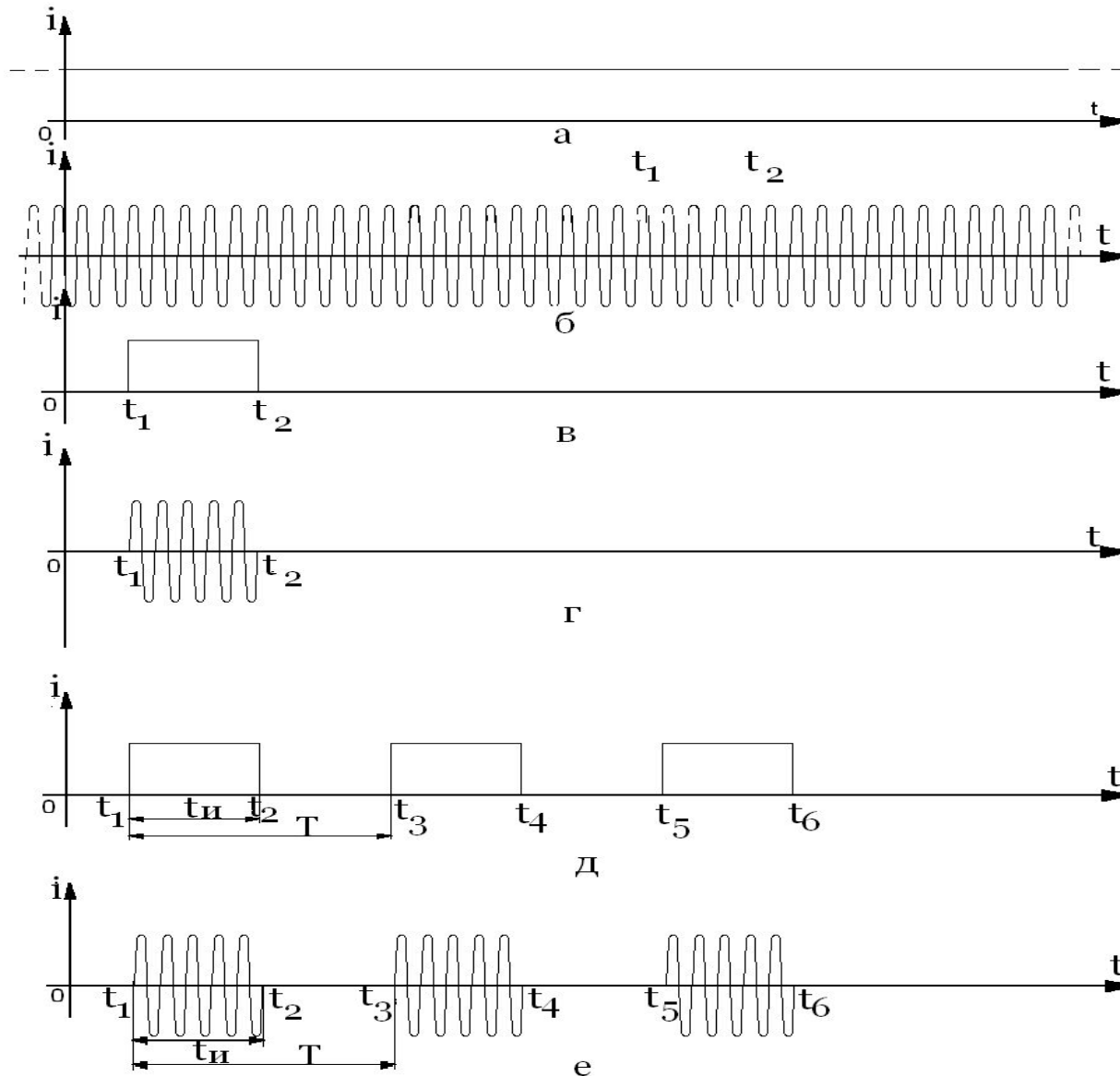


Рис. 4.1

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.2
4.2 Периодические сигналы

Форм. 4.1

$$s(t) \stackrel{2\pi}{=} A \cos(\omega_1 t - \psi) = A \cos(\omega_1 t - \psi)$$

Форм. 4.2

$$s(t) = A \operatorname{Re}[e^{j(\omega_1 t - \psi)}] = \frac{1}{2} A e^{j(\omega_1 t - \psi)} + \frac{1}{2} A e^{-j(\omega_1 t - \psi)}$$

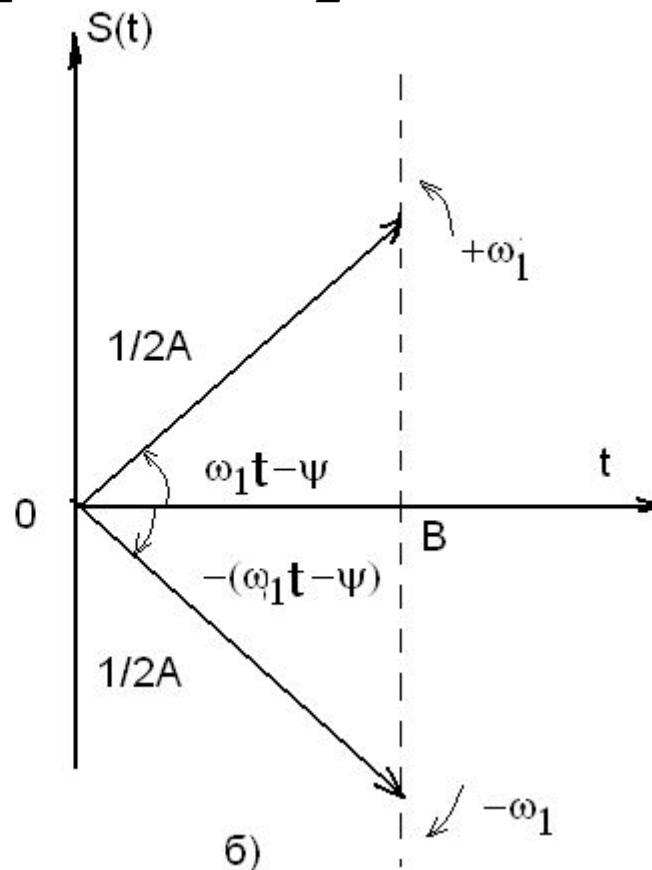
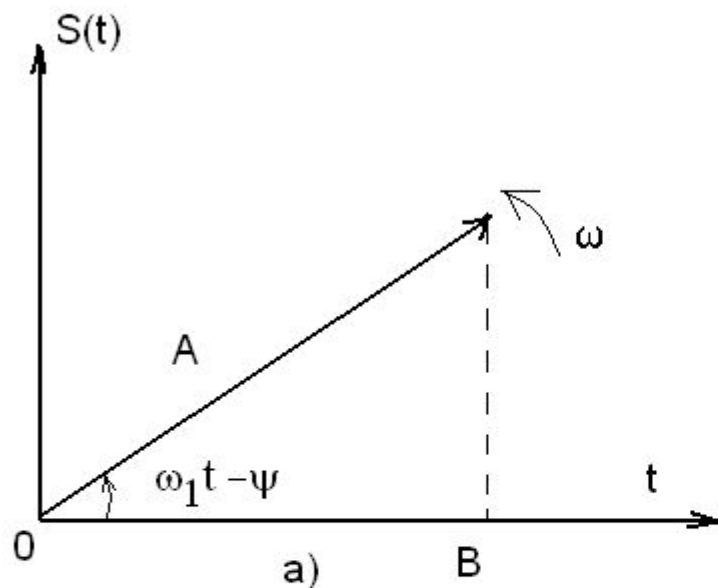


Рис. 4.2

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.3
4.2 Периодические сигналы

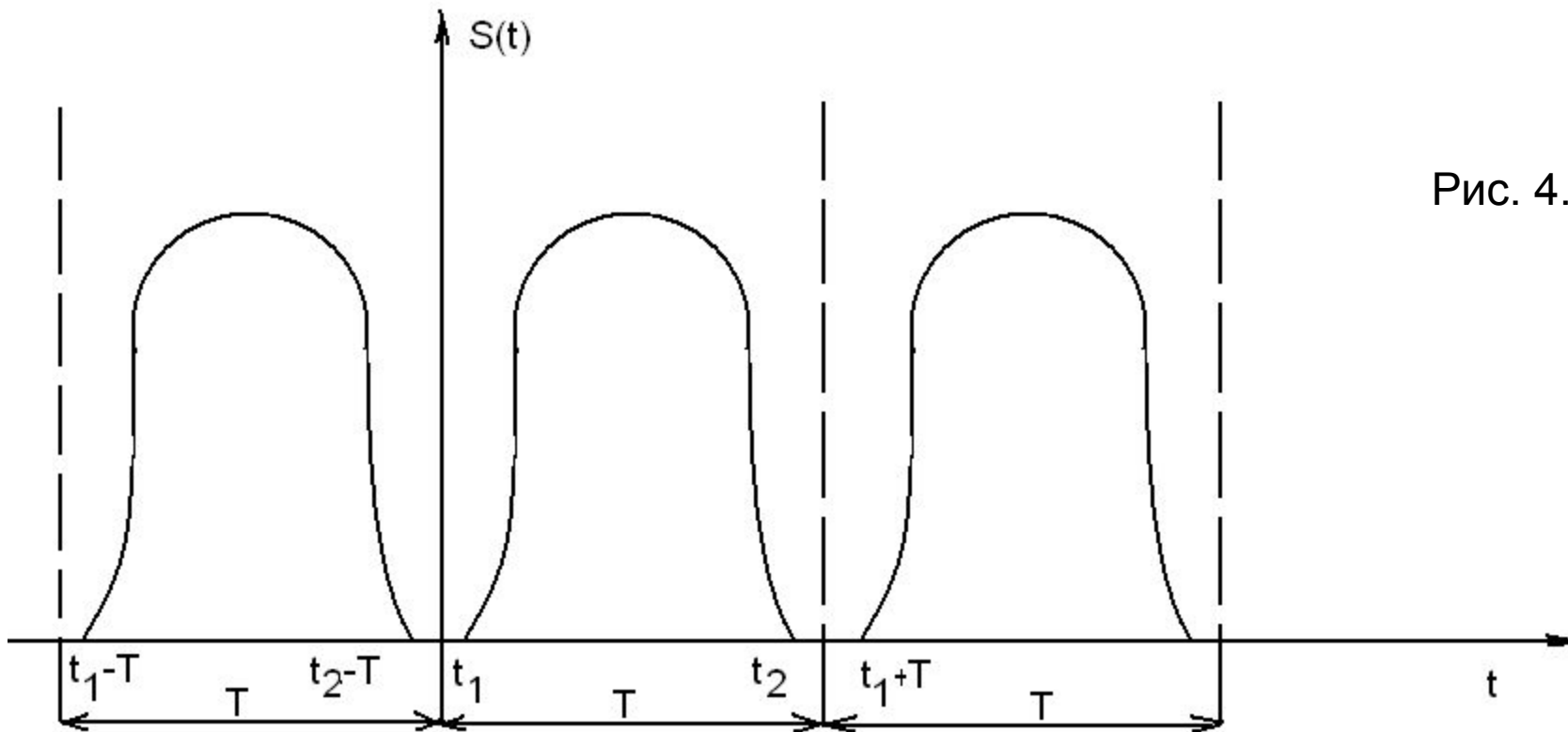


Рис. 4.3

Форм. 4.3

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n),$$

Форм. 4.4

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n e^{j(n\omega_1 t - \psi_n)} + A_n^* e^{-j(n\omega_1 t - \psi_n)}) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_1 t}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.4

4.2 Периодические сигналы

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt, \quad \text{Форм. 4.5}$$

$$\frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad \text{Форм. 4.6}$$

$$\frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad \text{Форм. 4.7}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{Форм. 4.8}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.5

4.2 Периодические сигналы

$$\frac{b_n}{a_n} \psi_n = \operatorname{arctg} \quad \text{—} \quad \text{Форм. 4.9}$$

$$\left. \begin{aligned} A_n - A_n e^{-j\psi_n} &= a_n - jb_n \\ A_{-n} &= A_n e^{j\psi_n} = a_n + jb_n \end{aligned} \right\} \quad \text{Форм. 4.10}$$

$$\frac{A_n}{A_n^2} \cdot A_{-n} = (a_n - jb_n) \cdot (a_n + jb_n) = a_n^2 + b_n^2 = \quad \text{Форм. 4.11}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{Форм. 4.12}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.6

4.2 Периодические сигналы

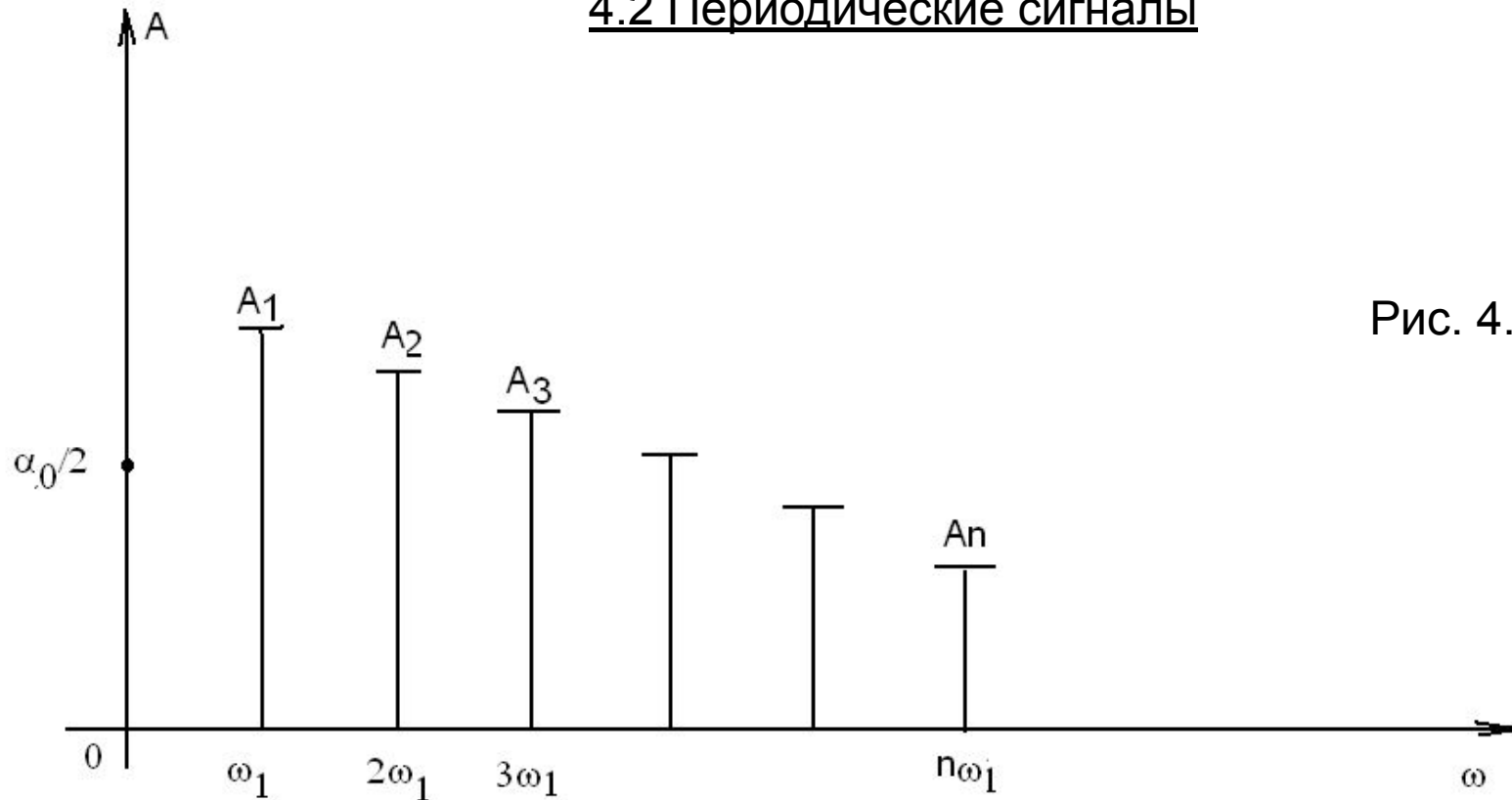


Рис. 4.4

$$\tilde{K}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

Форм. 4.13

$$e(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

Форм. 4.14

$$\text{Форм. 4.15 } \omega(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n U_K(n \cdot \omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{jn\omega_1 t}$$

4.3 Спектры некоторых периодических сигналов

4.3.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

$$E_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^{\tau_u} E dt = \frac{\tau_u}{T} E$$

Форм. 4.16

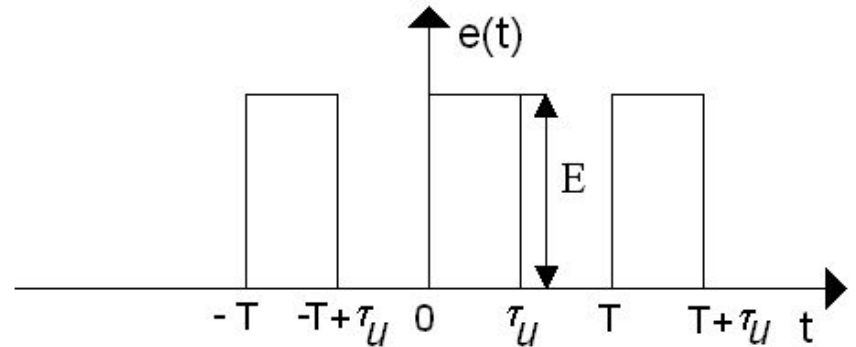
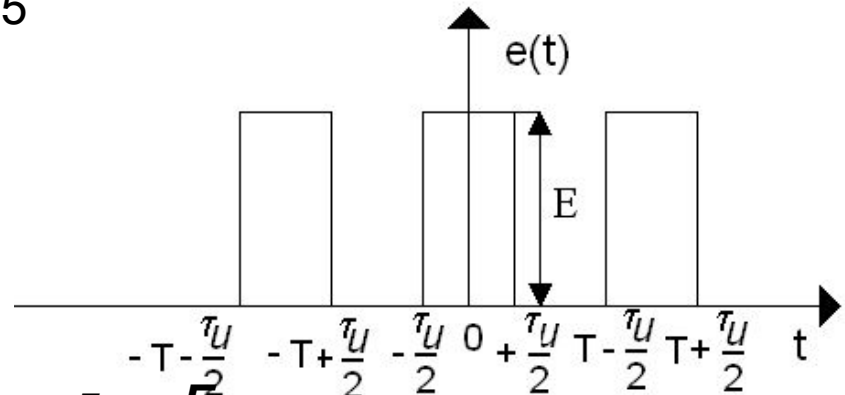


Рис. 4.5



$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau_u} E \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \frac{E}{n\omega_1} [-\sin n\omega_1 t]_0^{\tau_u} = \frac{E}{\pi n} \sin n\omega_1 \tau_u$$

Форм. 4.17

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau_u} E \sin n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \frac{E}{n\omega_1} [-\cos n\omega_1 t]_0^{\tau_u} = \frac{E}{\pi n} (1 - \cos n\omega_1 \tau_u)$$

Форм. 4.18

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.8

4.3 Спектры некоторых периодических сигналов

4.3.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

$$A_n = \frac{E}{\pi n} \sqrt{(\sin n\omega_1\tau_u)^2 + (1 - \cos n\omega_1\tau_u)^2} = \frac{E}{\pi n} \sqrt{2(1 - \cos n\omega_1\tau_u)} = \frac{2E}{\pi n} \left| \sin \frac{n\omega_1\tau_u}{2} \right|$$

Форм. 4.19

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos n\omega_1\tau_u}{\sin n\omega_1\tau_u} = \frac{n\omega_1\tau_u}{2}$$

Форм. 4.20

$$e(t) = E \left[\frac{\tau_u}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\omega_1\tau_u}{2}}{n} \cdot \cos(n\omega_1 t - \psi_n) \right]$$

Форм. 4.21

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.9

4.3 Спектры некоторых периодических сигналов

4.3.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

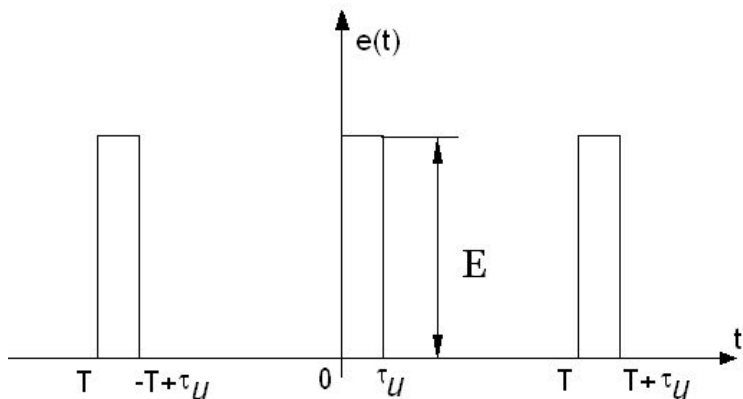
$$\left. \begin{aligned} a_n = A_n &= \frac{E}{\pi n} \left[\sin n\omega_1 t \right]_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} = \frac{2E}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau_u}{2} \\ b_n &= \frac{E}{\pi n} \left[\cos n\omega_1 t \right]_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{Форм. 4.22}$$

$$e(t) = E \left[\frac{\tau_u}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega_1 \tau_u / 2}{n} \cdot \cos n\omega_1 t \right] \quad \text{Форм. 4.23}$$

4.3 Спектры некоторых периодических сигналов

4.3.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

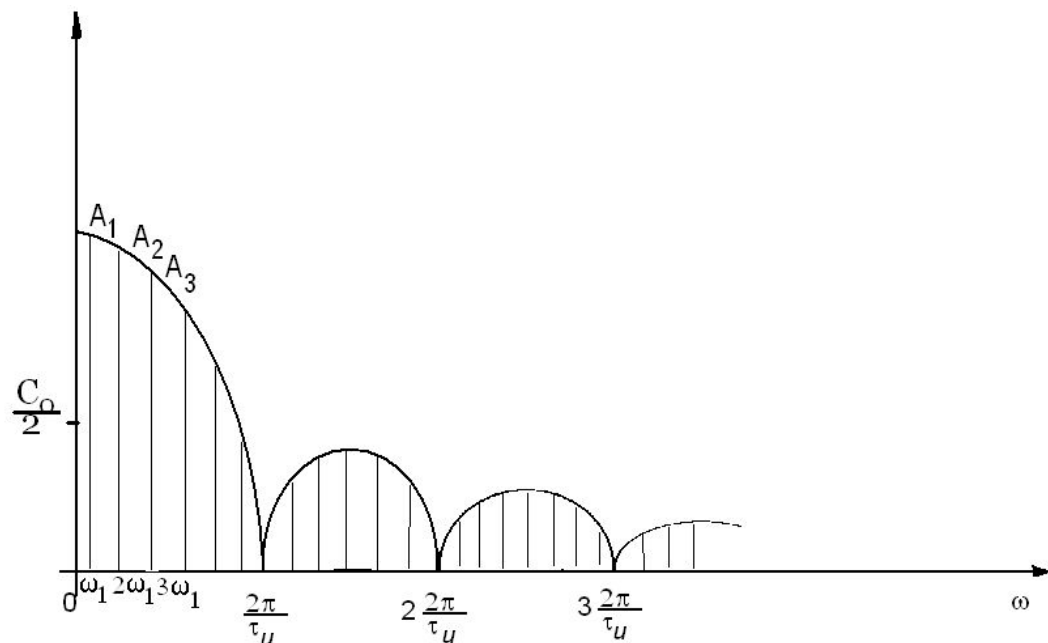
Рис. 4.6



$$A_n = \frac{2E}{\pi n} \sin \left(n\pi \cdot \frac{\tau_u}{T} \right)$$

Форм. 4.25

Рис. 4.7



$$\sin \left(n\pi \cdot \frac{\tau_u}{T} \right) = n\pi \frac{\tau_u}{T}$$

$$\frac{2E}{\pi n} \cdot \frac{n\pi \tau_u}{T} \approx \frac{2\tau_u}{T} \cdot \frac{E}{2} = E$$

Форм. 4.27

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.11

4.3 Спектры некоторых периодических сигналов

4.3.2 Последовательность пилообразных импульсов

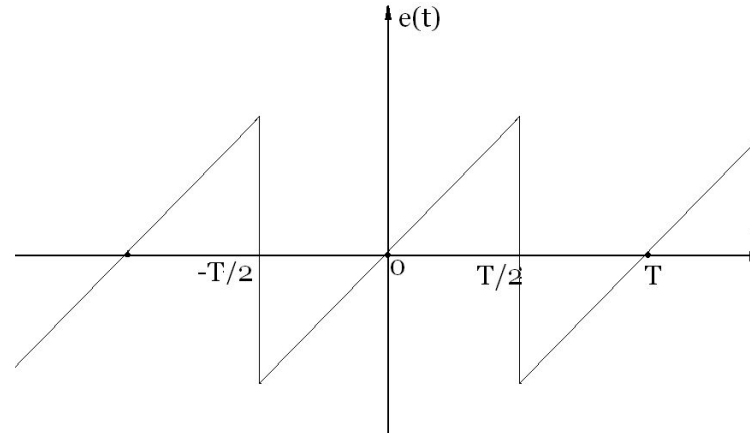


Рис. 4.8

$$e(t) = 2E \left(\sin \omega_1 t \frac{1}{2} - \sin 2\omega_1 t \frac{1}{3} + \sin 3\omega_1 t \frac{1}{4} - \sin 4\omega_1 t + \dots \right)$$

Форм. 4.28

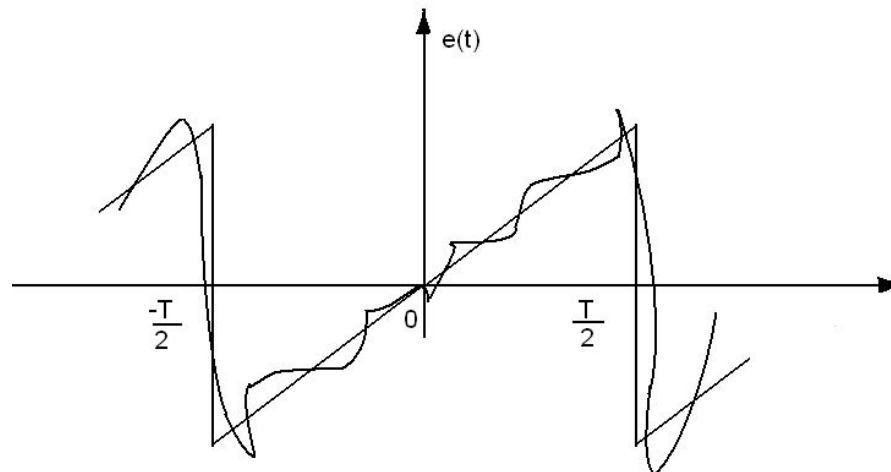


Рис. 4.9

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.12

4.4 Распределение мощности в спектре периодического сигнала

$$\bar{s}^2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

Форм. 4.29

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

Форм. 4.30

$$\bar{s}^2(t) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = s_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2$$

Форм. 4.31

$$\bar{s}^2(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \cdot s_{-n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2$$

Форм. 4.32

$$P = r \bar{l}^2(t) = r \left[l_0^2 + \frac{l_1^2}{2} + \frac{l_2^2}{2} + \dots \right]$$

Форм. 4.33

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.13

4.5 Непериодические сигналы

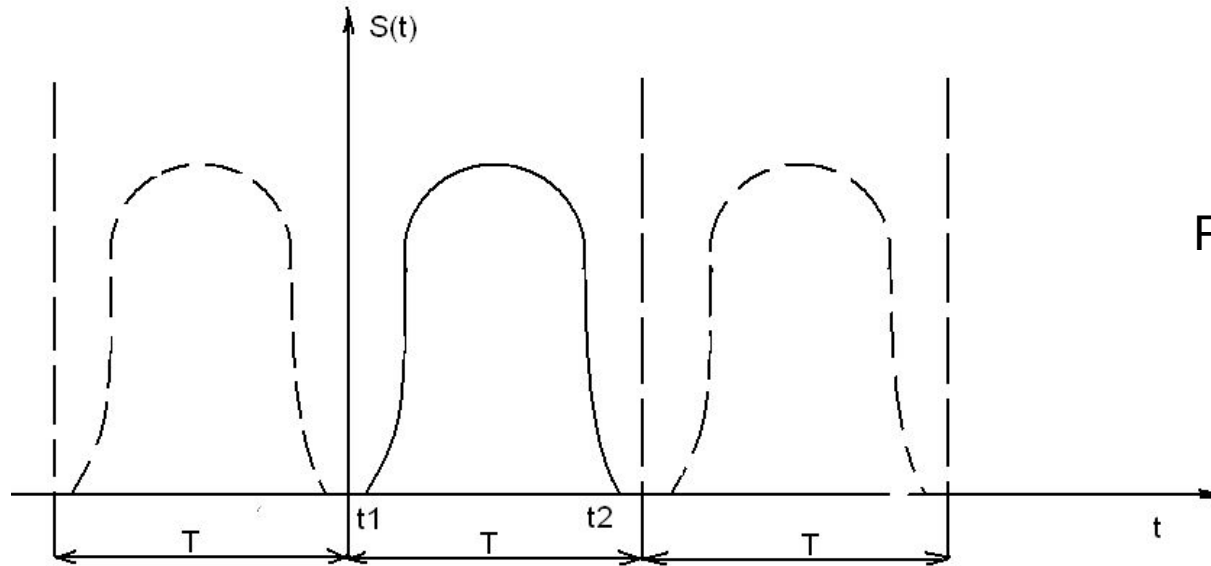


Рис. 4.9

$$A_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) [\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t] dt = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{Форм. 4.34}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} \quad \text{Форм. 4.35}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \quad \text{Форм. 4.36}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.14

4.5 Непериодические сигналы

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Форм. 4.37

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Форм. 4.38

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

Форм. 4.39

$$s(\omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Форм. 4.40

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Форм. 4.41

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Форм. 4.42

$$2S(\omega_n) = T A_n = A_n / f_1$$

Форм. 4.43

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.15

4.5 Непериодические сигналы

$$S(\omega_n) = \frac{T}{2} A_n = \frac{\Pi}{\omega_1}$$

Форм. 4.44

$$S(\omega) = TA_0 = \frac{2\pi}{\omega_1} A_0 = \frac{(\omega)}{S(\omega)} = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega)e^{-j\psi}$$

Форм. 4.45

Форм. 4.46

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt,$$

Форм. 4.47

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$$

Форм. 4.48

$$S(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

Форм. 4.49

$$\psi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

Форм. 4.50

4.5 Непериодические сигналы

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t - \psi) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t - \psi) d\omega. \quad \text{Форм. 4.51}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dS(\omega) \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(d\omega) \cos(\omega t - \psi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(d\omega) \sin(\omega t - \psi)$$

Форм. 4.52

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Форм. 4.53

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Форм. 4.54

$$E(\omega) = E(\omega) e^{-j\omega t}$$

Форм. 4.55

$$U(\omega) = E(\omega) K(\omega) = E(\omega) \cdot K(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Форм. 4.56

$$K(\omega) = K(\omega) e^{j\varphi}$$

Форм. 4.57

4.6 Свойства преобразования Фурье

4.6.1 Сдвиг сигналов во времени

$$s_2(t) = s_1(t - t_0)$$

Форм. 4.58

$$S(\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Форм. 4.59

$$S(\omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} S_1(\omega)$$

Форм. 4.60

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot K(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot K_0 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = K_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

Форм. 4.61

$$s_{\text{вых}}(t) = K_0 \cdot s(t - t_0)$$

Форм. 4.62

$d\phi$

$$t_0 = \frac{d\phi}{d\omega}$$

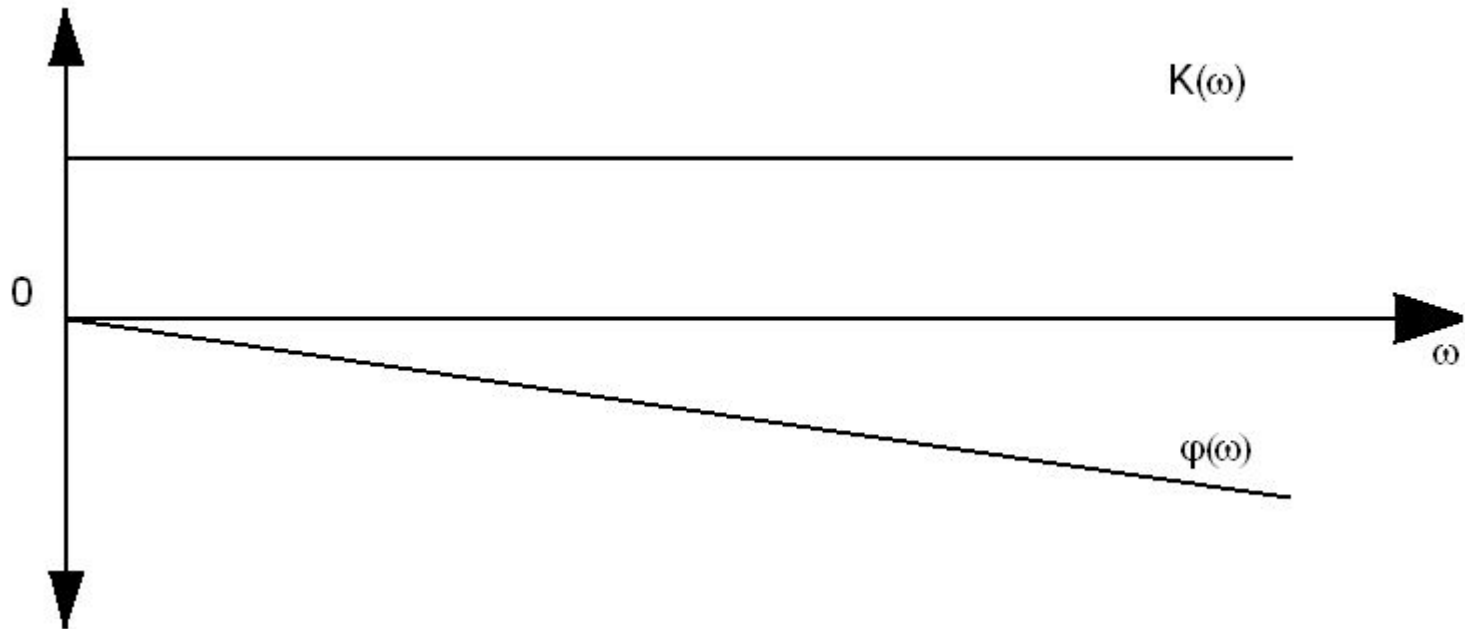
Форм. 4.63

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.18

4.6 Свойства преобразования Фурье

4.6.1 Сдвиг сигналов во времени

Рис. 4.10



Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.19
4.6.2 Изменение масштаба времени

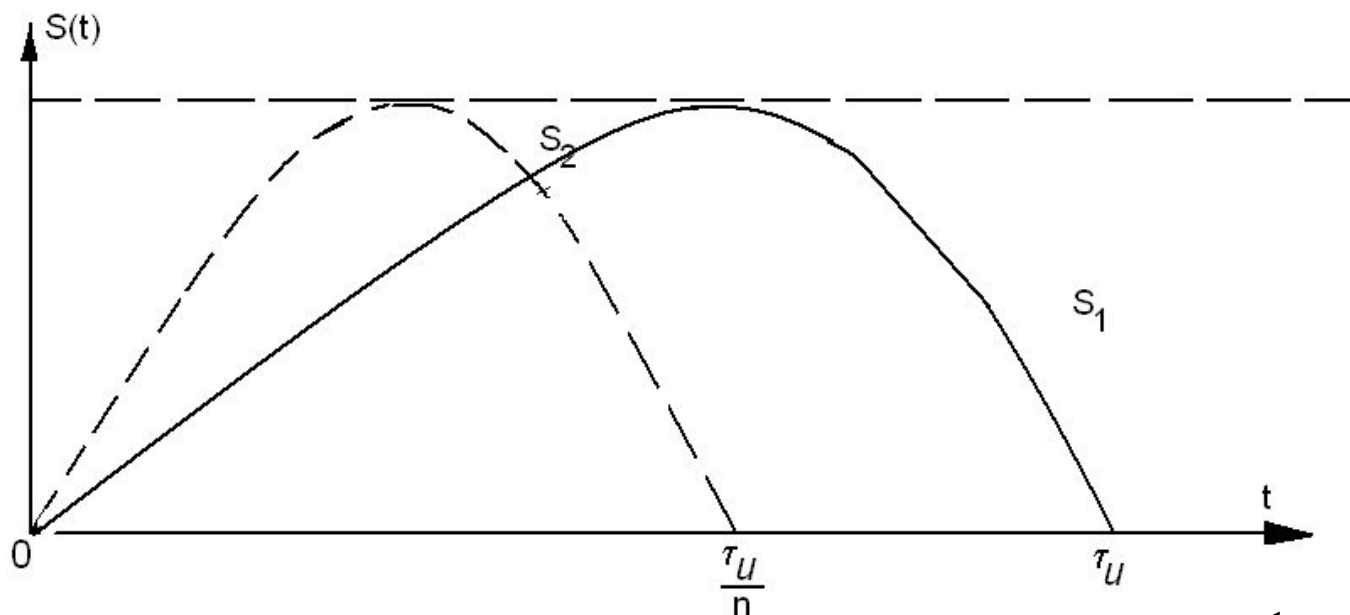


Рис. 4.11

$$s_2(t) = s_1(nt), n > 1$$

Форм. 4.64

$$S_2(\omega) = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

Форм. 4.65

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.20

4.6.3 Смещение спектра сигнала

$$S(t) = \cos(\omega_0 t + \psi_0) \quad \text{Форм. 4.66}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi_0) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} [e^{j\psi_0} S(\omega - \omega_0) + e^{-j\psi_0} S(\omega + \omega_0)],$$

Форм. 4.67

4.6.4 Дифференцирование и интегрирование сигналов

$$S_2(t) = \frac{d}{dt} S_1(t) \quad \text{Форм. 4.68}$$

$$s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega), \quad \frac{ds_1(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega S_1(\omega) \quad \text{Форм. 4.69}$$

$$S_2(t) = \int_{-\infty}^t S_1(x) dx$$

Форм. 4.70

$$S_1(\omega) \quad S_2(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Форм. 4.71

4.6.5 Сложение сигналов

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots$$

Форм. 4.72

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \dots$$

Форм. 4.73

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.21

4.6.6 Произведение сигналов

$$f(t) \div F(\omega); g(t) \div G(\omega)$$

Форм. 4.74

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) F(\omega - x) dx$$

Форм. 4.75

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t - y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y)g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Форм. 4.76

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.22

4.7 Спектры непериодических сигналов

4.7.1 Сигнал в виде единичного скачка

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= 1 \text{ при } t > 0 \\ s(t) &= 0 \text{ при } t \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{Форм. 4.77}$$

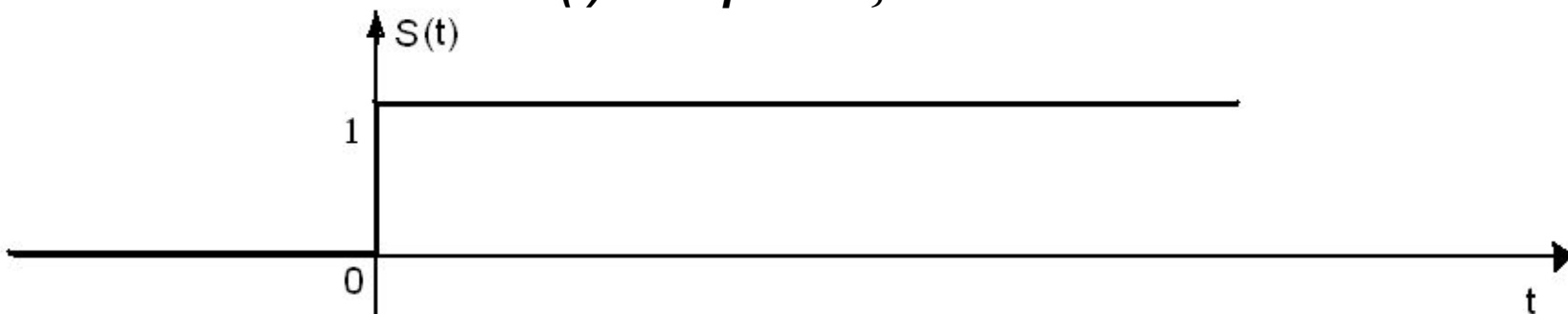


Рис. 4.12

$$S(t) = S(t)e^{-\alpha t}$$

Форм. 4.78

$$S(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{c+j\omega} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}$$

Форм. 4.79

$$\frac{1}{\omega} S(\omega) = -\frac{\pi}{2} \psi(\omega) = \dots$$

Форм. 4.80

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.23

4.7.1 Сигнал в виде единичного скачка

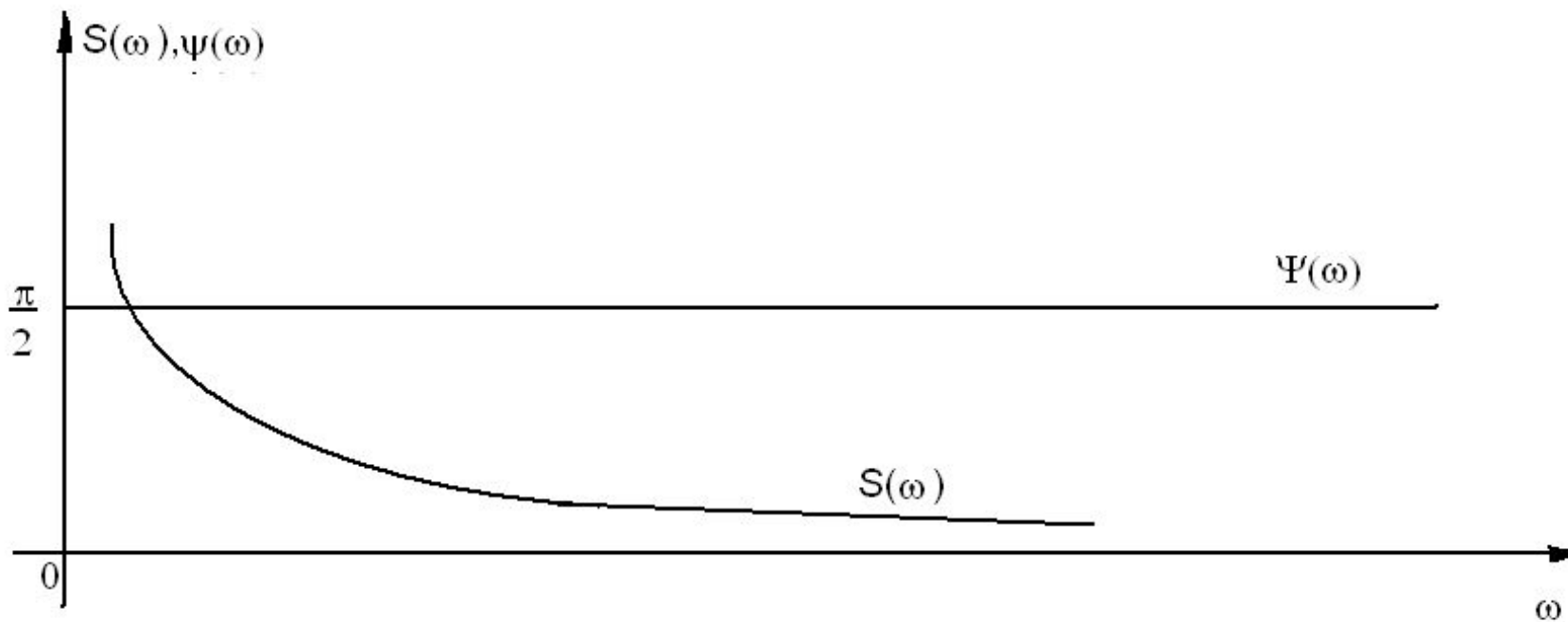


Рис. 4.13

4.7.2 Прямоугольный импульс

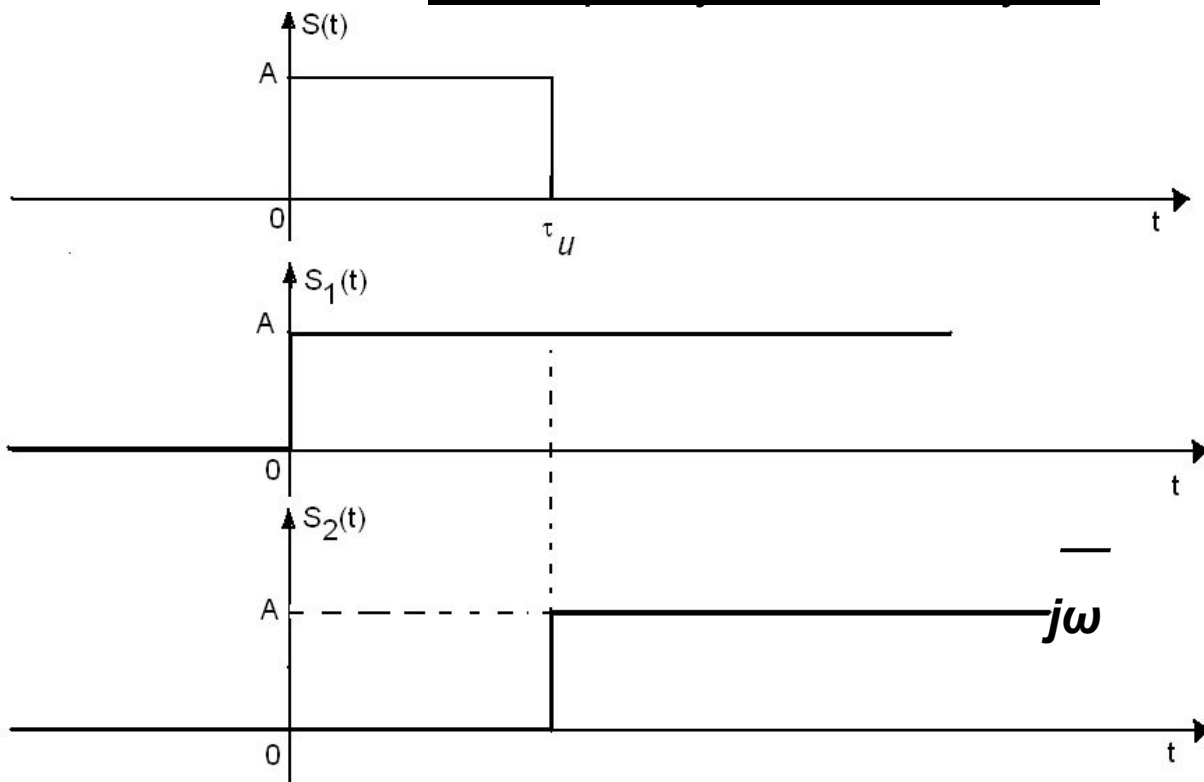


Рис. 4.14

$$S_1(\omega) = \frac{A}{j\omega}$$

Форм. 4.81

$$S_2(\omega) = S_1(\omega) e^{-j\omega\tau_u} = \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega\tau_u}$$

Форм. 4.82

$$S(\omega) = S_1(\omega) - S_2(\omega) = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_u})$$

Форм. 4.83

$$S(\omega) = \frac{A}{\omega} \sqrt{(1 - \cos \omega\tau_u)^2 + \sin^2 \omega\tau_u} = \left| \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_u}{2} \right| = A\tau_u \frac{|\sin \omega\tau_u / 2|}{\omega\tau_u / 2}$$

Форм. 4.84

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.25

4.7.2 Прямоугольный импульс

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \tau_u / 2}{\omega \tau_u / 2} = 1 \quad \text{Форм. 4.85}$$

$$\dot{S}(0) = A \tau_u \quad \text{Форм. 4.86}$$

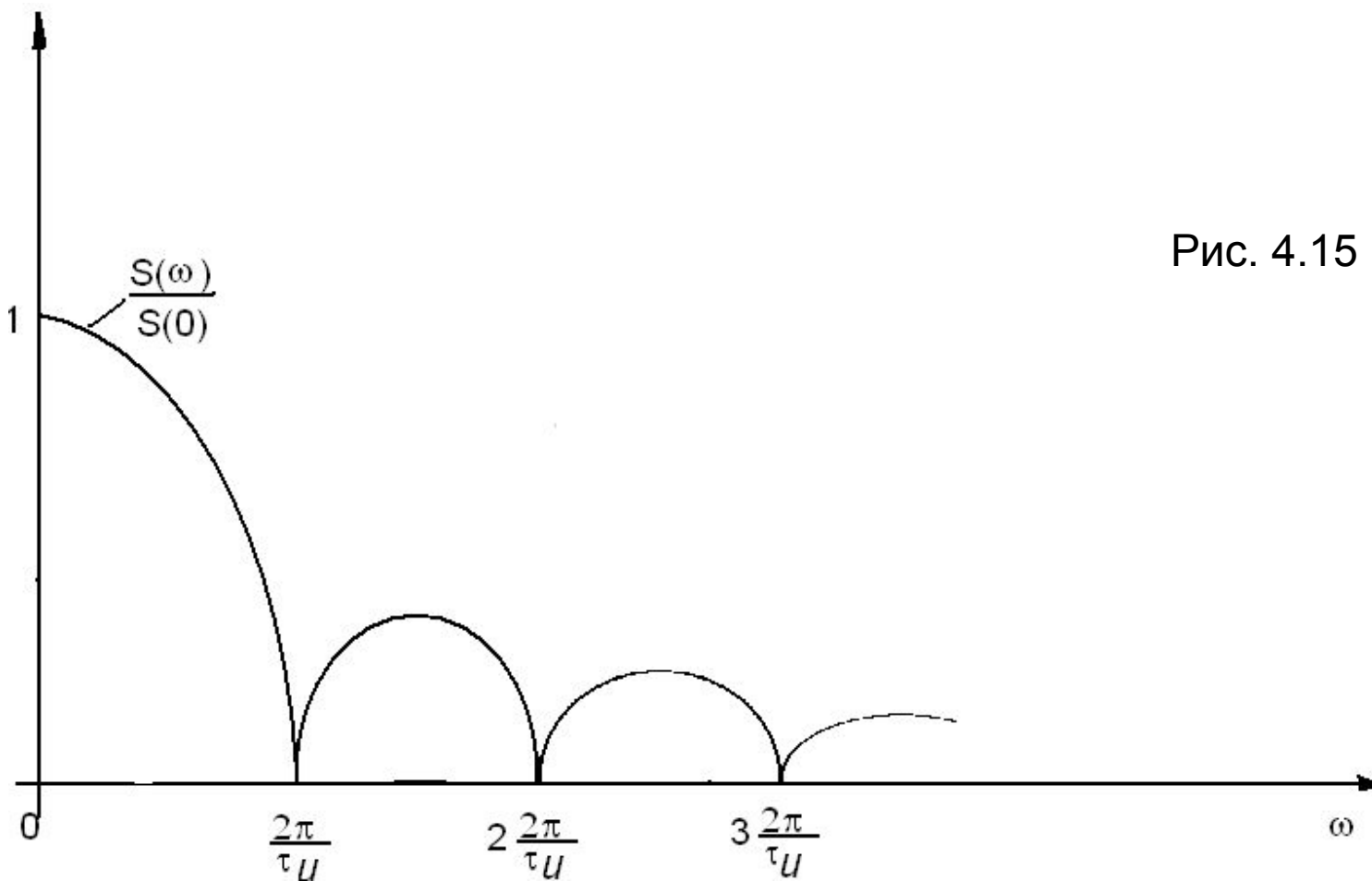


Рис. 4.15

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.26

4.7.2 Прямоугольный импульс

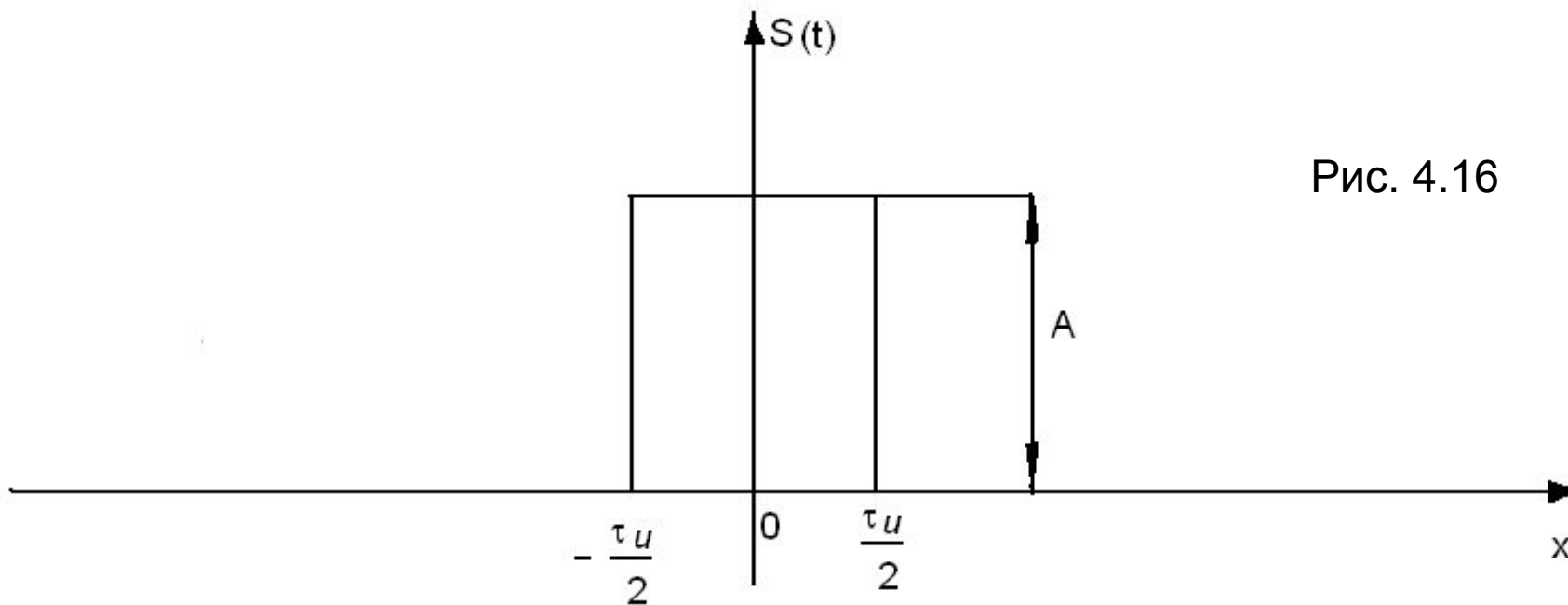


Рис. 4.16

$$S(\omega) = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau_u/2} - e^{-j\omega\tau_u}) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_u}{2} = A\tau_u \left[\frac{\sin \omega\tau_u/2}{\omega\tau_u/2} \right]$$

Форм. 4.87

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.27
4.7.3 Бесконечно короткий импульс с единичной площадью (дельта-функция)

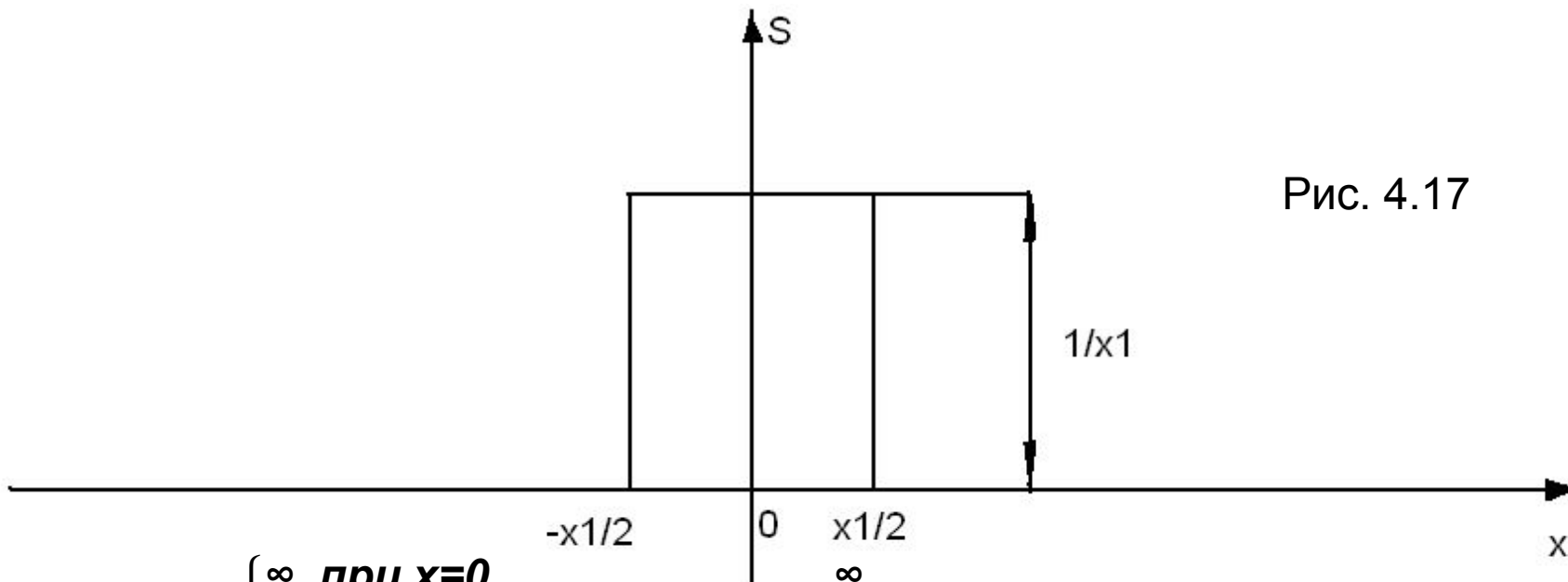


Рис. 4.17

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x=0 \\ 0, & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

Форм. 4.88

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \text{площадь импульса} = 1.$$

Форм. 4.89

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x=x_0 \\ 0, & \text{при } x \neq x_0, \end{cases}$$

Форм. 4.90

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

Форм. 4.91

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.28

4.7.3 Бесконечно короткий импульс с единичной площадью (дельта-функция)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad \text{Форм. 4.92}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-j\omega t_0} \quad \text{Форм. 4.93}$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\omega t_0} \quad \text{Форм. 4.94}$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \quad \text{Форм. 4.95}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.29

4.7.4 Распределение энергии в спектре непериодического процесса

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad \text{Форм. 4.96}$$

$$\bar{S}_{nep}^2(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^2 \quad \text{Форм. 4.97}$$

$$E = T \cdot \overline{S_{nep}^2(t)} \quad T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \rightarrow \frac{1}{2\pi} d\omega \quad n \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega$$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \bar{S}_{nep}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega \quad \text{Форм. 4.98}$$

Равенство Парсеваля.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s_{вых}(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [S(\omega)]^2 d\omega, \quad \text{Форм. 4.99}$$

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.30

4.7.4 Распределение энергии в спектре непериодического процесса

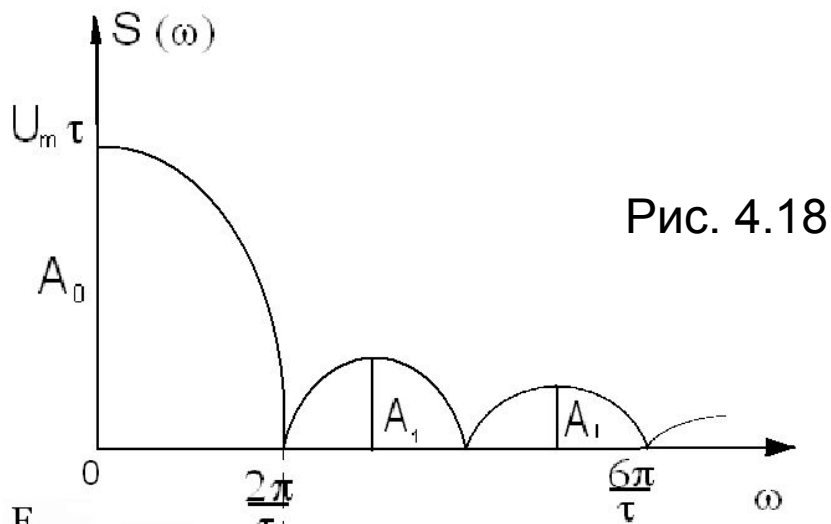


Рис. 4.18

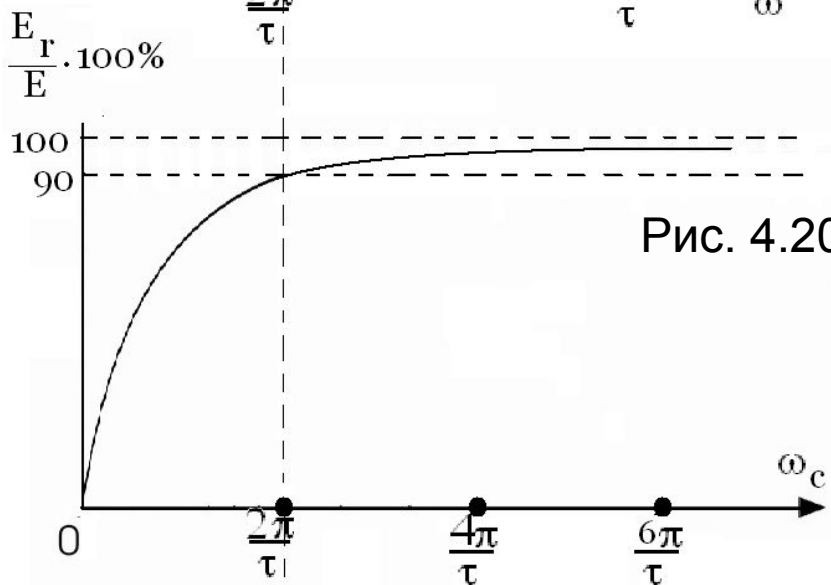
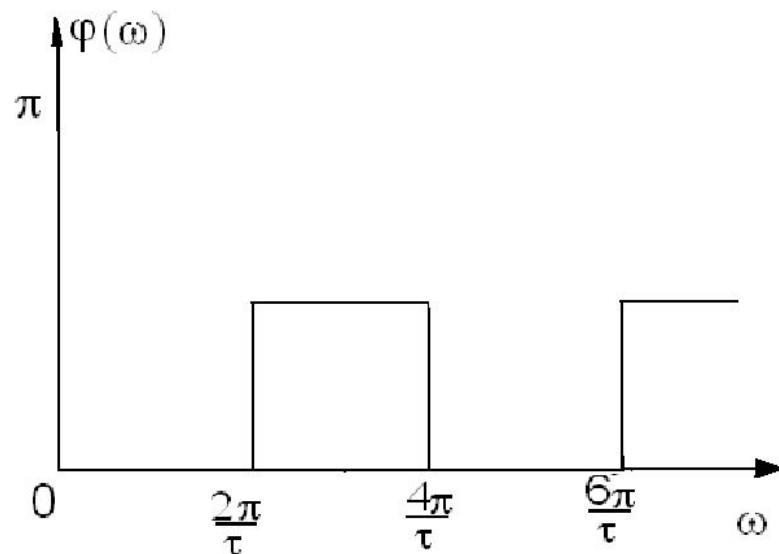


Рис. 4.20

1
 τ Форм. ~~4.190~~__

Рис. 4.19



Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.31

4.8 Случайные сигналы и их аналитическое описание

4.8.1 Одномерный закон распределения мгновенных значений случайной функции

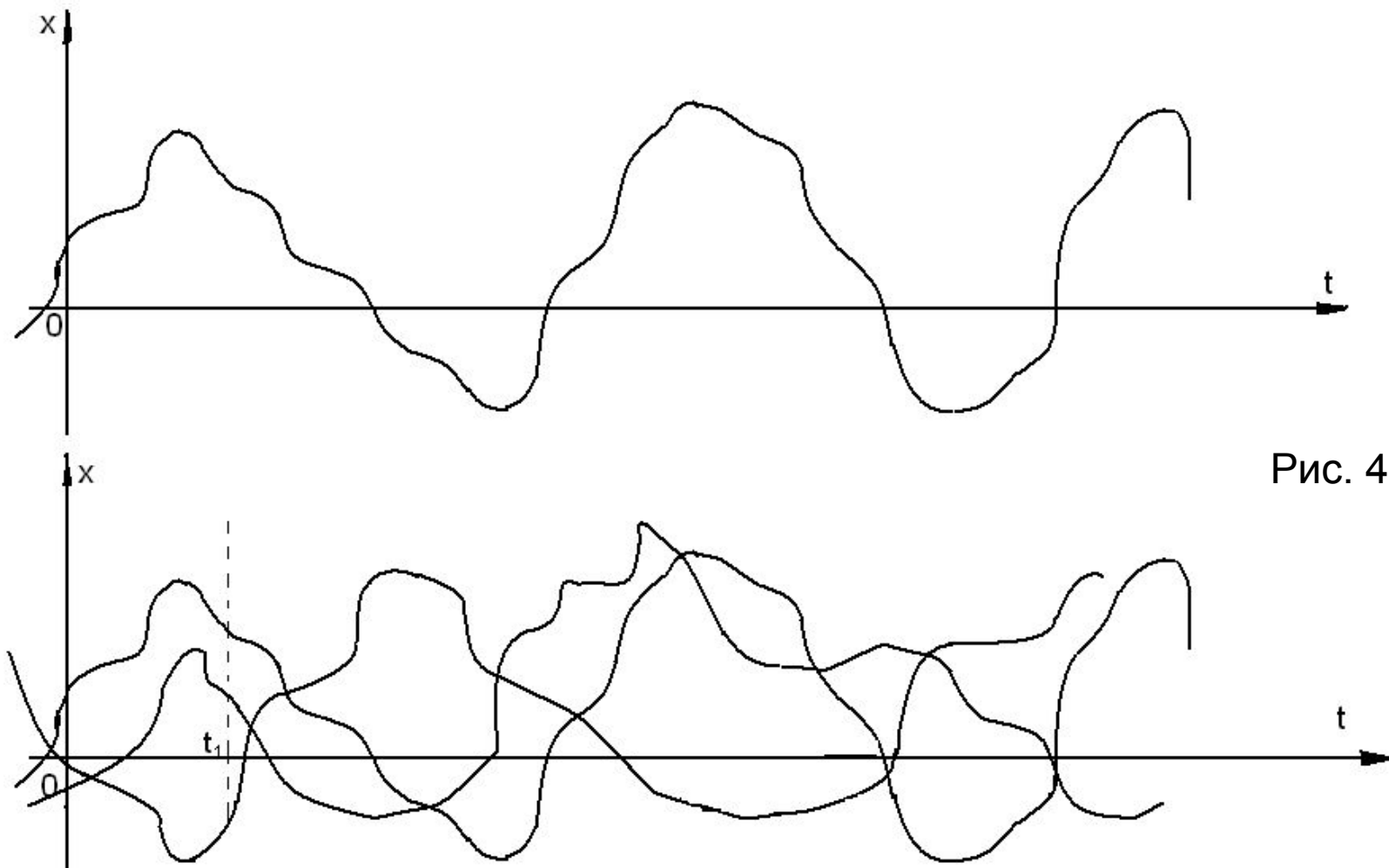


Рис. 4.21

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.32

4.8.1 Одномерный закон распределения мгновенных значений случайной функции

$$N \rightarrow \infty \quad P_N(x, t_1) = \frac{n}{N} \quad \text{Форм. 4.101}$$

$$P(x, t_1) \approx \frac{n}{N} \quad \text{Форм. 4.102}$$

$$p(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X(t_1) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad \text{Форм. 4.103}$$

Форм. 4.101

Форм. 4.102

Форм. 4.103

Форм. 4.104

$$P(x, t) = P(x), \quad p(x, t) = p(x). \quad \text{Форм. 4.105}$$

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad \text{Форм. 4.106}$$

$$m_x = \overline{X(t_1)} = M_1[X(t_1)] \quad \text{Форм. 4.107}$$

Форм. 4.105

Форм. 4.106

Форм. 4.107

$$m_x = \overline{M_1[X(t_1)]} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t_1) dx = M_2[X(t_1)] \quad \text{Форм. 4.108}$$

Форм. 4.109

$$\overline{M_2[X(t_1)]} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t_1) dx \quad \text{Форм. 4.110}$$

Форм. 4.110

$$X^0(t_1) = X(t_1) - \overline{X(t_1)}. \quad \text{Форм. 4.111}$$

Форм. 4.111

$$M[X(t_1) - \overline{X(t_1)}] = 0. \quad \text{Форм. 4.112}$$

Форм. 4.112

$$M_2[X^0(t_1)] = \sigma^2[X(t_1)] = \sigma_2(t_1) \quad \text{Форм. 4.113}$$

Форм. 4.113

$$\sigma^2(t_1) = \overline{M_2[X^0(t_1)]} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x^0, t_1) dx, \quad p(x^0, t_1) = p[x - \overline{X(t_1)}, t_1]. \quad \text{Форм. 4.114}$$

Форм. 4.114

Форм. 4.115

$$M_1[X] = M_1[t]; \quad M_2[X] = M_2[t]; \quad M_2[X^0] = \sigma^2(t) \quad \text{Форм. 4.116}$$

Форм. 4.116

4.8.2 Многомерный закон распределения мгновенных значений случайной функции

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$$

Форм. 4.117

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Форм. 4.118

$$K_x(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; t) dx = M[X^2(t)]$$

Форм. 4.119

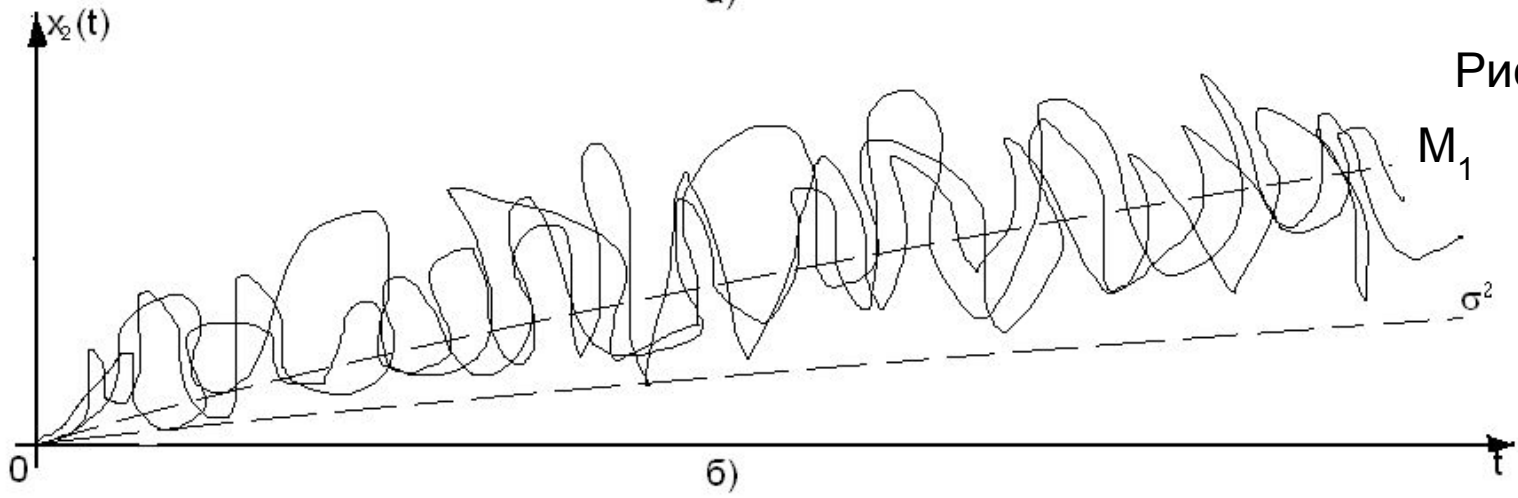
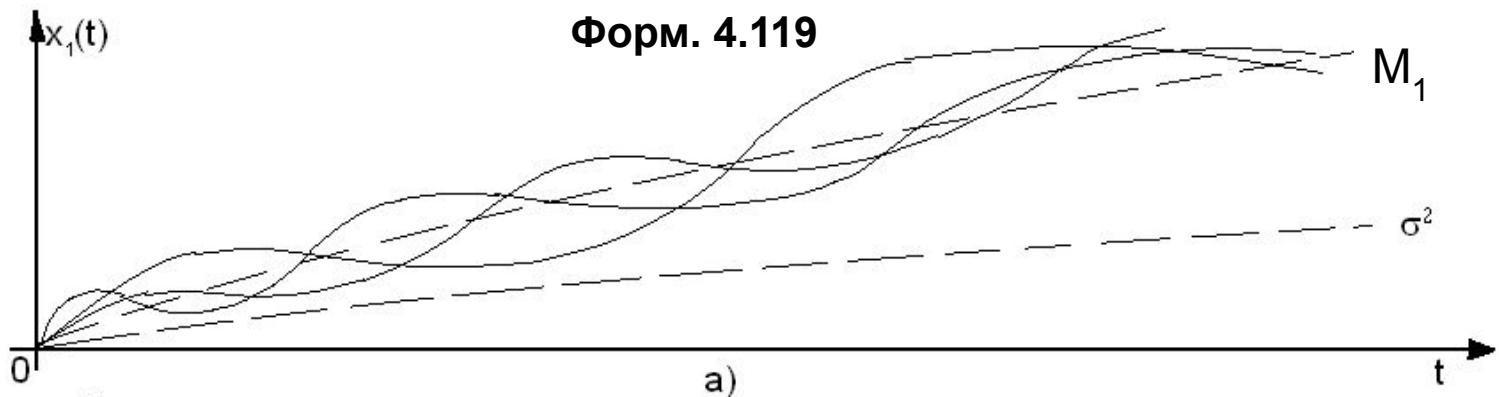


Рис. 4.22

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.34

4.8.2 Многомерный закон распределения мгновенных значений случайной функции

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - \overline{X(t_1)}] \cdot [X(t_2) - \overline{X(t_2)}]\} \quad \text{Форм. 4.120}$$

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{x_1 - X_1}) \cdot (\overline{x_2 - X_2}) p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad \text{Форм. 4.121}$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1) \quad \text{Форм. 4.122}$$

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad \text{Форм. 4.123}$$

$$\rho_x(t_1, t_2) = \quad \text{Форм. 4.124}$$

$$\rho_x(t_1, t_2) = \quad \text{Форм. 4.125}$$

1

α

Стационарный процесс $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ зависит только от интервалов $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$ и не зависит от положения этих интервалов

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.35

4.8.3 Гауссовский случайный процесс

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Форм. 4.126

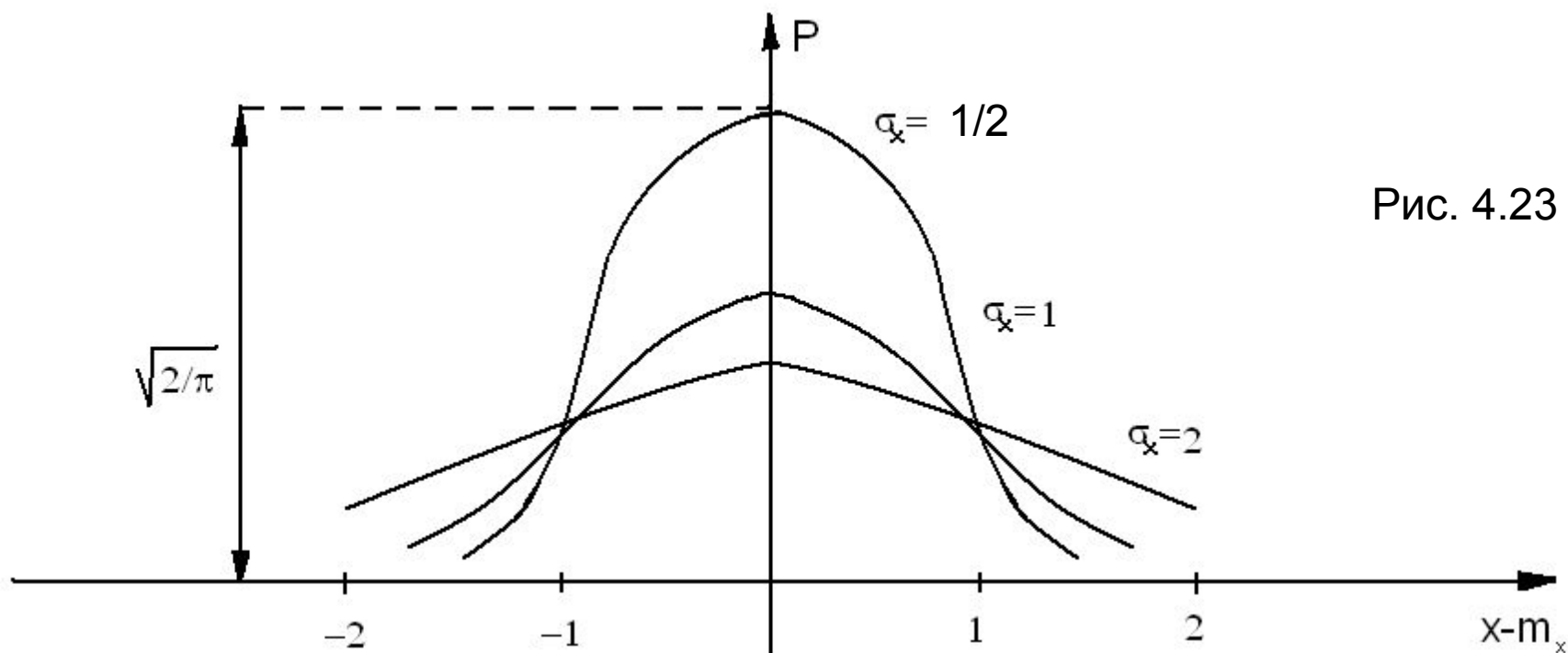


Рис. 4.23

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.36

4.8.4 Спектральная плотность мощности случайного процесса

$$[W(x)] = \left[\frac{\text{мощность}}{\text{полоса частот}} \right] = [\text{мощность} \times \text{время}] = [\text{энергия}]$$

Форм. 4.127

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2\pi} \dot{X}_{kT}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \quad \bar{X}_{kT}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_{kT}(\omega)|^2}{T} d\omega$$

Форм. 4.128

Форм. 4.129

$$\bar{X}_k^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{kT}(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega) d\omega$$

Форм. 4.130

$$W_k(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{X}_{kT}(\omega)|^2}{T} \quad \bar{X}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega \quad W_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{X}_T(\omega)|^2}{T}$$

Форм. 4.131

Форм. 4.132

Форм. 4.133

Тема 4. Математическое описание сигналов, сообщений и помех. Фиг.37

4.8.5 Соотношение между спектральной плотностью и ковариационной функцией случайного процесса. Белый шум

$$d\tau \quad W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Форм. 4.134

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Форм. 4.135

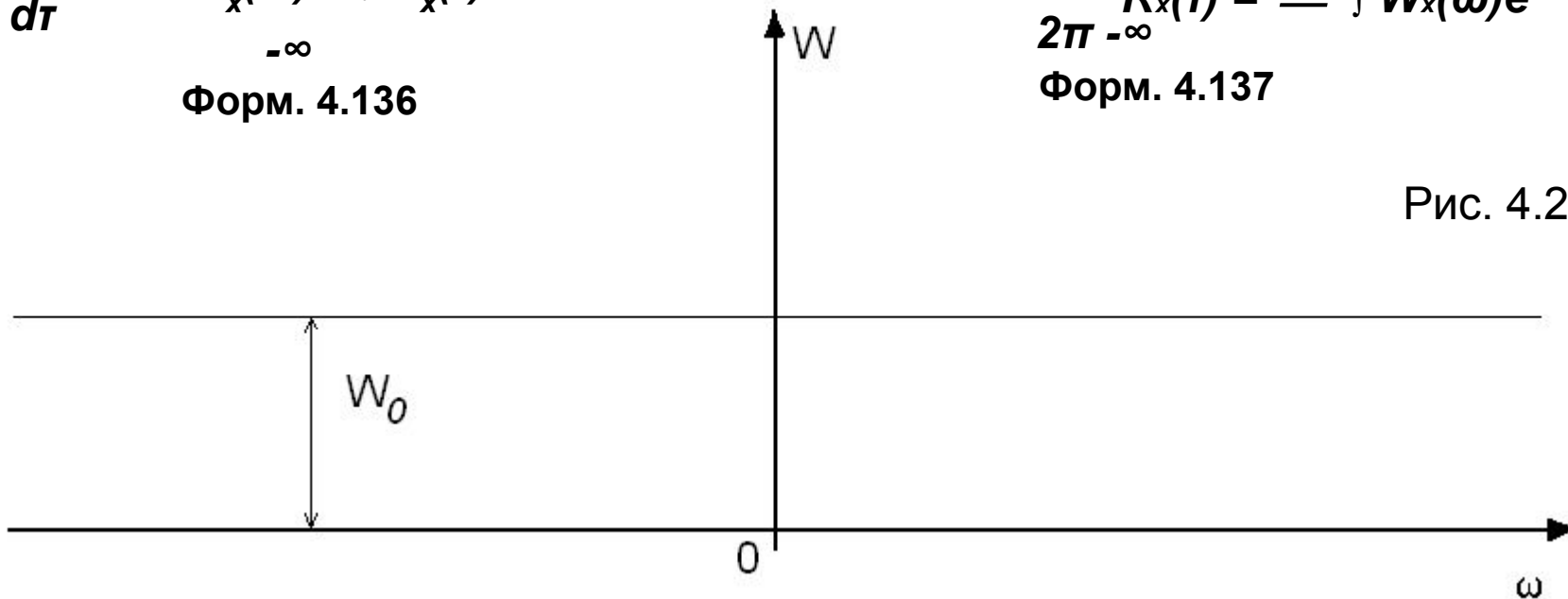
$$d\tau \quad W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Форм. 4.136

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Форм. 4.137

Рис. 4.24



$$R_x(\tau) = W_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \cdot \delta(\tau)$$

Форм. 4.138