

Кодирование и декодирование Фиг. 6.1

Тема 6. Кодирование (К-1) и декодирование (Дк-1) первого типа.

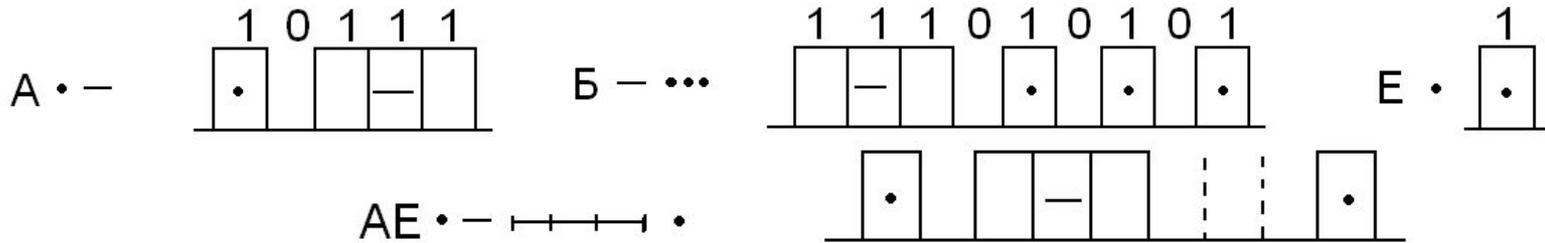
К-1	
величина	код
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

К-1	
величина	код
0	aaa
1	aab
2	aba
3	abb
4	baa
5	bab
6	bba
7	bbb

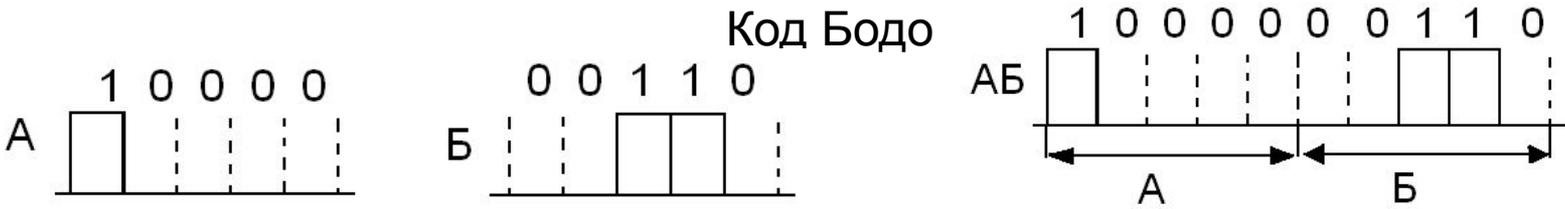
ДК-1	
код	величина
aaa	0
aab	1
aba	2
abb	3
baa	4
bab	5
bba	6
bbb	7

ДК-1	
код	величина
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Код Морзе



Код Бодо



Кодирование и декодирование второго типа

Кодирование II типа	
Код1	→ Код2
000	aaa
001	aab
010	aba
011	abb
100	baa
101	bab
110	bba
111	bbb
Код1	← Код2
Декодирование II типа	

Кодирование II типа	
Код1	→ Код2
000	aaa
001	aab
010	aba
011	abb
100	baa
101	bab
110	bba
111	bbb
Код1	← Код2
Декодирование II типа	

1) Код 1: $m=2$ (0,1) $n=3$, $N=8$

2) Код 1: $m=2$ (0,1) $n=3$, $N=8$

Код 2 $m=2$ (a,b), $n=3$, $N=8$

Код 2 корректирующий $m=2$ (0,1) $n=4$, $N=8$

Системы счисления

Десятичная	Восьмеричная	Пятеричная	Троичная	Двоичная
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	10
3	3	3	10	11
4	4	4	11	100
5	5	10	12	101
6	6	11	20	110
7	7	12	21	111
8	10	12	22	1000

Десятичная	Восьмеричная	Пятеричная	Двоичная	Троичная
9	11	14	1001	100
10	12	20	1010	101
11	13	21	1011	102
12	14	22	1100	110
13	15	23	1101	111
14	16	24	1110	112
15	17	30	1111	120
16	20	31	10000	121

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.4

Весы разрядов m^i различных систем счисления m^i ($i=0 \div n-1$)

Системы счисления	алфавит	Весы разрядов				
		1-го, m^0	2-го, m^1	3-го, m^2	4-го, m^3	5-го, m^4
Десятичная	$m=10(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$	$10^0=1$	$10^1=10$	$10^2=100$	$10^3=1000$	$10^4=10000$
Двоичная	$m=2(0,1)$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$
Троичная	$m=3(0,1,2)$	$3^0=1$	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$
Восьмеричная	$m=8(0,1,2,3,4,5,6,7)$	$8^0=1$	$8^1=8$	$8^2=64$	$8^3=512$	$8^4=4096$

Примеры m -ичных чисел

Десятичное $349=3 \cdot 10^2+4 \cdot 10^1+9 \cdot 10^0=300+40+9=349$

Двоичное $1001101=1 \cdot 2^6+0 \cdot 2^5+0 \cdot 2^4+1 \cdot 2^3+1 \cdot 2^2+0 \cdot 2^1+1 \cdot 2^0=64+0+0+8+4+0+1=77$

Троичное $1201=1 \cdot 3^3+2 \cdot 3^2+0 \cdot 3^1+1 \cdot 3^0=27+18+0+1=46$

Восьмеричное $214=2 \cdot 8^2+1 \cdot 8^1+4 \cdot 8^0=128+8+4=140$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.5

<p style="text-align: center;">«10□2»</p> <p>Десятичное число 29</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>29</td><td>2</td><td>14</td><td>1</td></tr> <tr><td>14</td><td>2</td><td>7</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p>Двоичное число 11101</p>	29	2	14	1	14	2	7	0	7	2	3	1	3	2	1	1	1	2	0	1	<p style="text-align: center;">«2□10»</p> <p>Двоичное число 11101</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>14</td><td></td><td>29</td></tr> </table> <p>Десятичное число 29</p>	1	1	1	0	1	2	7	14		29	<p style="text-align: center;">«2□10»</p> <p>Двоичное число</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2^5</td><td>2^4</td><td>2^3</td><td>2^2</td><td>2^1</td><td>2^0</td></tr> <tr><td>32</td><td>16</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table> <p>$\Sigma=1\cdot 32+1\cdot 16+0\cdot 8+1\cdot 4+0\cdot 2+1\cdot 1=53$</p> <p>Десятичное число 53</p>	1	1	0	1	0	1	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	32	16	8	4	2	1
29	2	14	1																																															
14	2	7	0																																															
7	2	3	1																																															
3	2	1	1																																															
1	2	0	1																																															
1	1	1	0	1																																														
2	7	14		29																																														
1	1	0	1	0	1																																													
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0																																													
32	16	8	4	2	1																																													
<p style="text-align: center;">«10□3»</p> <p>Десятичное число 29</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>29</td><td>3</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p>Троичное число 1002</p>	29	3	9	2	9	3	3	0	3	3	1	0	1	3	0	1	<p style="text-align: center;">«3□10»</p> <p>Троичное число</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td></td><td>29</td></tr> </table> <p>Десятичное число 29</p>	1	0	0	2	3	9		29	<p style="text-align: center;">«3□10»</p> <p>Троичное число 1021</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3^3</td><td>3^2</td><td>3^1</td><td>3^0</td></tr> <tr><td>27</td><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table> <p>$\Sigma=1\cdot 27+0\cdot 9+2\cdot 3+1\cdot 1=27+0+6+1=34$</p> <p>Десятичное число 34</p>	1	0	2	1	3^3	3^2	3^1	3^0	27	9	3	1												
29	3	9	2																																															
9	3	3	0																																															
3	3	1	0																																															
1	3	0	1																																															
1	0	0	2																																															
3	9		29																																															
1	0	2	1																																															
3^3	3^2	3^1	3^0																																															
27	9	3	1																																															

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.6

Код морзе
A ·- A C ... S
Б -... В Т - Т
В ·-·- W У ·- U
Г -·-· G Ф ·-· F
Д -· D X ··· H
Е · E Ц -·-· C
Ж ···- Ж Ч -·-· Δ
З -·-· Z Ш -·-· Ch
К ·- K Ы -·-· Y
Л ··· L Ю ···- U
М -- M Я ···- Ä
Н -· N Й ···- j
О -·- O Ъ,Ъ -·-· X
П ···- P Э ···-· ε
Р ·- R
2-101011101110111
(·-·-·-)
5-10101010101
(·-·-·-·)

Двоичный код на все сочетания
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1
$k_4 k_3 k_2 k_1$
Единично- десятичный код.

1 111 1111
11 11 111
111 1 11111

Число- импульсный код
0 0 0 0 0
1 0 0 0 0
1 1 0 0 0
1 1 1 0 0
1 1 1 1 0
1 1 1 1 1
Код Бодо
A – 10000
Б – 00110
В – 01101
Г - 01010
Международный телеграфный код
A – 00011
Б – 11001
В – 10011
Г - 11010

Двоично-десятичные коды.

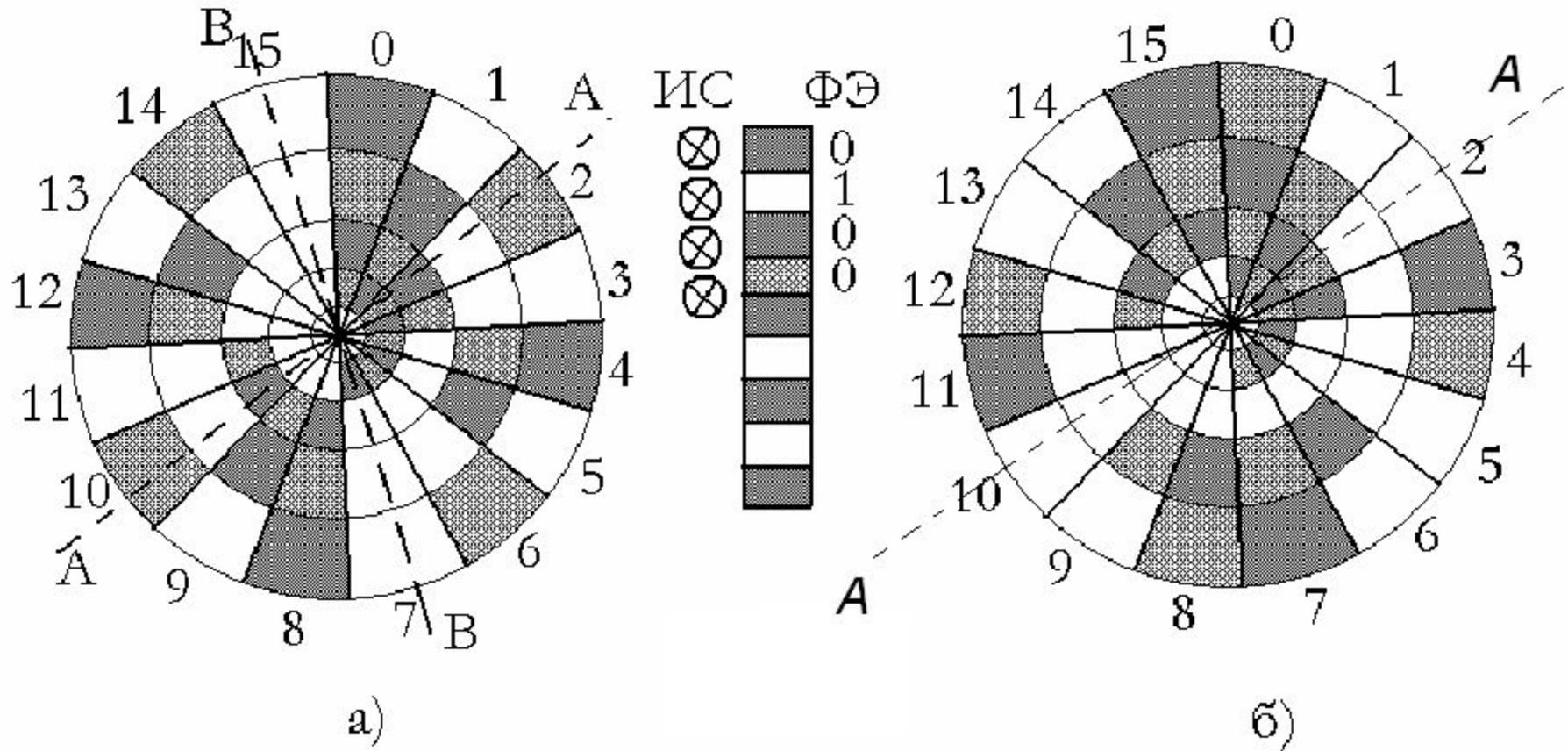
	8-4-2-1	7-4-2-1	2-4-2-1	4-2-2-1	9-8-7-6-5-4-3-2-1
0	0000	0000	0000	0000	00000000
1	0001	0001	0001	0001	00000001
2	0010	0010	0010	0010	00000010
3	0011	0011	0011	0101	00000100
4	0100	0100	0100	0110	00001000
5	0101	0101	0101	1001	00001000
6	0110	0110	0110	1010	00010000
7	0111	1000	0111	1101	00100000
8	1000	1001	1110	1110	01000000
9	1001	1010	1111	1111	10000000

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.8

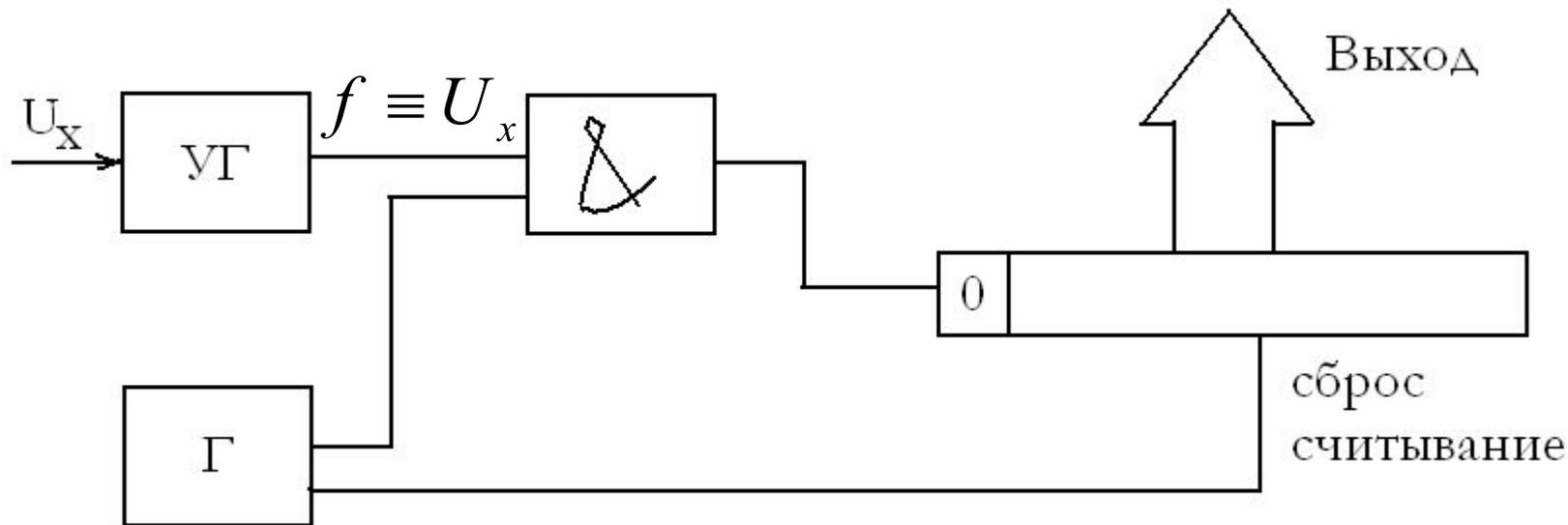
№	Двоичный код	Код Грея	
0	0000	0000	
1	0001	0001	первое зеркало
2	0010	0011	
3	0011	0010	второе зеркало
4	0100	0110	
5	0101	0111	
6	0110	0101	
7	0111	0100	третье зеркало
8	1000	1100	
9	1001	1101	
10	1010	1111	
11	1011	1110	
12	1100	1010	
13	1101	1011	
14	1110	1001	
15	1111	1000	

Дв. Код код Грея 1001 1101

Код Грея Дв. Код 1101 1001



Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.10



$T = const$

$f = var$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.11

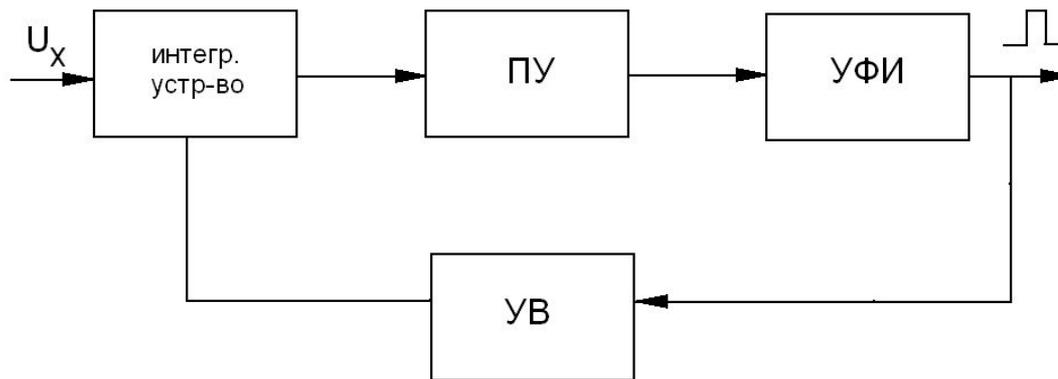


Рис. 3

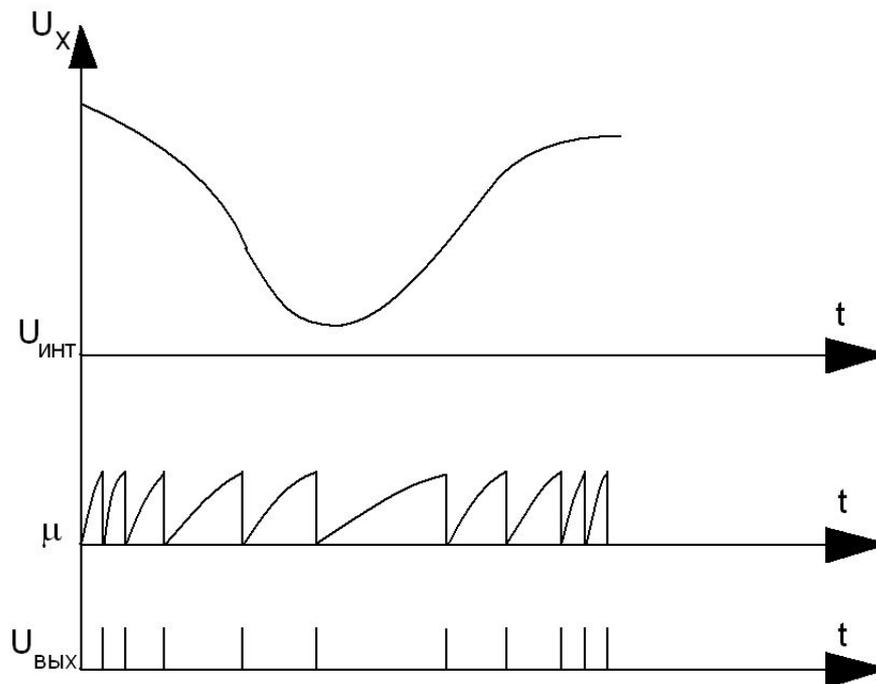


Рис. 4

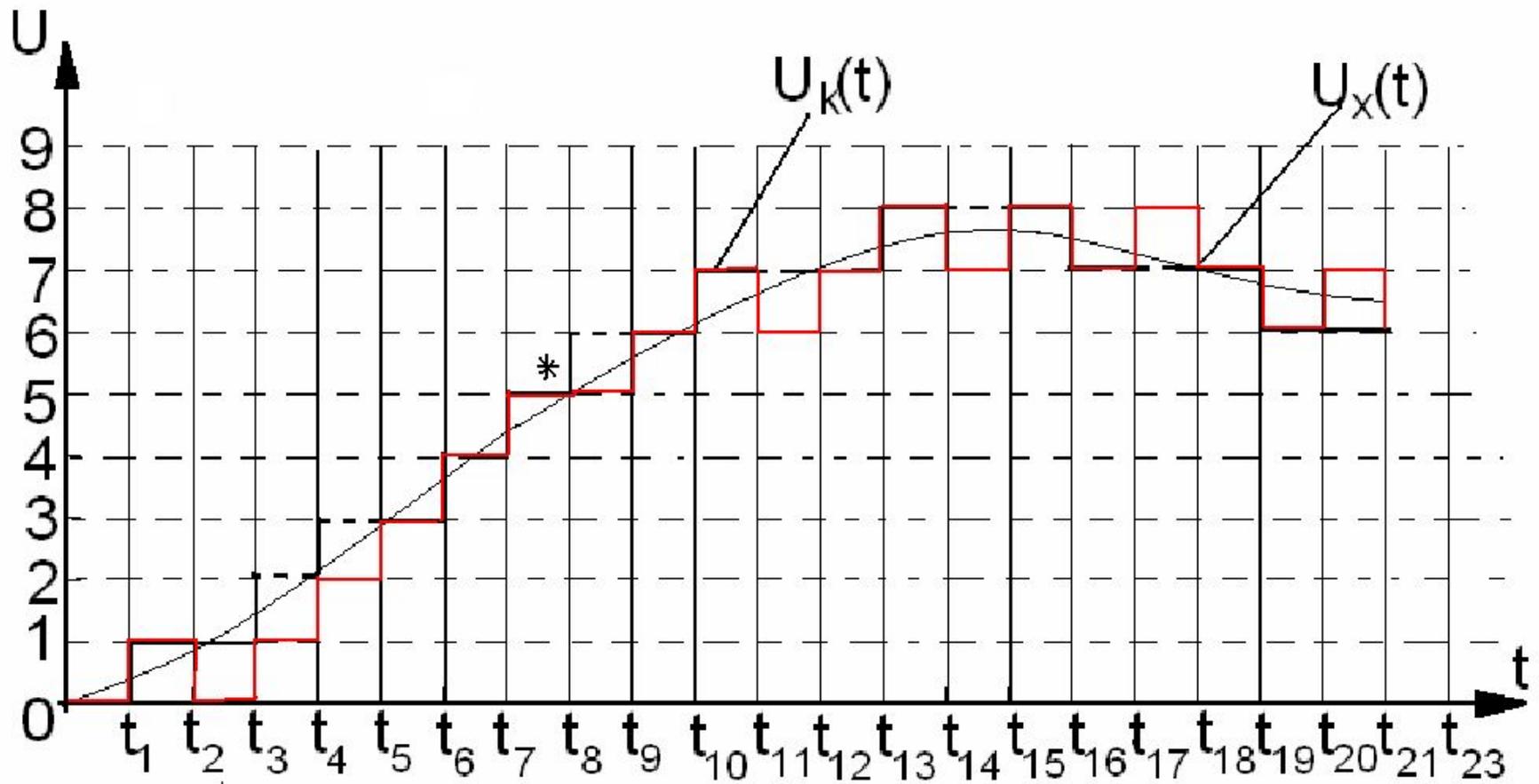
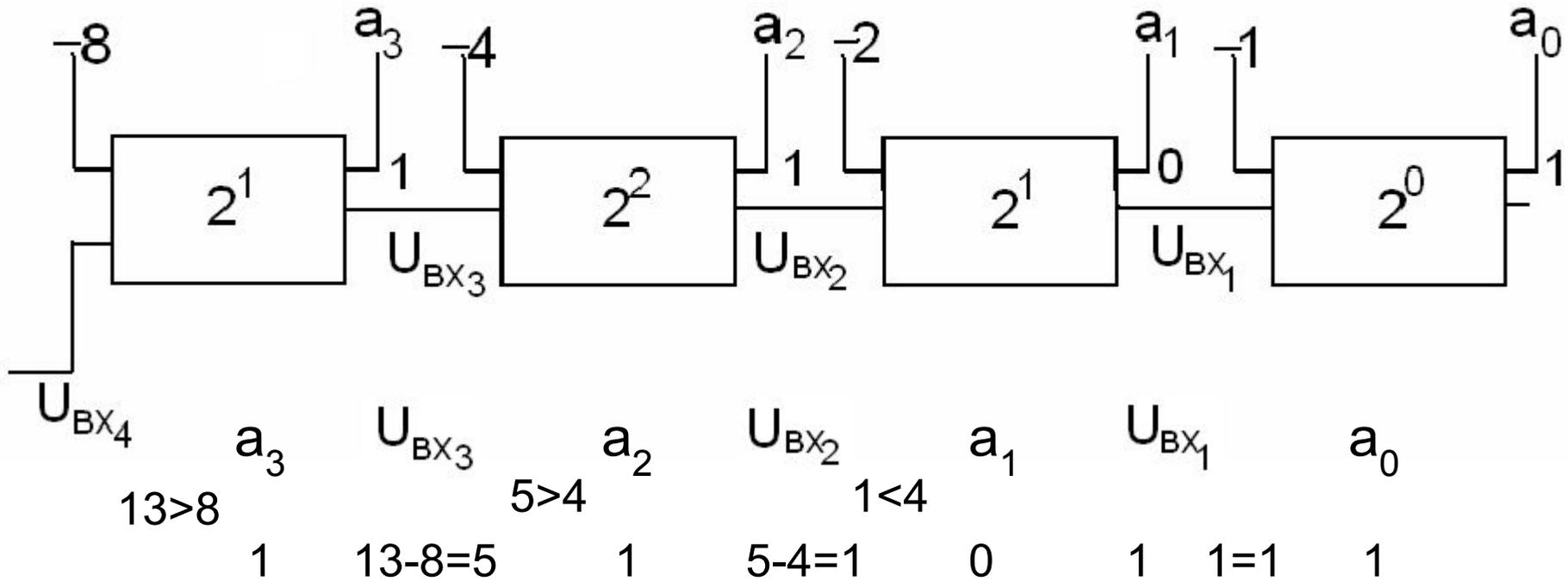


Рис. 5

4-х разрядный АЦП



Выходной код 1101

$$a_i = 1 \text{ если } U_{xi} > U_{эi}, U_{x(i+1)} = U_{xi} - U_{эTi}$$

$$a_i = 0 \text{ если } U_{xi} < U_{эi}, U_{x(i+1)} = U_{xi}$$

Тема 6. Кодирование и декодирование. Фиг. 6.14

Хемингово и кодовое расстояние. Вектор ошибки.

$$V_i = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \quad V_j = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

Форм. 2.1

Форм. 2.2

$$d_{ij} = V_i \oplus V_j = \sum_{k=1}^n (a_k \oplus b_k)$$

Форм. 2.3

$$V_i(10001) \quad V_j(10110) \quad \text{Форм. 2.4}$$

$$d_{ij} = (1 \oplus 1) + (0 \oplus 0) + (0 \oplus 1) + (0 \oplus 1) + (1 \oplus 0) = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{Форм. 2.5}$$

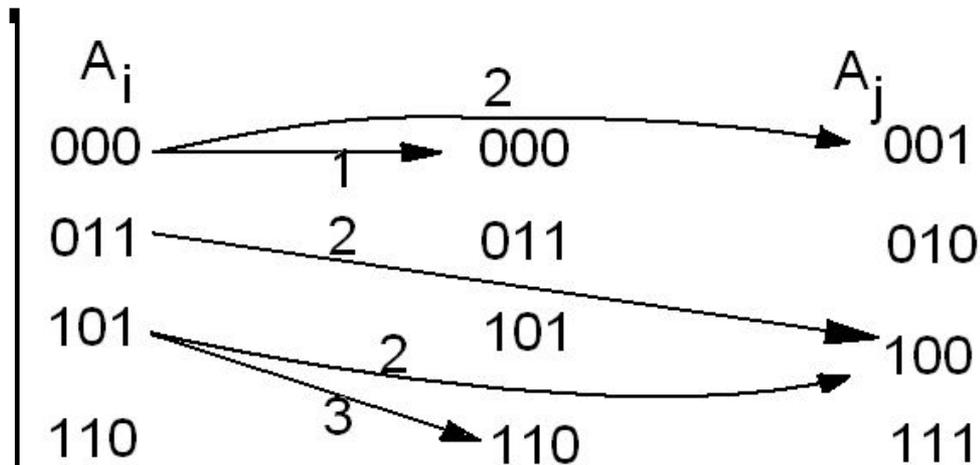
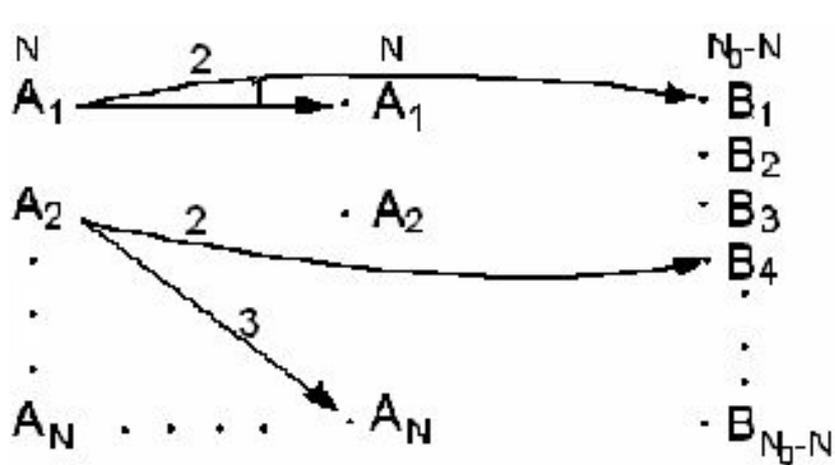
$V_\Sigma = V_i \oplus V_j$	$V_i = 01001$	$V_\Sigma = 01101$	V_i	01001
Форм. 2.6	$V_j = 00100$	Форм. 2.8	\oplus	
	Форм. 2.7		V_j	<u>00100</u>

$d(V_i \oplus V_j) = W(V_\Sigma)$	$e_i \oplus V_i = V_i^*$	$V_i \oplus V_i^* = e$	$V_\Sigma = 01101$
Форм. 2.9	Форм. 2.10	Форм. 2.11	

$V_i = 01010$	$V_i^* = 01011$	$e = 00001$	$V_i^* \oplus e = V_i$
	Форм. 2.12		

$$E = 2^n - 1 \quad \text{Форм. 2.13}$$

Идея обнаружения ошибки.



1 случай: $A_1 \square A_1, 000 \square 000,$

2 случай: $A_2 \square B_4, A_1 \square B_1; 000 \square 001,$
 $011 \square 100,, 101 \square 100$

3 случай: $A_2 \square A_N, 101 \square 110,$

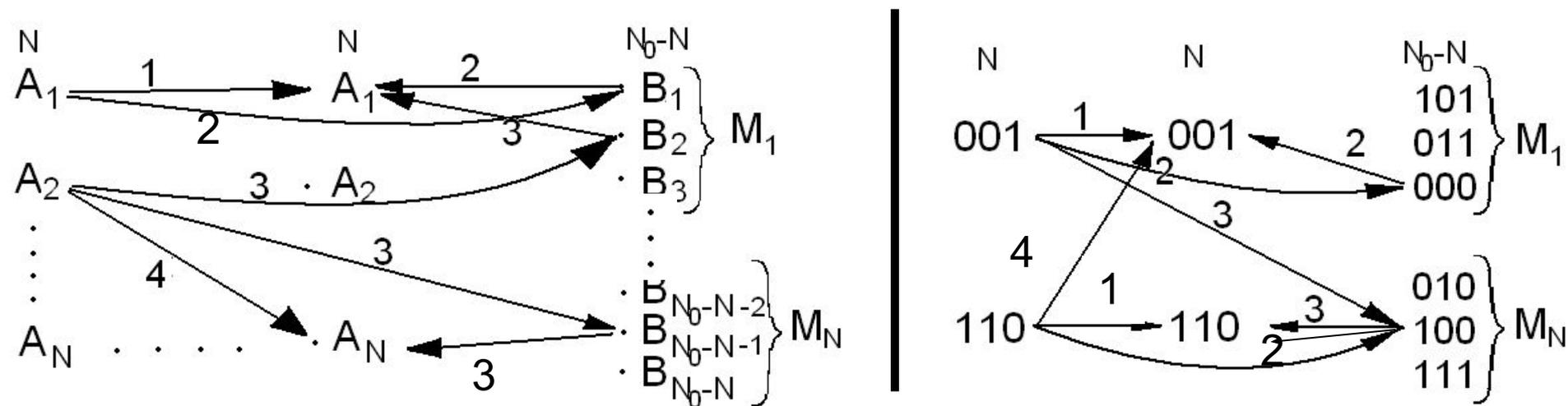
ошибки нет

**ошибка есть и она
обнаруживается**

**ошибка есть и она не
обнаруживается**

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.16

Идея исправления ошибки.



1 случай: $A_1 \square A_1, 001 \square 001, 110 \square 110$ ошибки нет

2 случай: $A_1 \square B_1 \square A_1, 001 \square 000 \square 001, 110 \square 100 \square 110,$ ошибка есть, она обнаруживается и исправляется

3 случай: $A_2 \square B_2 \square A_1, 001 \square 000 \square 110$ ошибка есть, она обнаруживается и исправляется неверно

4 случай: $A_2 \square A_N, 110 \square 001$ ошибка есть, но она не обнаруживается

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.18

Код с проверкой на четность.

	Первичный код	Корректирующий код
0	000	0000
1	001	0011
2	010	0101
3	011	0110
4	100	1001
5	101	1010
6	110	1100
7	111	1111
	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3 b_1$

$$N=2^k \quad k=3, \quad r=1, \quad n=k+r, \quad N_0=2^n$$

N_0 – все комбинации

N - разрешенные комбинации

N_0-N – запрещенные комбинации

$$b = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$$

Код делимый, $d=2$

$$И = 1/k = 1/3, \quad q = k/n = 3/4$$

$$S=S_1 \quad S_1=0 \quad \text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus b = 0$$

$$S_1=1 \quad \text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus b = 1$$

$$N_0=2^4=16$$

$$N=2^3=8$$

$$N_0-N=8$$

передано 0110, принято 1110

$S_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1, S = 1$ – ошибка есть и обнаружена

передано 0110, принято 1010

$S_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0, S = 0$ – ошибка есть, но она не обнаружена

Вероятность необнаружения ошибки: $P_{\text{но}} = C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + \dots$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.19

Код с повторением без инверсии

	Первичный код	Корректирующий код
0	000	000000
1	001	001001
2	010	010010
3	011	011011
4	100	100100
5	101	101101
6	110	110110
7	111	111111
	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$

$$N=2^k \quad k=3 \quad r=k=3 \quad n=k+r=6 \quad N_0=2^n$$

N_0 – все комбинации

N - разрешенные комбинации

N_0-N – запрещенные комбинации

$$a_1=b_1 \quad a_2=b_2 \quad a_3=b_3$$

Код разделимый, $d=2$

$$I = (n-k)/k = 1 \quad q = k/n = 0.5$$

$$S = S_3 S_2 S_1$$

$$S_1 = a_1 \oplus b_1$$

$$S_2 = a_2 \oplus b_2$$

$$S_3 = a_3 \oplus b_3$$

$$N_0 = 2^6 = 64$$

$$N = 2^3 = 8$$

$$N_0 - N = 56$$

передано 110110. принято 010110. $S = S_3 S_2 S_1$,

$S_1 = 0 \oplus 1 = 1 \quad S_2 = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_3 = 0 \oplus 0 = 0. \quad S = 001.$ Ошибка есть и она обнаружена.

передано 110110. принято 010010. $S = S_3 S_2 S_1$

$S_1 = 0 \oplus 0 = 0 \quad S_2 = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_3 = 0 \oplus 0 = 0. \quad S = 000.$ Ошибка есть, но она не обнаружена

Не обнаруживаются одновременные ошибки: a_1 и b_1 a_2 и b_2 и т.п.

$$P_{н.ош} = C_k^1 p q^{k-1} p q^{r-1} + C_k^2 p^2 q^{k-2} p^2 q^{r-2} + \dots = C_k^1 p^2 q^{n-2} + C_k^2 p^4 q^{n-4} + \dots$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.20

Код с повторением и инверсией

	Первичный код	Корректирующий код
0	000	000000
1	001	001110
2	010	010101
3	011	011011
4	100	100011
5	101	101101
6	110	110110
7	111	111000
	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$

$$N=2^k \quad k=3 \quad r=k=3 \quad n=k+r=6 \quad N_0=2^n$$

N_0 – все комбинации

N - разрешенные комбинации

N_0-N – запрещенные комбинации

$$\text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \quad b_1 = a_1 \quad b_2 = a_2 \quad b_3 = a_3$$

$$\text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 \quad b_1 = \bar{a}_1 \quad b_2 = \bar{a}_2 \quad b_3 = \bar{a}_3$$

Код делимый, $d=3$ при $k=3$, $d=4$ при $k \geq 4$

$$I = (n-k)/k = 1 \quad q = k/n = 0.5$$

$$S = S_3 S_2 S_1$$

$$\text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \quad S_1 = a_1 \oplus b_1$$

$$S_2 = a_2 \oplus b_2 \quad S_3 = a_3 \oplus b_3$$

$$\text{при } a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 \quad S_1 = b_1 \oplus \bar{a}_1 \quad S_2 = b_2 \oplus \bar{a}_2 \quad S_3 = b_3 \oplus \bar{a}_3$$

$$S_1 = 0 \oplus \bar{1} = 0 \oplus 0 = 0 \quad S_2 = 1 \oplus \bar{1} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$S_3 = 0 \oplus \bar{1} = 0 \oplus 0 = 0$$

$S=010$ указывает на наличие ошибки.

передано 110110. принято 011011. $S_1 = 0 \oplus 0 = 0$ $S_2 = 1 \oplus 1 = 0$ $S_3 = 1 \oplus 1 = 0$.

$S=000$ ошибка есть но не обнаруживается.

Не обнаруживаются одновременные ошибки: $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$, $a_1 a_3$ и $b_1 b_3$, $a_2 a_3$ и $b_2 b_3$

$$P_{н.ош} = C_k^2 p^2 q^{k-2} p q^{r-2} + C_k^4 p^4 q^{k-4} p^4 q^{r-4} + \dots = C_k^2 p^4 q^{n-4} + C_k^4 p^8 q^{n-8} + \dots$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.21

Корреляционный код (код с удвоением элементов)

	Первичный код	Корректирующий код
0	000	010101
1	001	010110
2	010	011001
3	011	011010
4	100	100101
5	101	100110
6	110	101001
7	111	101010
	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$

$$N=2^k \quad k=3 \quad r=k=3 \quad n=k+r=6 \quad N_0=2^n$$

N_0 – все комбинации

N - разрешенные комбинации

$N_0 - N$ – запрещенные комбинации

$$b_1 = \bar{a}_1 \quad b_2 = \bar{a}_2 \quad b_3 = \bar{a}_3 \quad 0 \square 01 \quad 1 \square 10$$

Код разделимый, $d=2$

$$S = S_3 S_2 S_1$$

$$S_1 = k_1 \oplus \bar{r}_1 \quad S_2 = k_2 \oplus \bar{r}_2 \quad S_3 = k_3 \oplus \bar{r}_3$$

$N_0 = 2^6 = 64$ Передано 100110. принято 000110.

$N = 2^3 = 8$ $S = S_3 S_2 S_1 \quad S_1 = 0 \oplus \bar{0} = 0 \oplus 1 = 1 \quad S_2 = 0 \oplus \bar{1} = 0 \oplus 0 = 0 \quad S_3 = 1 \oplus \bar{0} = 1 \oplus 1 = 0$

$N_0 - N = 56$ $S = 001$ Ошибка есть и она обнаружена.

Передано 100110. принято 101010.

$$S_1 = 1 \oplus \bar{0} = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_2 = 1 \oplus \bar{0} = 1 \oplus 1 = 0 \quad S_3 = 1 \oplus \bar{0} = 1 \oplus 1 = 0$$

$S = 000$. Ошибка есть, но она не обнаружена.

Не обнаруживаются ошибки только в парах $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$ и их сочетаниях.

$$P_{\text{н.ош}} = C_{n/2}^1 p^2 q^{n-2} + C_{n/2}^2 p^4 q^{n-4} + \dots$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.22

Код с постоянным весом

	Корректирующий код
0	0 0 0 1 1
1	0 0 1 0 1
2	0 1 0 0 1
3	1 0 0 0 1
4	0 0 1 1 0
5	0 1 0 1 0
6	1 0 0 1 0
7	0 1 1 0 0
	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ n

Код неразделимый. $N=C_n^l$, l – число единиц в кодовой комбинации.

$$N=8, n=5, l=2$$

$$k_3=3, r_3=n-k_3=2, d=2$$

$$I = \frac{\log_2 N_0 - \log_2 C_n^l}{\log_2 N}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$q = \frac{\log_2 C_n^l}{\log_2 N_0}$$

$$S = S_1 \begin{matrix} \delta_{сл} \\ \delta_{сл} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix}$$

передано 01100. принято 11100

$n(1) = 1+1+1+0+0 = 3 \neq l$. $S = S_1 = 1$. Ошибка

есть и она обнаруживается

передано 01100. принято 11000.

$N(1) = 1+1+0+0+0 = 2 = l$. $S = S_1 = 0$. Ошибка

имеет место, но она не обнаруживается

$$N_0 = 2^5 = 32 \quad N = 10$$

$$N_0 - N = 22$$

Не обнаруживаются ошибки при одновременном переходе 1 в 0 и 0 в 1,

$$p \begin{matrix} 1 \\ \text{н.ош} \end{matrix} \text{ в } \begin{matrix} 00 \\ \ell \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} 00 \\ n-l \end{matrix} \text{ в } \begin{matrix} 11 \\ n-l \end{matrix} \text{ и т.д.} \quad p q^{n-l-1} + C_\ell^2 p^2 q^{\ell-2} C_{n-l}^2 p^2 q^{n-l-2} + \dots =$$

$$= C_1^1 C_1^1 p^2 q^{n-2} + C_2^2 C_2^2 p^4 q^{n-4} + \dots$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.23

Код Хемминга несистематический.

№позиции	1	2	3	4	5	6	7
	b_1	b_2	a_1	b_3	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1
2	0	0	0	1	0	1	0
3	1	1	0	0	0	1	1
4	1	1	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0
9	0	0	1	1	0	0	1
10	1	0	1	1	0	1	0
11	0	1	1	0	0	1	1
12	0	1	1	1	1	0	0
13	1	0	1	0	1	0	1
14	0	0	1	0	1	1	0
15	1	1	1	1	1	1	1

$$N=2^k=2^4=16 \quad k=4, r=3, n=k+r=7 \quad N_0=2^n=2^7=128$$

Код разделимый, $d=3$, $I=3/7$, $q=4/7$, $N_0-N=112$

$S = S_3 S_2 S_1$ - r-разрядное двоичное число, определяющее позицию искаженного символа

000	Нет иск.
001	1 поз.
010	2 поз.
011	3 поз.
100	4 поз.
101	5 поз.
110	6 поз.
111	7 поз.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 & S_1 &= b_1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 \\ b_2 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 & S_2 &= b_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 \\ b_3 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 & S_3 &= b_3 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \end{aligned}$$

Передано 1100110. принято 0100110

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 & S &= 001 \text{ Искражен} \\ S_2 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 & & 1 \text{ символ} \\ S_3 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 & & \end{aligned}$$

Передано 1100110. принято 0101110

$S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 1 \quad S = 101$ Синдром указывает на искажение 5 символа. На самом деле искажены 1 и 4 символы

$$P_{\text{ио}} = C_n^1 p^1 q^{n-1}$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.24

Линейные (n,k) коды.

$a_i (i = 1 \div k)$ – информационные $b_j (j = 1 \div r)$ – проверочные

$V = (a_1 a_2 \dots a_k b_1 \dots b_r)$ – систематический код

$V = (a_1 b_1 \dots a_k b_r)$ – несистематический код

линейный код $b_j = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ij} a_i$

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 & C_{11} &= 1, C_{12} = 1, C_{13} = 1, C_{14} = 0 \\ b_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 & C_{21} &= 0, C_{22} = 1, C_{23} = 1, C_{24} = 1 \\ b_3 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 & C_{31} &= 1, C_{32} = 1, C_{33} = 0, C_{34} = 1 \end{aligned}$$

$V = (a_1 a_2 \dots a_k b_1 \dots b_r)$ – переданная комбинация

$V^* = (a_1^* a_2^* \dots a_k^* b_1^* \dots b_r^*)$ – принятая комбинация

$$b_j^{**} = \sum_{i=1}^k \boxtimes C_{ij} a_i^*, \quad S_j = b_j^{**} \oplus b_j^*, \quad S = S_3 S_2 S_1$$

$S=000$ – ошибки нет. В остальных случаях – ошибка есть

передано 0001011. принято 1001011

$$\begin{aligned} b_1^{**} &= a_1^* \oplus a_2^* \oplus a_3^* = 1 & b_1^* \oplus b_1^{**} &= 0 \oplus 1 = 1 & S_1 &= 1 \\ b_2^{**} &= a_2^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 1 & b_2^* \oplus b_2^{**} &= 1 \oplus 1 = 0 & S_2 &= 0 \\ b_3^{**} &= a_1^* \oplus a_3^* \oplus a_4^* = 0 & b_3^* \oplus b_3^{**} &= 1 \oplus 0 = 1 & S_3 &= 1 \\ & & & & S &= 101 \end{aligned}$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.25

№ комб.	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	w_i
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	3
2	0	0	1	0	1	1	0	3
3	0	0	1	1	1	0	1	4
4	0	1	0	0	1	1	1	4
5	0	1	0	1	1	0	0	3
6	0	1	1	0	0	0	1	3
7	0	1	1	1	0	1	0	4
8	1	0	0	0	1	0	1	3
9	1	0	0	1	1	1	0	4
10	1	0	1	0	0	1	1	4
11	1	0	1	1	0	0	0	3
12	1	1	0	0	0	1	0	3
13	1	1	0	1	0	0	1	4
14	1	1	1	0	1	0	0	4
15	1	1	1	1	1	1	1	7

Табл. 2.8

$$V = (a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_r)$$

Форм. 2.14

$$V^{(1)} = (a_2 a_3 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_r a_1)$$

Форм. 2.15

$$V = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0)$$

Форм. 2.16

$$f(X) = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0 \quad \text{Форм. 2.17}$$

$$V = (1100101)$$

Форм. 2.18

$$f(x) = X^6 + X^5 + X^2 + 1$$

Форм. 2.19

$$f(x) \cdot X^7 \rightarrow 1$$

Форм. 2.20

$$X \cdot f(x) = X^6 + X^3 + X^2 + 1 \rightarrow 1001011$$

Форм. 2.21

$$00\dots 01b_1b_2\dots b_r$$

Форм. 2.22

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.27

$g(x)$ – порождающий многочлен

$$(X^7 + 1) = (X + 1)(X^3 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1) \text{ Форм. 2.23}$$

№	Делители двучлена (порождающие многочлены)	r	код
1	$g_1(X)=X+1$	1	(7,6)
2	$g_2(X)=X^3+X+1$	3	(7,4)
3	$g_3(X)=X^3+X^2+1$	3	(7,4)
4	$g_4(X)=(X+1)(X^3+X+1)=X^4+X^3+X^2+1$	4	(7,3)
5	$g_5(X)=(X+1)(X^3+X^2+1)=X^4+X^2+X+1$	4	(7,3)
6	$g_6(X)=(X^3+X+1)(X^3+X^2+1)=X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$	6	(7,1)

Табл. 2.9

$$G_u = \begin{pmatrix} g(x) \\ Xg(x) \\ \dots\dots\dots \\ X^{x-1}g(x) \end{pmatrix}$$

Форм. 2.24

$$\begin{aligned} Xg(x) &= X^4 + X^2 + X \\ X^2g(x) &= X^5 + X^3 + X^2 \\ X^3g(x) &= X^6 + X^4 + X^3 \end{aligned}$$

Форм. 2.25

$$G_{u(7,4)} = \begin{pmatrix} 0001011 \\ 0010110 \\ 0101100 \\ 1011000 \end{pmatrix}$$

Форм. 2.26

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.28

0		0	0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	1	0	1	1
2		0	0	1	0	1	1	0
3		0	1	0	1	1	0	0
4		1	0	1	1	0	0	0
5	$1 \oplus 2$	0	0	1	1	1	0	1
6	$1 \oplus 3$							
7	$1 \oplus 4$							
8	$2 \oplus 3$	0	1	1	1	0	1	0
9	$2 \oplus 4$							
10	$3 \oplus 4$							
11	$1 \oplus 2 \oplus 3$	0	1	1	0	0	0	1
12	$1 \oplus 2 \oplus 4$							
13	$1 \oplus 3 \oplus 4$							
14	$2 \oplus 3 \oplus 4$							
15	$1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4$	1	1	0	1	0	0	1

Табл. 2.10

$$h(X) = \frac{X^n + 1}{g(X)} \quad \text{Форм. 2.27}$$

$$h(X) = h_k X^k + h_{k-1} X^{k-1} + \dots + h_1 X + h_0 \quad \text{Форм. 2.28}$$

$$h_k = h_0 = 1, \quad h_{k-1}, \dots, h_1 - \text{либо } 1 \text{ либо } 0 \quad \text{Форм. 2.29}$$

$$V(X)h(X) = 0$$

Форм. 2.30

$$\bar{h}(X) = 1 + h_1 X + h_2 X^2 + \dots + X^k$$

Форм. 2.31

$$H_u = \begin{pmatrix} \bar{h}(x) \\ X\bar{h}(x) \\ \dots \\ X^{r-1}\bar{h}(x) \end{pmatrix} \quad \text{Форм. 2.32}$$

$$V \times H_u^T = 0$$

Форм. 2.33

$$g(x) = X^3 + X + 1$$

Форм. 2.34

$$h(X) = \frac{X^7 + 1}{X^3 + X + 1} = X^4 + X^2 + X + 1$$

Форм. 2.35

$$\bar{h}(x) = 1 + X + X^2 + X^4$$

$$X\bar{h}(x) = X + X^2 + X^3 + X^5$$

$$X^2\bar{h}(x) = X^2 + X^3 + X^4 + X^6$$

Форм. 2.36

$$H_u = \begin{pmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 0011101 \end{pmatrix}$$

Форм. 2.37

Форм. 2.38

$$V \times \left\| H_y \right\|^T = S_r \dots S_2 S_1$$

$$1010111 \times \begin{vmatrix} 100 \\ 110 \\ 111 \\ 101 \\ 010 \\ 001 \end{vmatrix} =$$

Форм. 2.39

$$= (1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0) (0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0) \cdot$$

$$(0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1) =$$

$$= 101, \quad S = 101$$

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.32

$$V = (1101001) \quad \text{Форм. 2.40}$$

$$V^* = (1111001)$$

$$g(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{Форм. 2.41}$$

$$\begin{array}{r}
 + \quad x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \\
 \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad x^5 + 1 \\
 + \quad \quad \underline{x^5 + x^3 + x^2} \\
 \quad \quad \quad x^3 + x^2 + 1 \\
 + \quad \quad \quad \underline{x^3 + x + 1} \\
 \quad \quad \quad \quad x^2 + x
 \end{array}$$

Форм. 2.42

$$\begin{array}{r}
 + \quad x^4 \\
 \underline{x^4 + x^2 + x} \\
 \quad \quad x^2 + x
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x + 1 \\ \hline x \end{array} \right.$$

Форм. 2.43

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.33

$$V(x) = A(x) + R(x)$$

Форм. 2.44

$$A(x) = Q(x)x^r$$

Форм. 2.45

$$V = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Форм. 2.46

$$V(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$$

Форм. 2.47

$$R(x) = 1$$

Форм. 2.48

$$A(x) \quad g(x)$$

.....

$$R(x) \quad F(x)$$

Форм. 2.49

$$A(x) + R(x) = g(x) \cdot F(x) + \underbrace{R(x) + R(x)}_0$$

Форм. 2.50

Тема 6. Кодирование и декодирование Фиг. 6.34

(7.3) – код, $k = 4$, $r=3$

$$g(x) = X^3 + X + 1$$

$$Q(x) = X^3 + X^2 (1100)$$

$$A(x) = Q(x) \cdot X^3$$

$$(x^3 + x^2) \cdot x^3 = x^6 + x^5$$

$$\begin{array}{r}
 + \begin{array}{r} X^6 + X^5 \\ X^6 + X^4 + X^3 \end{array} \left| \begin{array}{r} X^3 + X + 1 \\ \hline X^3 + X^2 + X \end{array} \right. \\
 \hline
 + \begin{array}{r} X^5 + X^4 + X^3 \\ X^5 + X^3 + X^2 \end{array} \\
 \hline
 + \begin{array}{r} X^4 + X^2 \\ X^4 + X^2 + X \end{array} \\
 \hline
 X
 \end{array}$$

Форм. 2.51

$$V(X) = A(X) + R(X) = x^6 + x^5 + 1 \rightarrow 1100010$$

Форм. 2.52