



*ФГУП ГосНИИ
Авиационных систем*

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Визильтер Юрий Валентинович

viz@gosnias.ru

Что такое морфология?

НАУКА

СПОСОБЫ - эвристики, эксперименты

МЕТОДЫ - математические модели

- формализованные критерии

- решения, обладающие доказанными свойствами

- оптимальность

МАШИННОЕ ЗРЕНИЕ - весь комплекс проблем, связанных с получением пространственной информации, включая сенсоры, вычислители и алгоритмы

КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ - математические и алгоритмические аспекты машинного зрения

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЗРЕНИЕ

ФОТОГРАММЕТРИЯ

(геометрия простр.распред. данных)

МОРФОЛОГИЯ

(модели данных и процедур)

Что такое морфология?

Термин: **Морфология** – (1) «наука о форме»;

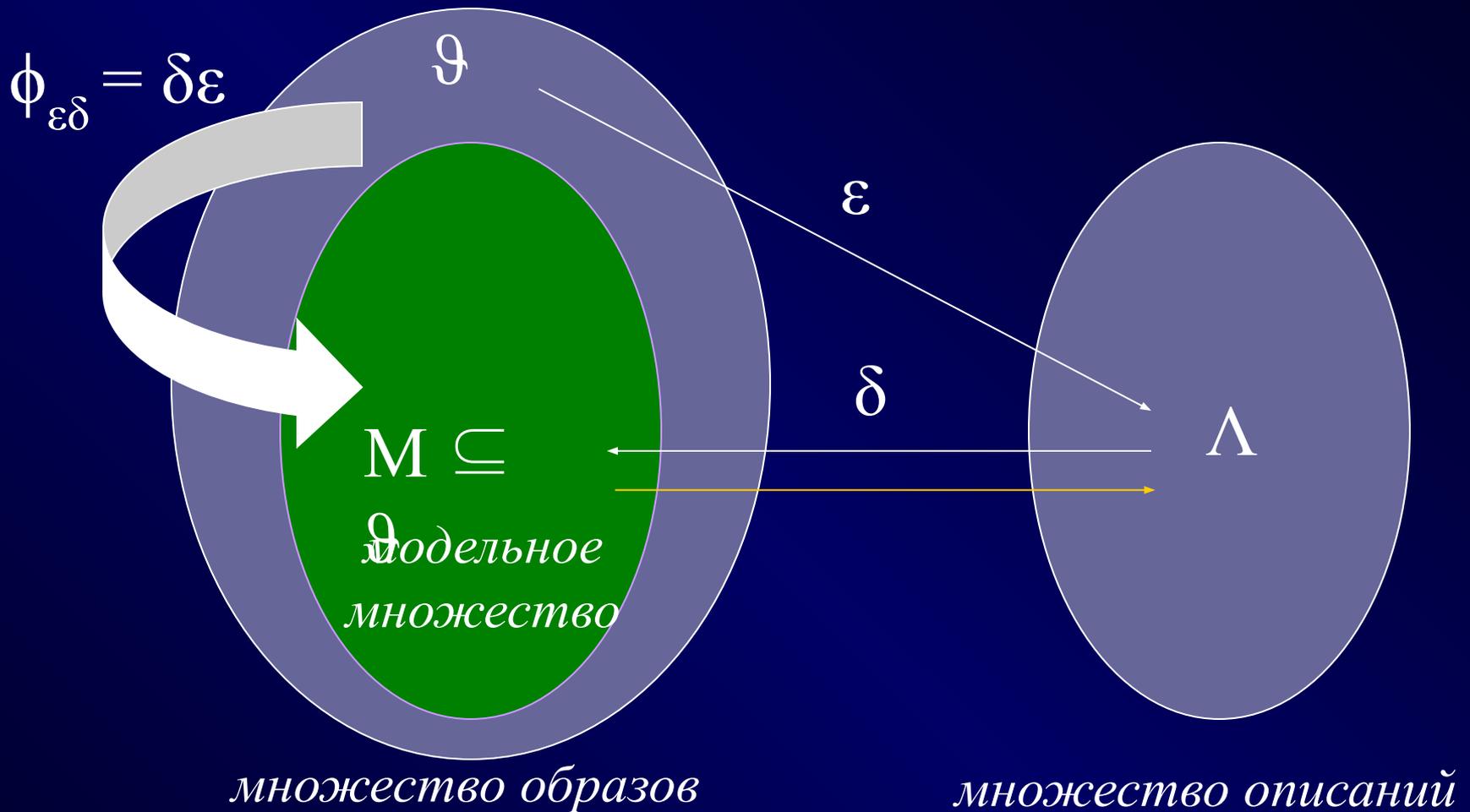
(2) методы анализа изображений, основанные на содержательных яркостно-геометрических моделях и критериях.

Источники: **Морфология Серра, Морфология Пытьева.**

Обобщение 1: Морфологический анализ – схема анализа данных, которая в качестве обязательного этапа предполагает **обоснованное** (в некотором смысле оптимальное) построение **модельного описания** гипотетического (скрытого) **прообраза** наблюдаемых **данных** (*сегментация + реконструкция*).

Обобщение 2: "Морфология" или "**морфологическая система**" – это такой формализм анализа данных (изображений), в котором любые образы (изображения) рассматриваются как **элементы** **некоторого пространства (алгебры)**, любые задачи формулируются в терминах этого пространства, и операции осуществляются над элементами этого пространства (целыми изображениями), а не над отдельными пикселями.

Формальная морфология



Морфологическая сегментация

$$\varepsilon: \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda$$

Морфологическая реконструкция

$$\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{D}$$

Морфологический фильтр

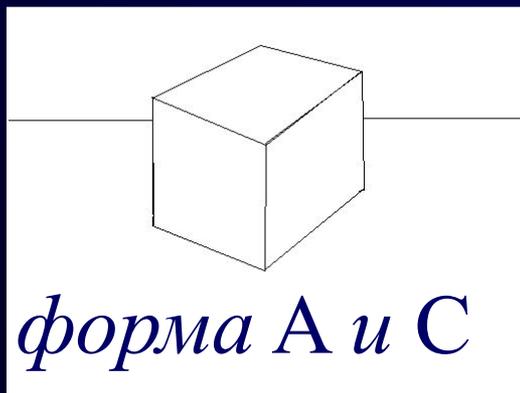
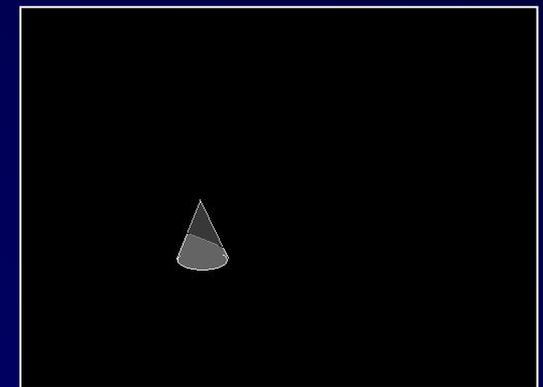
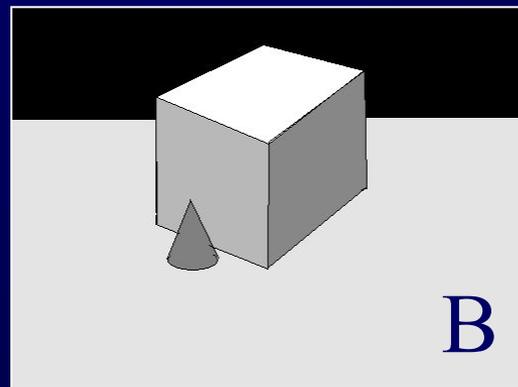
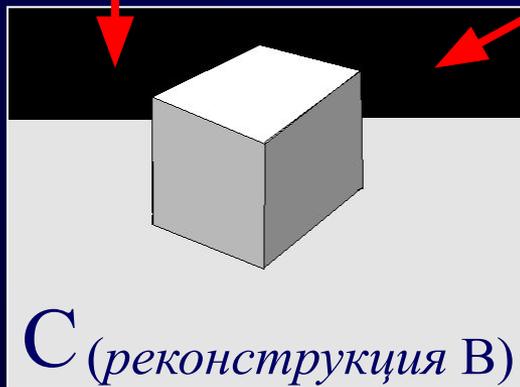
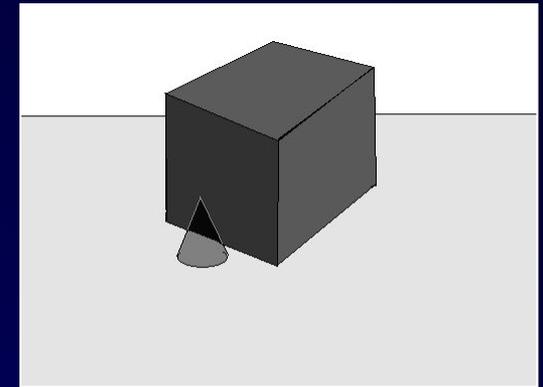
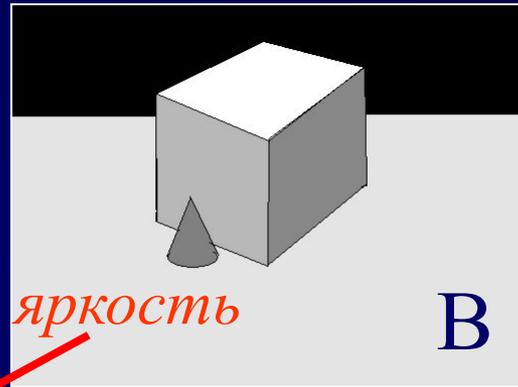
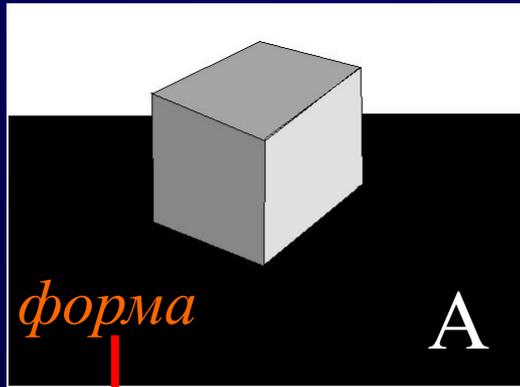
$$\phi_{\varepsilon\delta}(E) = \delta(\varepsilon(E)): \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda \rightarrow \mathfrak{D}$$

Сегментация + Реконструкция

	<i>множество образов</i>	<i>множество описаний</i>
<i>Искусственный изоморфизм</i>	$568 = 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$ $40 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3$ <i>Позиционные системы счисления</i>	$\langle 5, 6, 8 \rangle$ $\langle 1, 0, 1, 0, 0 \rangle$
<i>Естественный изоморфизм</i>	$28 = 2^2 \times 7^1$ <i>Разложение на простые множители</i>	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, \dots \rangle$
<i>Естественный гомоморфизм</i>	$f(x)$ $a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ <i>Аппроксимация полиномами</i>	$\langle a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \rangle$

Пример 1. Морфологический анализ Пытьева

Сравнение по форме, выделение отличий

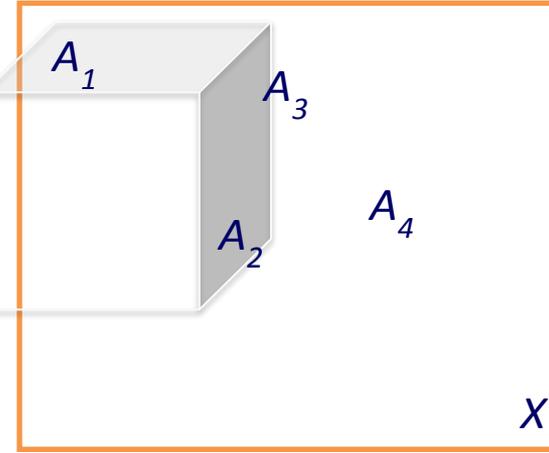
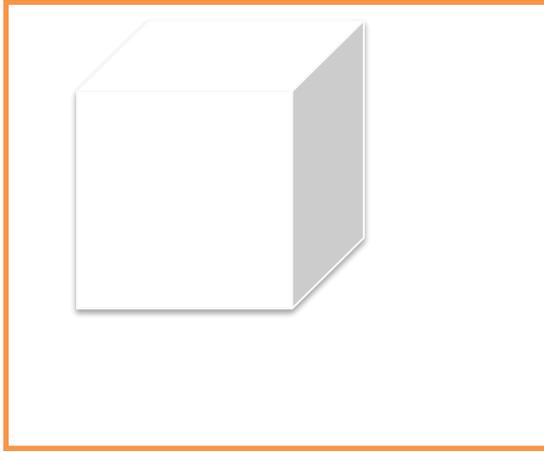


Алгоритм сравнения изображений по форме:

- Выделить связные области на изображении A.
- Вычислить среднюю яркость по областям A на B.
- Сформировать C по форме A с яркостями из B.
- Найти разность C и B.

Морфологический анализ Пытьева

Модель изображения - кусочно-постоянная функция



Индикаторная функция множества A_i

$$\chi_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A_i \\ 0, & (x, y) \notin A_i \end{cases} \quad (1)$$

Значение яркости(интенсивности) пикселя с координатами (x, y) (функция изображения)

$$f(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in A_1 \\ c_2, & (x, y) \in A_2 \\ c_3, & (x, y) \in A_3 \\ c_4, & (x, y) \in A_4 \end{cases} \quad (2)$$

c_1, \dots, c_4 – яркости областей A_1, \dots, A_4 фона и граней куба

X – поле зрения

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^4 c_i \chi_i(x, y), \quad (x, y) \in X \quad (3)$$

Морфологический анализ Пытьева

Проекция изображения на форму

Изображение , определенное на поле X

$$g(x, y), (x, y) \in X$$

Проекция вектора g
на плоскость $V(f)$

$$P_f g \in V(f) \Rightarrow P_f g = \sum_{i=1}^N c_i^* \chi_{A_i}$$

Форма изображения $V(f)$ в виде
множества

$$V(f) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y) \\ (x, y) \in X, \quad -\infty < c_i < \infty, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right\}$$

Определение коэффициентов

$$\rho_2(g, V(f)) = \min \left\{ \rho_2^2 \left(g, \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y) \right) \mid c_i, -\infty < c_i < +\infty, i = 1, \dots, N \right\}$$

Дифференцируя $\rho_2^2 \left(g, \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y) \right)$ по c_i , получим решение задачи в виде

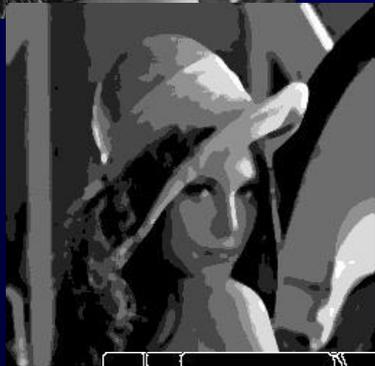
$$c_i^* = \frac{\int_X \chi_{A_i}(x, y) g(x, y) dx dy}{\int_X \chi_{A_i}(x, y) dx dy} = \frac{(\chi_{A_i}, g)}{\|\chi_{A_i}\|^2}$$

$$(20) P_f g = \sum_{i=1}^N \frac{(\chi_{A_i}, g)}{\|\chi_{A_i}\|^2} \chi_{A_i}(x, y)$$

(χ_{A_i}, g) - интеграл яркостей по области A_i $\|\chi_{A_i}\|^2$ - площадь области A_i

Морфологический анализ Пытьева

Описание формы



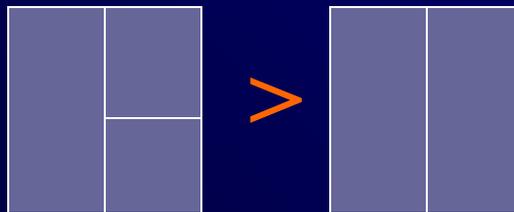
Нормированный коэффициент корреляции

Морфологический коэффициент корреляции:

$$1.0 \leq k_m \leq 1$$

2. k_m не зависит от преобразования яркости $F(f(x,y))$.

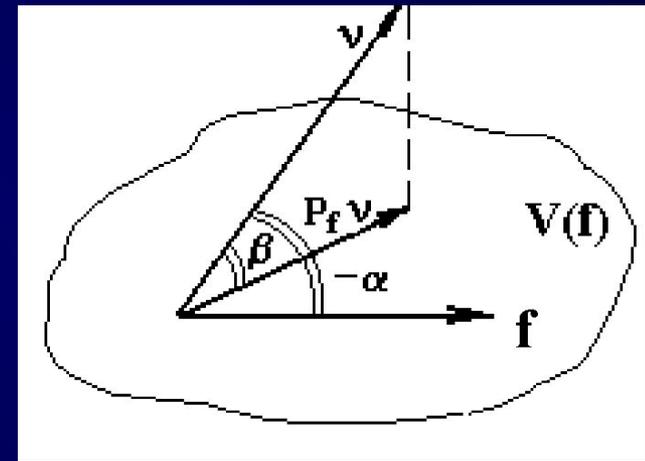
Сравнение форм:



$$k_u = \frac{(f, g)}{\|f\| \|g\|}$$

$$k_m = \frac{\|p_f g\|}{\|g\|}$$

Морфологический проектор



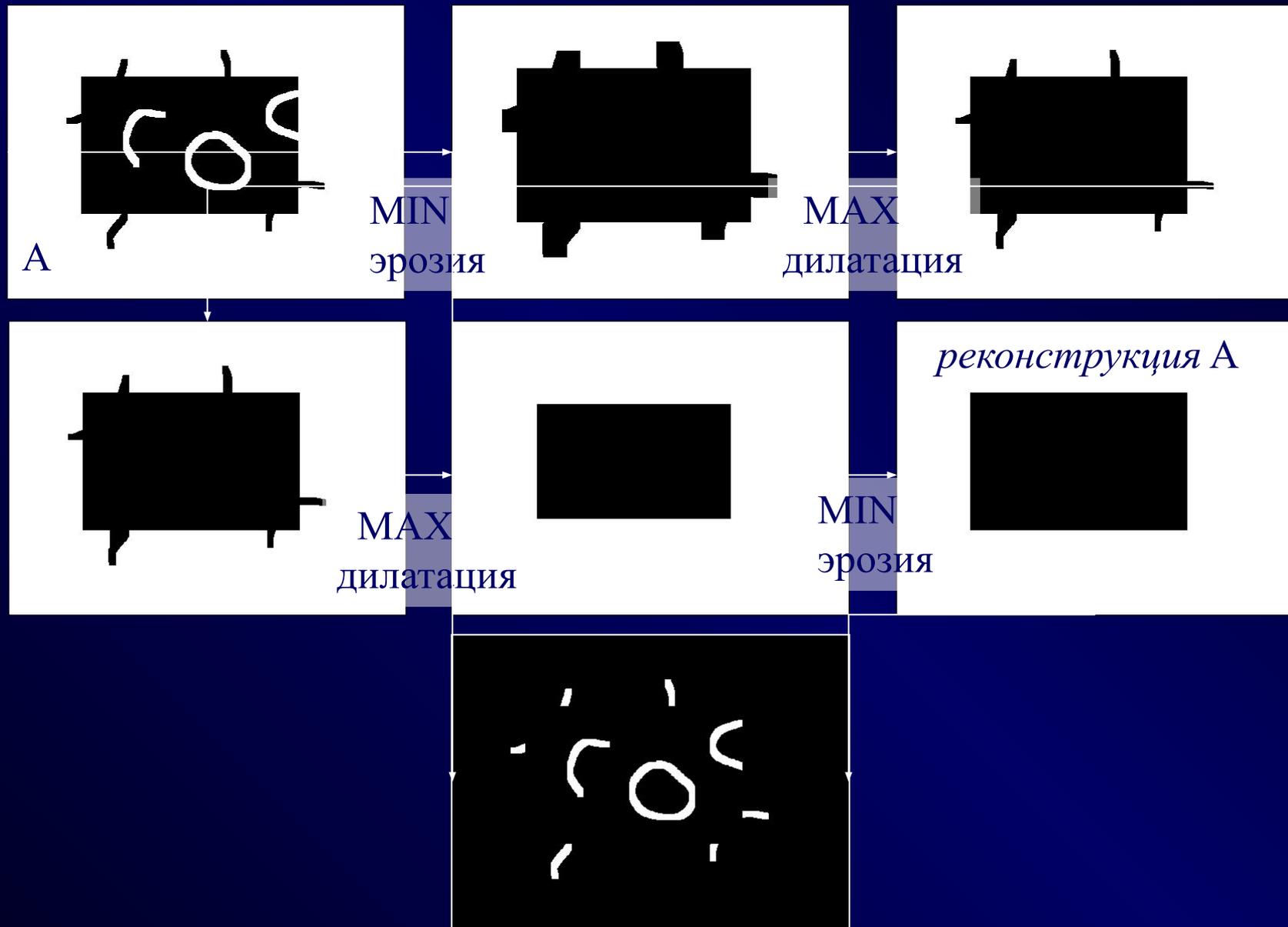
$$\alpha = \arccos k_u, \quad \beta = \arccos k_m$$

Морфологический анализ Пытьева

<i>Группа методов</i>	Морфологический анализ Ю.П.Пытьева
<i>Базовый математический формализм</i>	Функциональный анализ, Топологии разбиений
<i>Вид модели</i>	$Pr(f(x,y), \{\chi_i(x,y)\}) = \sum_i f_i * \chi_i(x,y)$ <p>где $\{\chi_i(x,y)\}$ – набор характеристических функций $\{0,1\}$, описывающих разбиение изображения на области постоянного значения яркости; f_i – соответствующие средние значения яркости.</p>
<i>Образы</i>	<i>Изображения как двумерные функции</i>
<i>Описания</i>	<i>Векторы коэффициентов разложения изображения по базису характеристических функций областей "формы"</i>

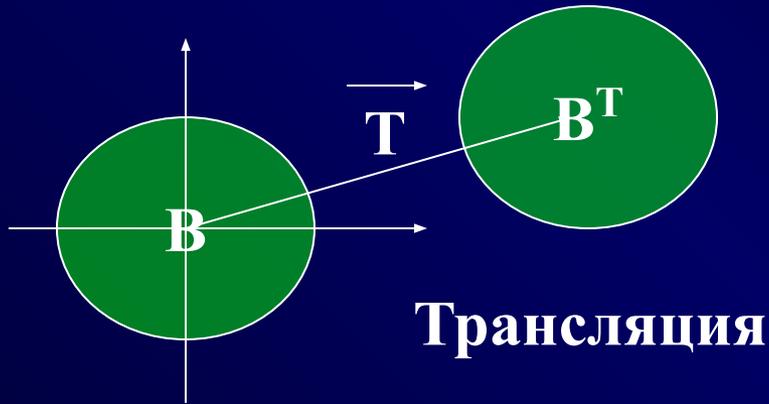
Пример 2. Математическая морфология Серра

Обработка с учетом формы, выделение деталей

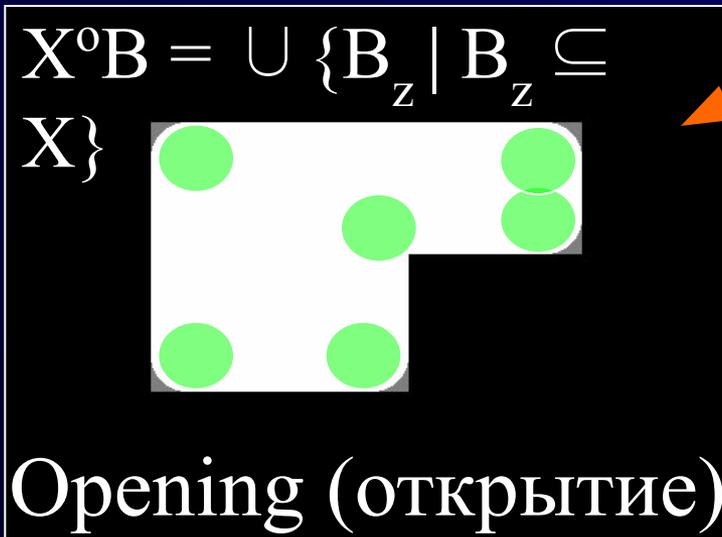
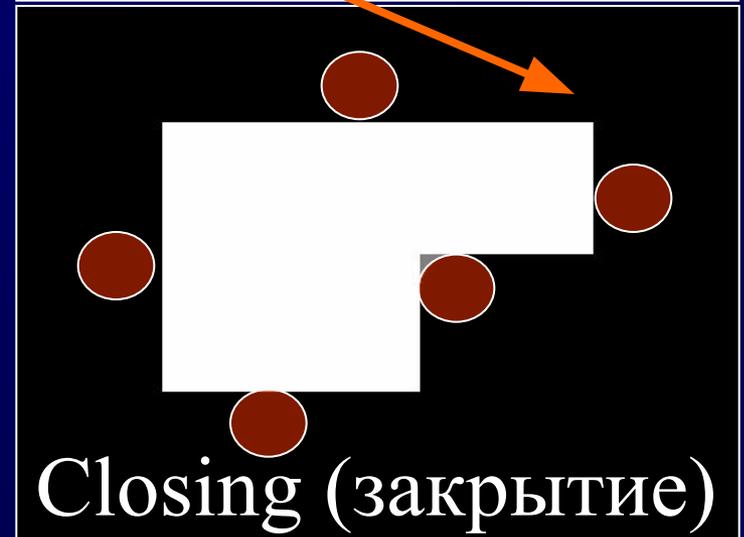
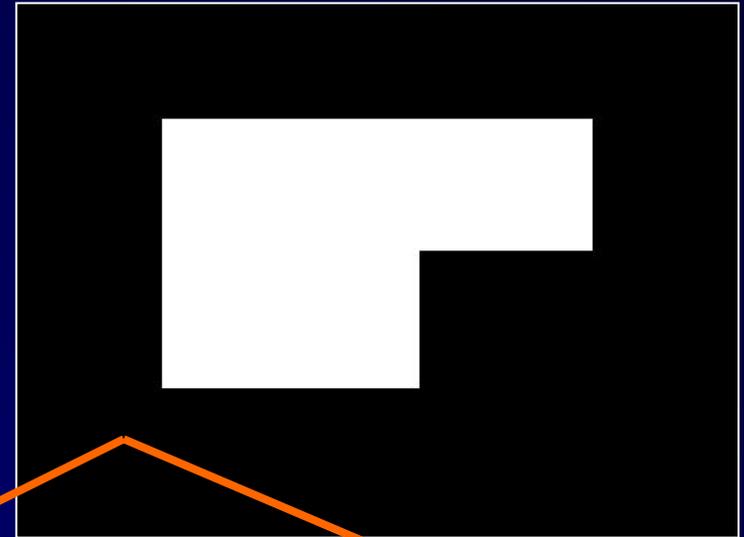


Математическая морфология Серра

Структурирующий элемент



Исходный образ



$$X \circ B = \bigcup \{B_z \mid B_z \subseteq X\}$$

Opening (открытие)

Closing (закрытие)

Математическая морфология Серра

Трансляция A по z :

$$A_z = \{y \mid a \in A, y = a + z\}.$$

Сложение Минковского (дилатация):

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \\ &= \bigcup \{B_a\} = \bigcup \{A_b\} \end{aligned}$$

Вычитание Минковского (эрозия):

$$A \ominus B = \{z \mid B_z \subseteq A\} = \bigcup \{A_z\}$$

Оператор, *сохраняющий включение*:

$$X \subseteq Y \Rightarrow \Psi(X) \subseteq \Psi(Y)$$

Экстенсивный оператор: $\Psi(X)$

$$\supseteq X$$

Антиэкстенсивный оператор:

$$\Psi(X) \subseteq X$$

Усиливающий оператор ($\Psi(\Psi(X)) \supseteq \Psi(X)$)

Ослабляющий оператор ($\Psi(\Psi(X)) \subseteq \Psi(X)$)

Открытие X по B :

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \bigcup \{B_z \mid B_z \subseteq X\}.$$

Закрытие X по B :

$$X \cdot B = (X \oplus B) \ominus B$$

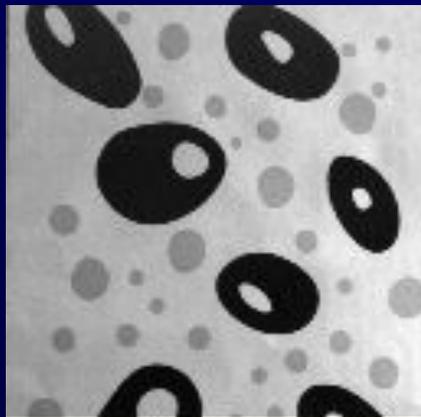
Проективный оператор ($\Psi(\Psi(X)) = \Psi(X)$)

Морфологическими фильтрами Серра

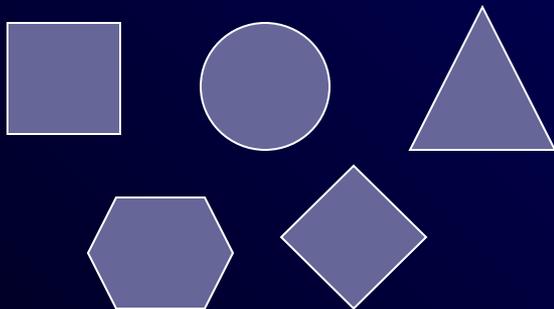
называется множество операторов, являющихся одновременно *проективными* и *сохраняющими включение*.

Математическая морфология Серра

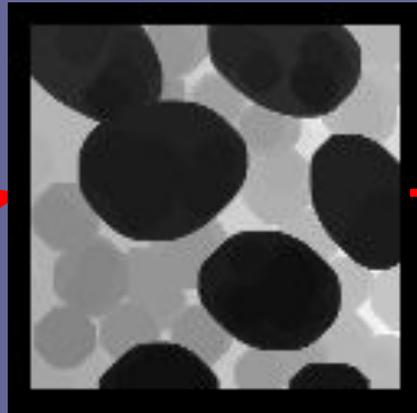
ММ-фильтрация



*Учет формы
путем выбора
структурирующих
элементов:*



ММ-операторы:

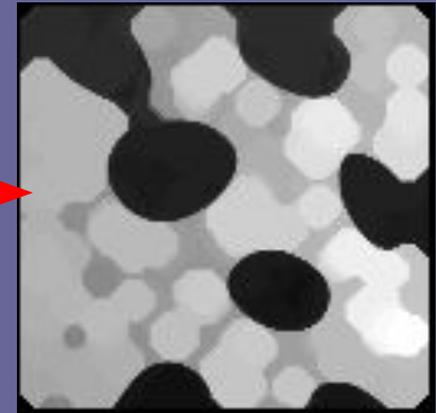


Эрозия (сжатие)

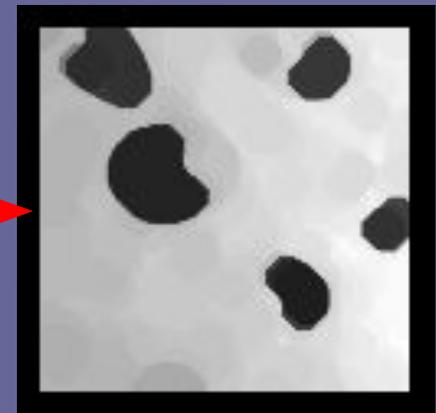


**Дилатация
(расширение)**

ММ-проекторы:

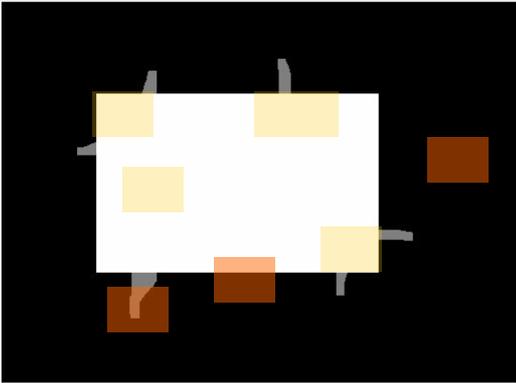


ММ-открытие

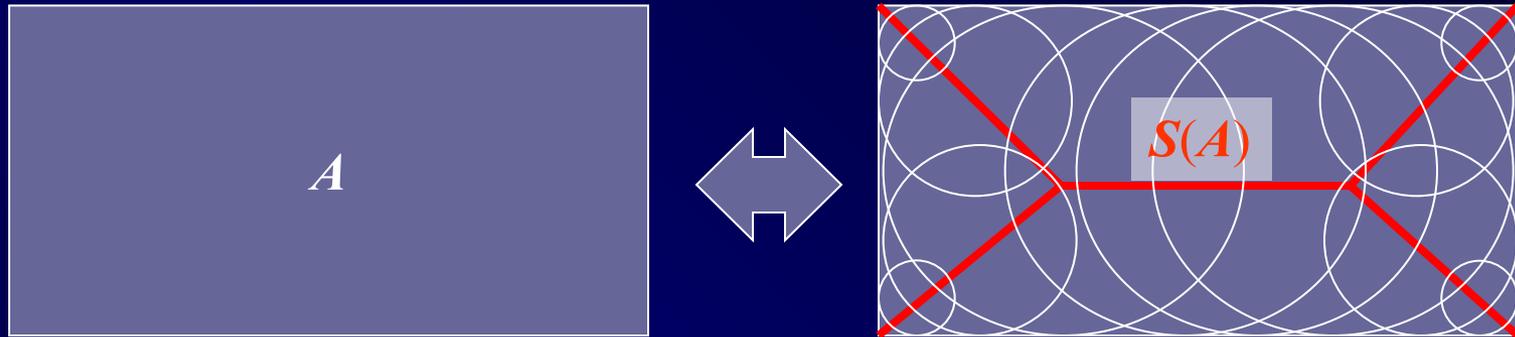


ММ-заккрытие

Математическая морфология Серра

<i>Группа методов</i>	Математическая морфология Серра
<i>Базовый математический формализм</i>	Теория множеств, теория решеток, топологии соседств и покрытий
<i>Вид модели</i> 	В теоретико-множественной форме: $A \circ \{B_i\} = \bigcup_i \{B_i : B_i \subseteq A\}$ где $\{B_i\}$ – система структурирующих элементов. В функциональной форме: $f(x,y) \circ \{g_i(x,y)\} = \text{Max}_i \{g_i(x,y) : g_i(x,y) \leq f(x,y)\}$ где $\{g_i(x,y)\}$ – система структурирующих элементов.
<i>Образы</i>	<i>Фигуры как множества точек</i>
<i>Описания</i>	<i>Множества центров структурирующих элементов</i>

Пример 3. Бинарная морфология на базе скелетов



Фигурой называется связная замкнутая область плоскости, ограниченная конечным числом непересекающихся жордановых кривых.

Пусть P – евклидова плоскость, $D(p,r)$ – *открытый круг* радиуса r с центром в точке p .

Пустым или *вписанным кругом* фигуры A называется круг $D(p,r) \subseteq A$.

Максимальным пустым кругом называется пустой круг, который не содержится целиком ни в одном другом пустом круге данной фигуры.

Скелетом $S(A)$ фигуры A называется множество центров всех ее максимальных пустых кругов.

Радиальной или *дистанционной функцией* $r_A(p)$ точки $p \in P$ для фигуры A называется максимальная величина радиуса пустого круга с центром в данной точке.

Бинарная морфология на базе скелетов

Группа методов	Математическая морфология Серра
Базовый математический формализм	Геометрия, теория графов
Вид модели	$A = \bigcup_{p \in S(A)} \{ D(p, r_A(p)) \}$ <p>где $D(p,r)$ – открытый круг радиуса r с центром в точке p, $S(A)$ - скелет фигуры A; $r_A(p)$ - дистанционная функция точки p для фигуры A.</p>
Образы	Множества точек, ограниченные конечным множеством жордановых кривых
Описания	Скелеты + радиальные функции

ПРОЕКТИВНОСТЬ

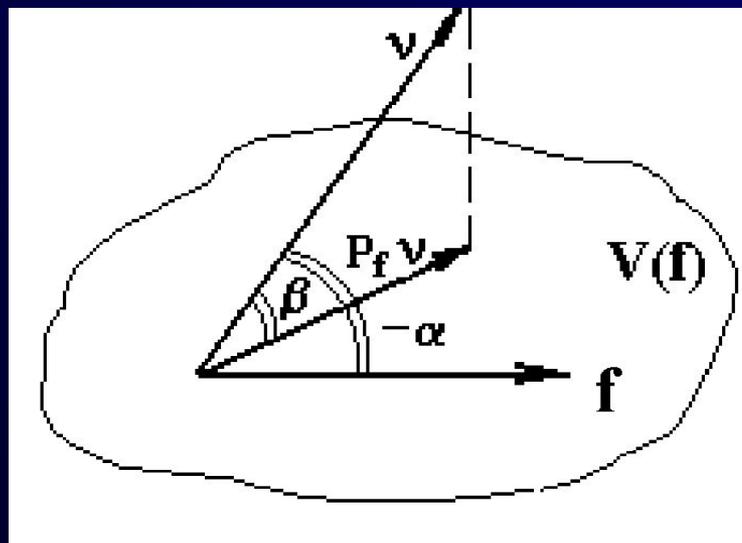
Проекторы как распознающие операторы (М. Павел)

Структурный фильтр: процедура преобразования образа к виду, соответствующему заданному классу структур.

Алгебраический проектор:

$$F(X)=F(F(X))$$

Геометрическая интерпретация:

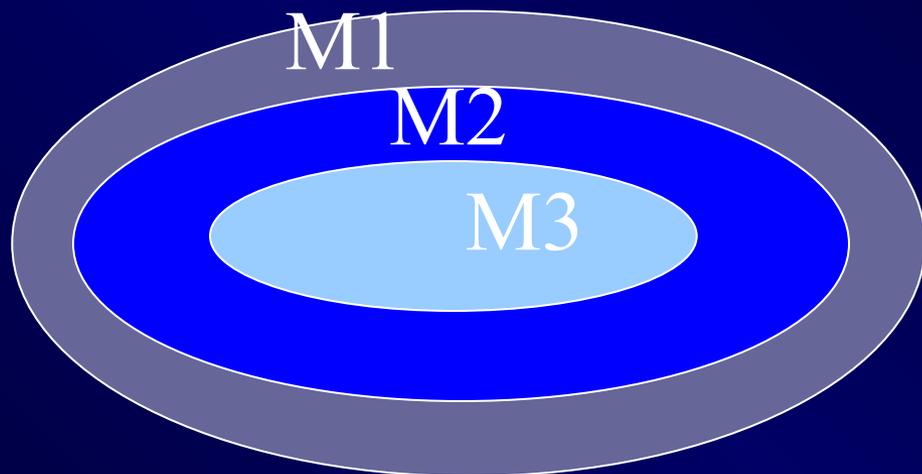


Два способа описания класса:

Проектор – оператор, ставящий в соответствие любому образу образ из модельного множества.

Модель (модельное множество) – множество стабильных элементов проектора.

Сравнение форм по сложности (Пытьев)



$$M3 \subseteq M2 \subseteq M1$$

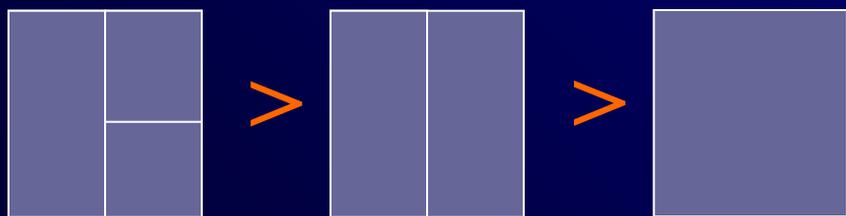
Морфологическая сложность:

Если одно модельное множество целиком принадлежит другому, то соответствующая форма изображения *не сложнее* (проще).

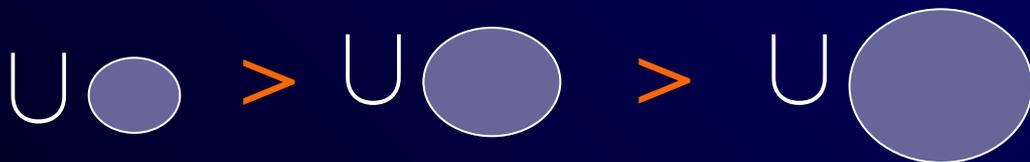
Структурная сложность:

Чем больше элементов в модели, тем сложнее описание.

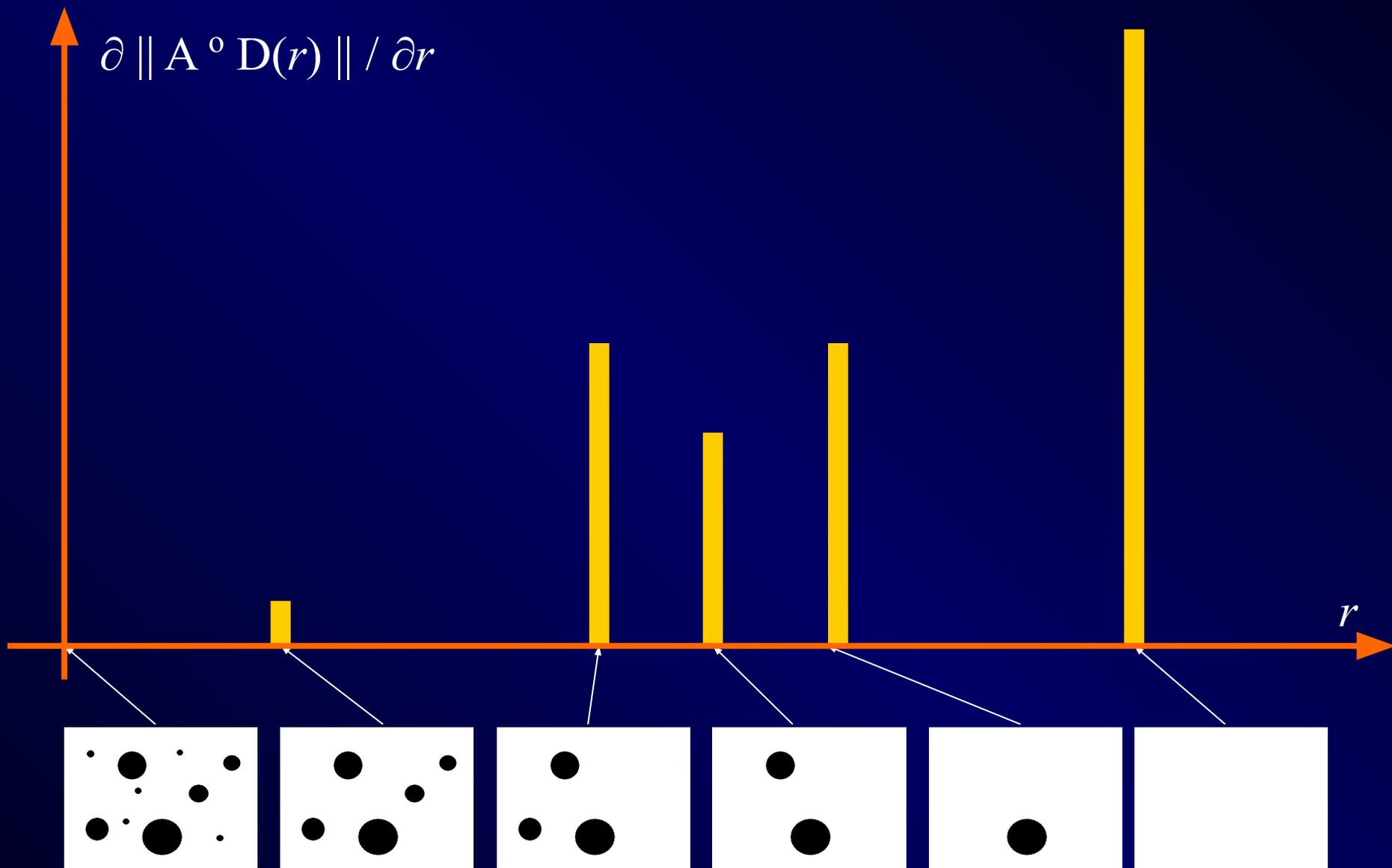
Морфология Пытьева



Морфология Серра



Морфологический спектр (Maragos)



монотонное убывание сложности

АЛГЕБРА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Морфологические алгебры

Общие особенности рассмотренных методов

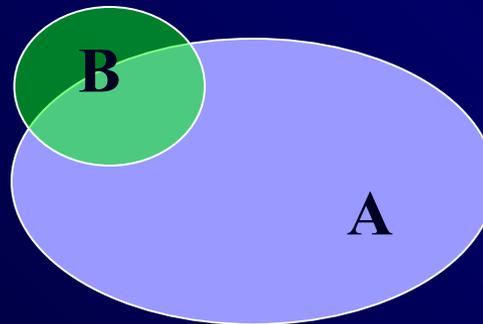
Оператор проекции - *фильтр со следующими свойствами:*

- Проектор в алгебраическом смысле
- Проекция образа на образ имеет линейный вид:
$$\text{Pr}(A,B)=r(A,B)*B$$
- Проекция образа на набор образующих представляет собой комбинацию проекций на каждую

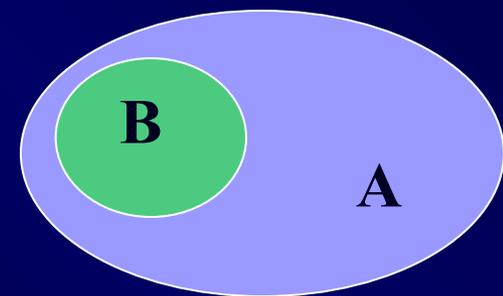
образующую
Пример - *ММ Серра*

$$B \subseteq A \quad r(A,B) = \begin{cases} 1, & \text{если} \\ 0, & \text{если } B \not\subseteq A \end{cases}$$

$\text{Pr}(A,B)=\emptyset$



$\text{Pr}(A,B)=B$



Морфологические алгебры

<i>Группа методов</i>	<u>Обобщение</u> : Проективная морфология
<i>Базовый формализм</i>	Универсальная алгебра
<i>Вид модели</i>	<i>Модели с однородными связями</i> $\text{Pr}(A(\mathbf{p}), \{\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}) = V_{\mathbf{q}} \{A(\mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ где $\mathbf{p}=(x, y)$; $A(\mathbf{p})$ – анализируемое изображение; $\{\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ – <i>набор образующих</i> (примитивов) структурного разложения; \mathbf{q} – <i>вектор параметров</i> разложения; $A(\mathbf{q})$ – образ изображения в <i>пространстве параметров</i> ; $'V' \in \{\Sigma, \text{MAX}, \text{П}, \text{MIN}\}$ – коммутативная и ассоциативная операция поэлементного <i>объединения (кумулятивной сборки)</i> .
<i>Объединение ключевых идей частных методов</i>	<ul style="list-style-type: none">• Линейные и нелинейные операторы• Монотонные и ортогональные операторы• Морфологические спектры• Морфологические коэффициенты корреляции• Голосование в пространство параметров• Прямой и косвенный учет формы изображений и объектов

Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Интерполяционные многочлены

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы $n+1$ опорных (узловых) точек: $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Пусть, кроме того, известны значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках. Многочлен $I_n(x)$ степени не более n , такой что $I_n(x_i) = f(x_i)$, $i=0..n$, будет иметь следующий вид **(в форме Лагранжа)**:

$$I_n(x) = \sum_i f(x_i) \cdot L(x_i, x),$$

$$L(x_i, x) = \frac{((x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n))}{((x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n))}.$$

Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Проективная морфология на базе интерполяционных многочленов

Проективная морфология:

$$A = \sum_{k=1..n} (a_k E_k),$$

$$\Pr(A, \mathbf{E}) = \sum_{k=1..n} (\Pr(A, E_k)) = \sum_{k=1..n} (r(A, E_k) \cdot E_k).$$

Морфология на базе интерполяции:

$$A = f(x); \mathbf{E} = \{E_k\} = \{L(x_k, x)\}; \Pr(A, \mathbf{E}) = I_n(x); V = \Sigma;$$

$$r_k(A, E_k) = f(x_k); \Pr_k(A, E_k) = r_k(A, E_k) \cdot E_k = f(x_k) \cdot L(x_k, x).$$

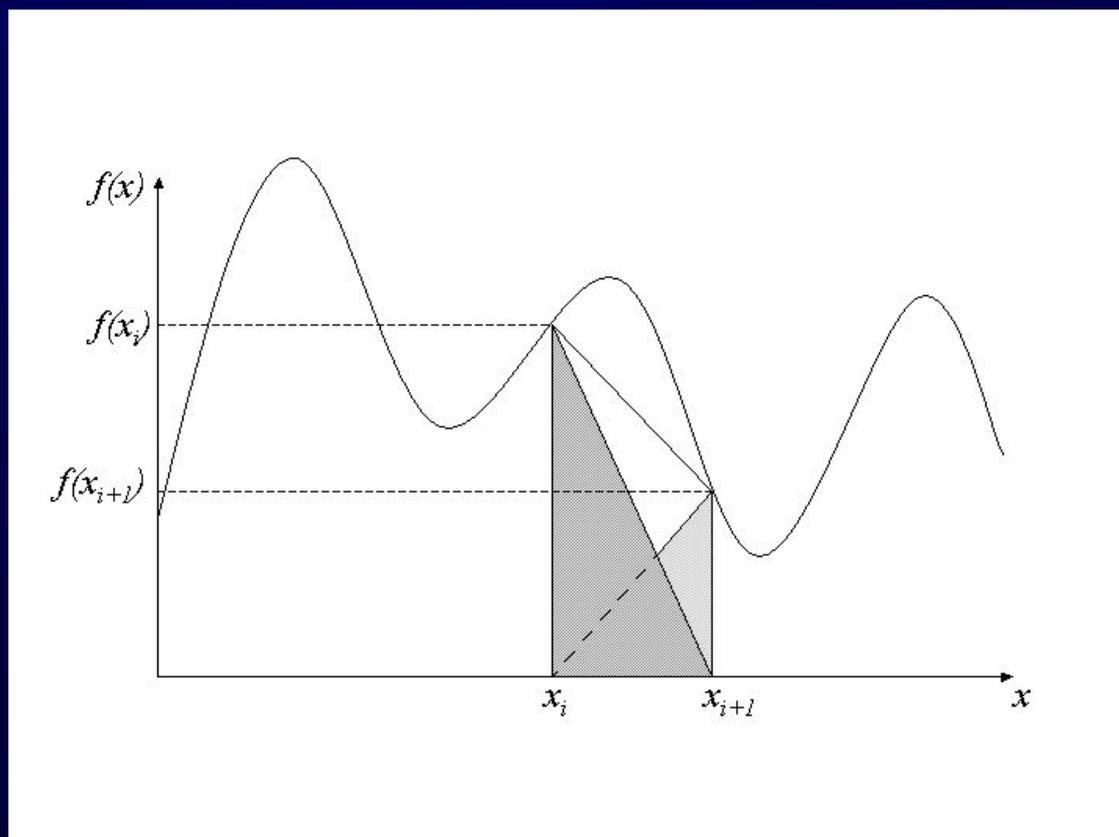
Ортогональный базис:

$$\forall E_i, E_k \in \mathbf{E}, k \neq i: \Pr_k(E_i, E_k) = 0, \Pr_i(E_k, E_i) = 0.$$

Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Кусочно-линейная интерполяция функции на отрезке

$$I(x) = f(x_i)(x - x_{i+1}) + f(x_{i+1})(x - x_i).$$



Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Морфология на базе кусочно-линейной проекции

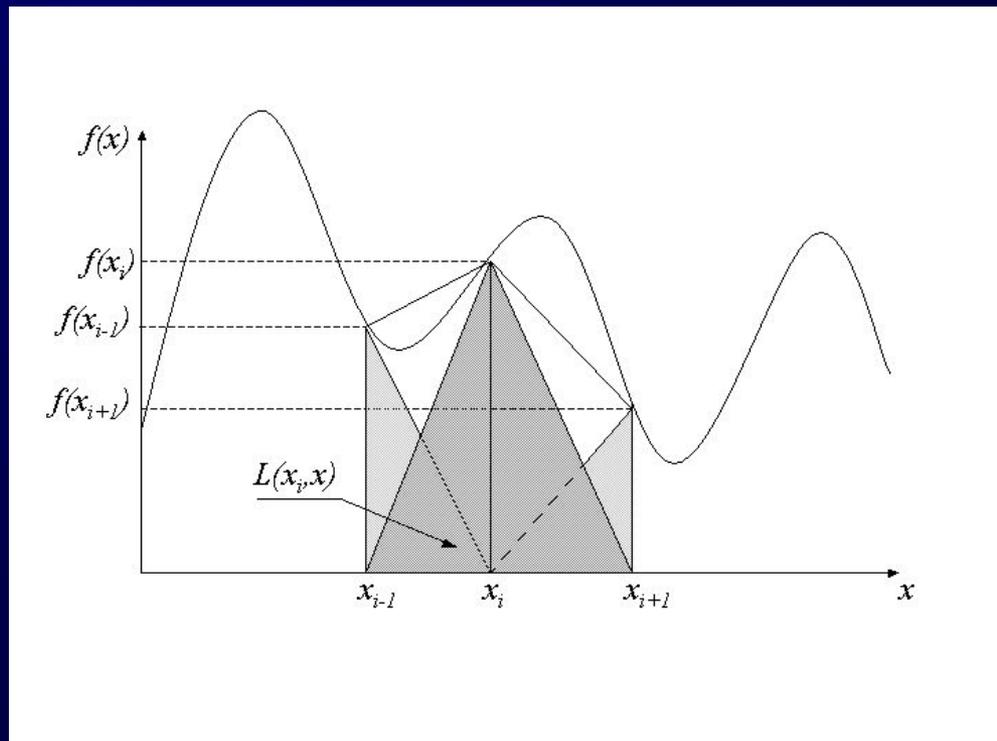
$$I(x) = \sum_i f(x_i) \cdot L(x_i, x),$$

$$L(x_i, x) = \left\{ \begin{array}{l} (x - x_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) : x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (x - x_{i+1}) / (x_i - x_{i+1}) : x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ \end{array} \right\}$$

$$0 : x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}].$$

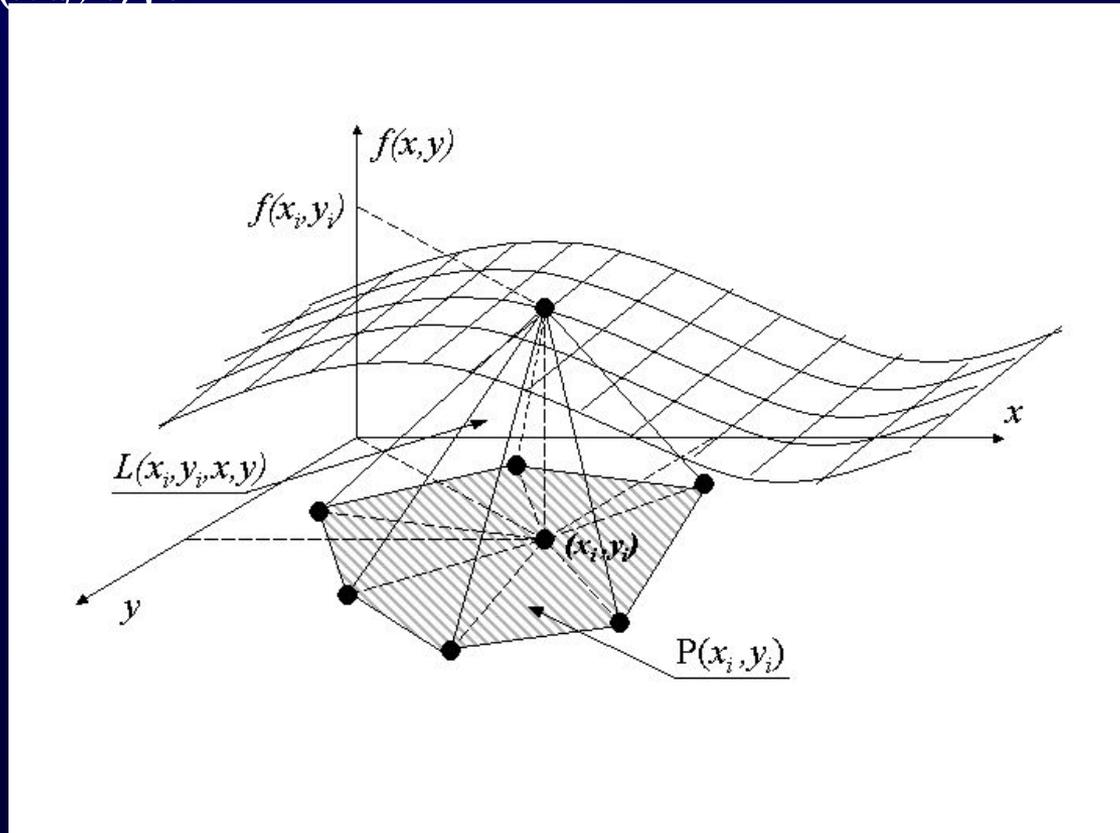
Вид опорной функции:



Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Вид опорной функции

$$L(x_p, y_p, x, y) = \{0: (x, y) \notin P(x_i, y_i);$$
$$((x-x_j)(y-y_k)-(y-y_j)(x-x_k))/((x_i-x_j)(y_i-y_k)-(y_i-y_j)(x_i-x_k)):(x, y)$$
$$\in T_{ijk} \in P(x_i, y_i)\}.$$



Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Проективная морфология на базе двумерной
кусочно-линейной интерполяции:

$$I(x,y) = \sum_i f(x_i, y_i) \cdot L(x_i, y_i, x, y),$$

$$A=f(x,y); \mathbf{E}=\{E_k\}=\{L(x_k, y_k, x, y)\}; \Pr(A, \mathbf{E}) = I(x,y); V=\Sigma;$$

$$r_k(A, E_k) = f(x_k, y_k); \Pr_k(A, E_k) = r_k(A, E_k) \cdot E_k = f(x_k, y_k) \cdot L(x_k, y_k, x, y).$$

Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Морфологический коэффициент корреляции:

$$K(g,f) = \min(\|\Pr(g,f)\|, \|g\|) / \max(\|\Pr(g,f)\|, \|g\|),$$

$$\Pr(g,f) = \sum_i g(x_i, y_i) \cdot L(x_i, y_i, x, y)$$

«Форма» двумерной функции:

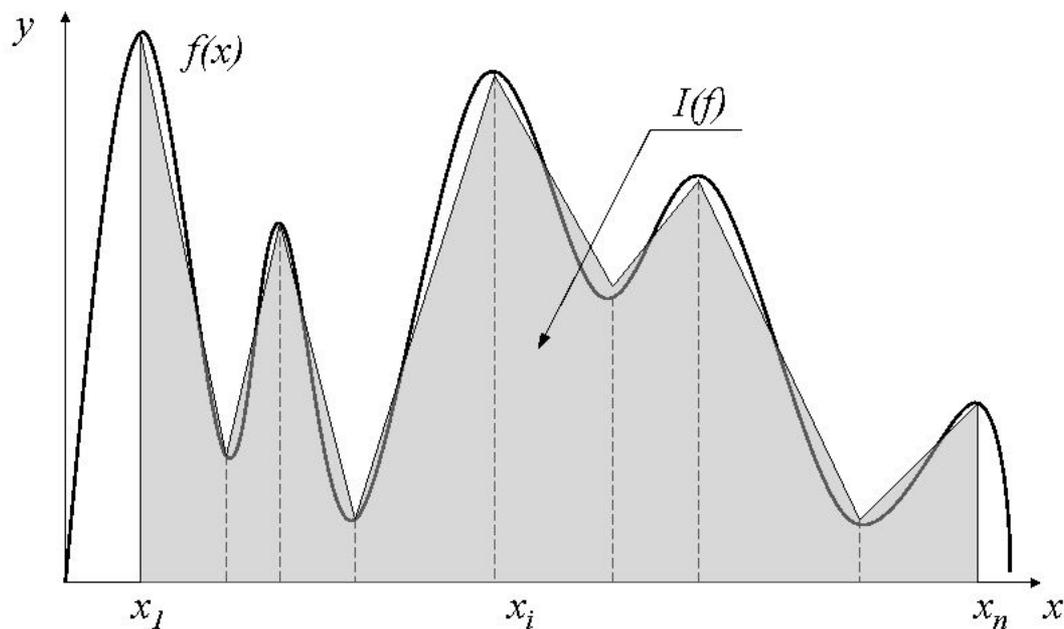
$$Z = \{ \sum_i a_i \cdot L(x_i, y_i, x, y) : a_i \in \mathbb{R} \},$$

$$\{(x_i, y_i)\} = \text{lextr2}(f(x, y)),$$

$\text{lextr2}(f(x, y))$ – **множество локальных экстремумов** кусочно-линейной функции $f(x, y)$.

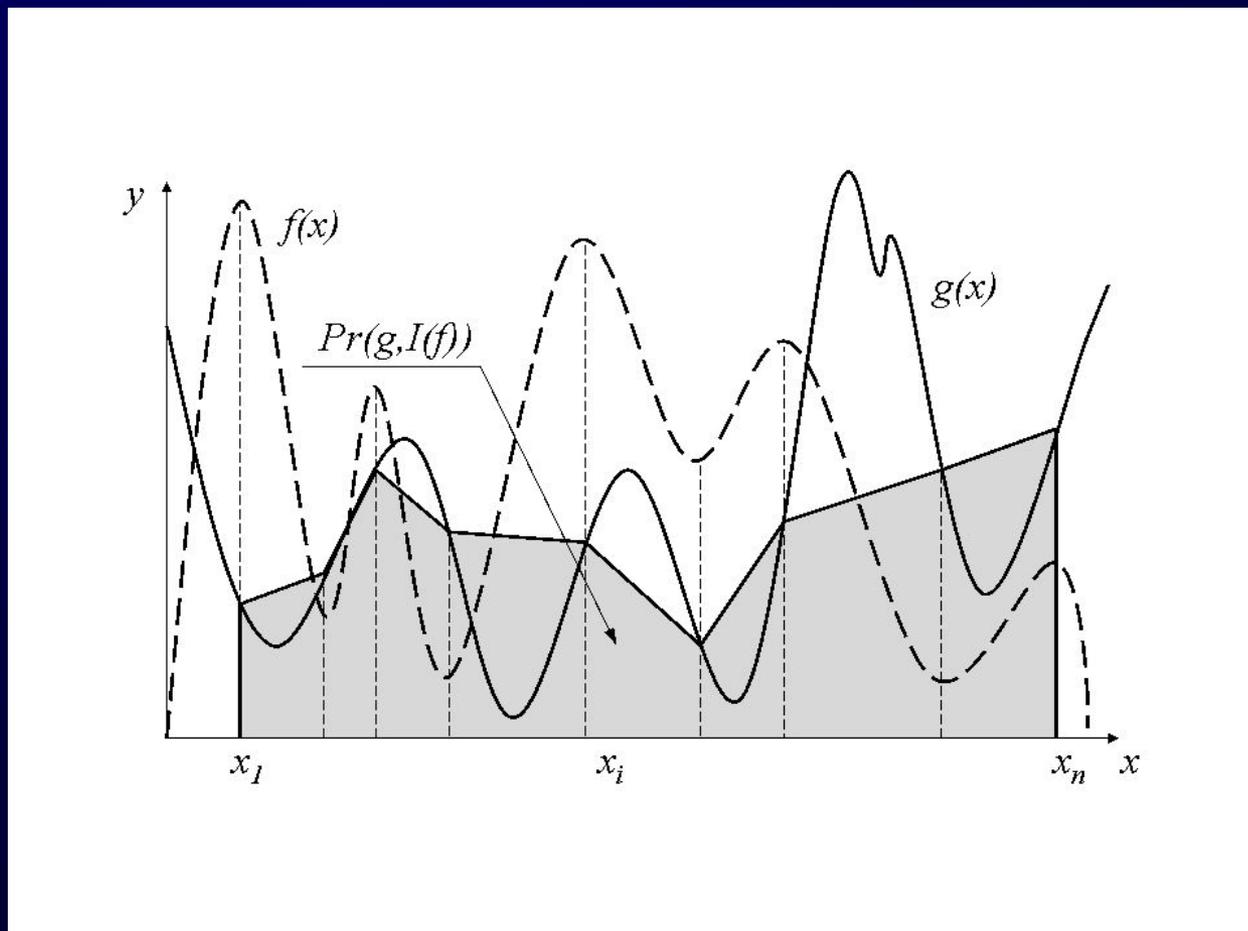
Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Сравнение по форме: Проекция на сходную форму



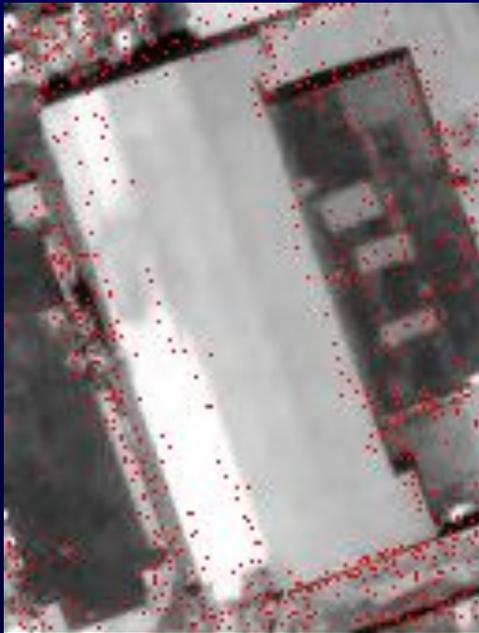
Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Сравнение по форме: Проекция на отличающуюся форму:



Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Форма двумерной функции

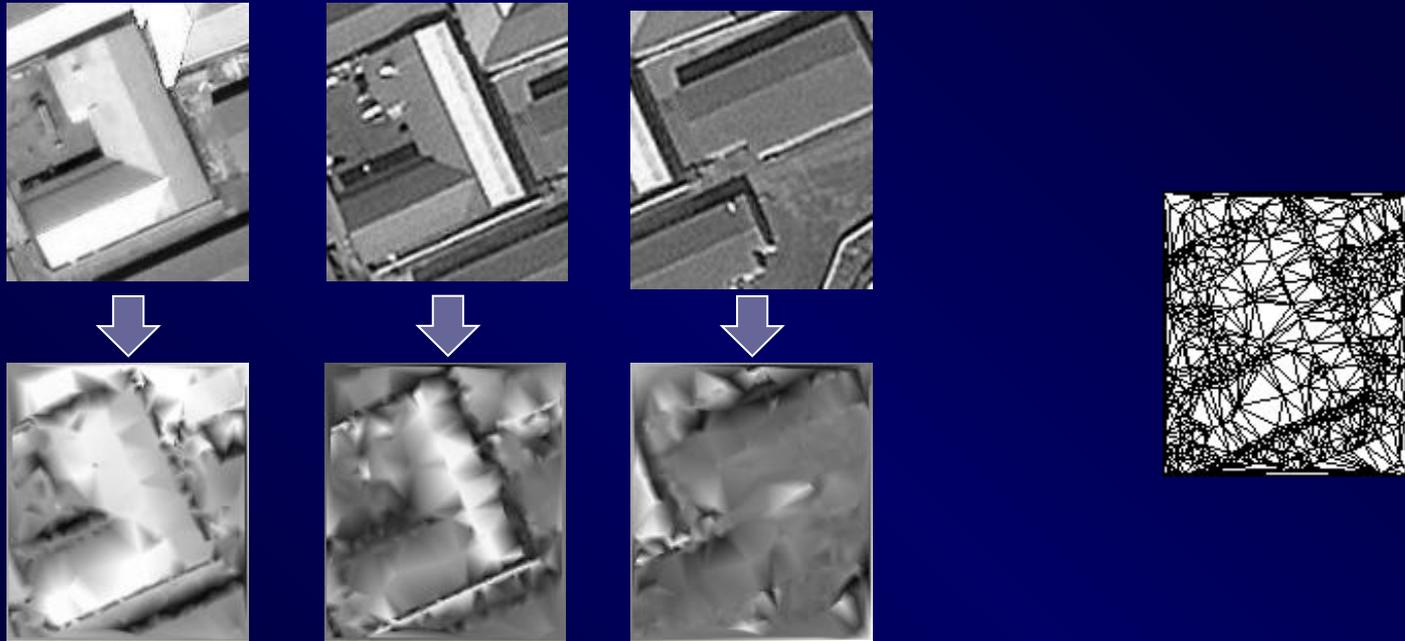


Вычисление интерполяционной проекции изображения на собственную кусочно-линейную форму:

- расположение значимых экстремумов;
- соответствующая триангуляция;
- кусочно-линейная интерполяционная проекция.

Пример. Проективные морфологии на базе методов интерполяции

Сравнение по форме двумерных функций



Примеры вычисления интерполяционной проекции на кусочно-линейную форму:

- форма, определяемая триангуляцией по значимым экстремумам эталона;
- эталонное изображение объекта и проекция эталона на форму;
- тестовое изображение объекта и проекция тестового изображения на форму;
- изображение другого объекта и проекция другого объекта на форму эталона.

ПРОСТРАНСТВО РАЗЛОЖЕНИЙ

Проективные морфологические разложения

Проективные морфологические разложения

<u>Линейное подпространство образов:</u>	$\forall A \in B: A = \bigvee_{k=1..n} a_k \cdot B_k$	B - замыкание произвольного множества образов $B = \{B_k\} \subseteq \Omega$
<u>Базис линейного подпространства:</u>	Образы из B линейно независимы	
<u>Проекция образа на подпространство:</u>	$\text{Pr}(A, B) \in B; \text{Pr}(A, B) = \text{Pr}(\text{Pr}(A, B), B);$ $\text{Pr}(\emptyset, B) = \emptyset; \text{Pr}(a \cdot A, B) = a \cdot \text{Pr}(A, B).$	
<u>Условие разложимости образов из Ω по базису E:</u>		
$\exists E \subseteq \Omega: \text{Pr}(A, E) = \bigvee_{k=1..n} \text{Pr}(A, E_k) = \bigvee_{k=1..n} r(A, E_k) \cdot E_k$		
E – базис разложения, если проекция образа на E есть объединение его проекций на образующие из E		
<u>Проективное морфологическое разложение:</u>	Система $\{\Psi, \Omega, \mathbf{V}, \mu, \text{Pr}, E\}$, для которой справедливо условие разложимости.	Условие разложимости в каждом частном случае необходимо доказывать
<u>Оператор морфологического разложения образа по базису</u>	$\text{dec}_E(A) = \mathbf{a}(A, E) = \{r(A, E_k)\}: \Omega \rightarrow \Psi^n$	Отображает образ на вектор коэффициентов линейной связи с образующими базиса
<u>Пространство векторов разложений</u>	$\Theta = \Psi^n \subseteq \mathbb{R}^n$ - также проективное пространство, на котором определены	объединение векторов, умножение вектора на скаляр, проекция вектора на вектор и норма вектора.
<u>Сопряженное пространство:</u>	$\text{Pr}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b},$ $\forall A, B, C \in E: C = \text{Pr}(A, B) = r(A, B) \cdot B;$ $\mathbf{a} = \text{dec}_E(A), \mathbf{b} = \text{dec}_E(B), \mathbf{c} = \text{dec}_E(C),$ $\mathbf{c} = \text{Pr}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}; r(A, B) = r(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	линейная связь векторов разложений равна линейной связи исходных образов.
<u>Нормированный коэффициент линейной корреляции разложений:</u>	$K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ \text{Pr}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ / \ \mathbf{a}\ ,$ (a) $0 \leq K(\mathbf{a}, \mathbf{b});$ (b) $A = B \Rightarrow K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1;$ (c) $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \text{Pr}(A, B) = \emptyset.$	Отношения векторов из Θ адекватно описывают отношения образов из $\Omega.$

Проективные морфологические разложения

Типы морфологических разложений

Условие разложимости:

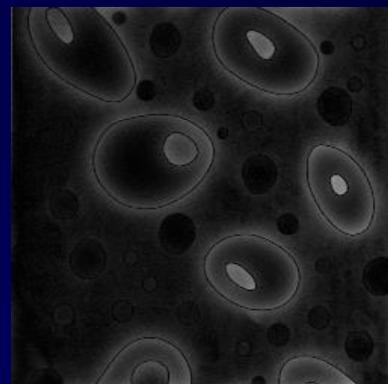
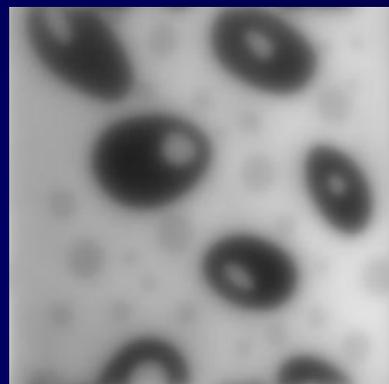
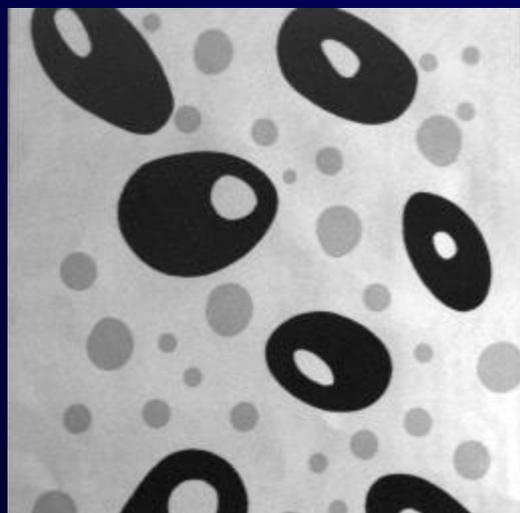
$$\exists E \subseteq \Omega: \Pr(A, E) = \bigvee_{k=1..n} (\Pr(A, E_k)) = \bigvee_{k=1..n} (r(A, E_k) \cdot E_k)$$

Типы морфологических разложений:	Алгебраическая структура	<u>Достаточные условия разложимости:</u>	Особенности, примеры
<u>Монотонные разложения:</u>	Ω - частично упорядоченное множество: $\forall A, B \in \Omega: \sup(A, B) = A \vee B,$ $\inf(A, B) = A \wedge B.$ Отношение включения: $\forall A, B \in \Omega: A \subseteq B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \vee B = B, \ A\ \leq \ B\ .$	(а) сохранение включения: $\forall A, B, C \in \Omega, A \subseteq B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Pr(A, C) \subseteq \Pr(B, C).$ (б) монотонность: $\forall A, B \in \Omega,$ $\Pr(B, A) \subseteq \Pr(A, A) = A.$	Для монотонных проекторов, сохраняющих включение, любой базис является базисом морфологического разложения (Морфология Серра)
<u>Ортогональные разложения:</u>	Ортогональность образов $A, B \in \Omega: A \perp B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \{\Pr(A, B) = \emptyset; \Pr(B, A) = \emptyset\}.$	(а) ортогональность базиса (б) сохранение объединения: $\forall A, B, C \in \Omega, A \vee B \Leftrightarrow$ $\Pr(A \vee B, C) = \Pr(A, C) \vee \Pr(B, C).$	Для проектора, сохраняющего объединение, любой ортогональный базис является базисом морф. разложения. (Разложения Фурье, вейвлет-преобразования, морфология Пытьева)
<u>Квази-ортогональные разложения:</u>	Ω - полурешетка	(а) сохранение объединения (б) поглощение на базисе: $\forall E_1: E_1 = E_1 \vee (\bigvee_{k \neq 1} \Pr(E_k, E_1))$	Любой базисный элемент включает объединение проекций на него всех других.

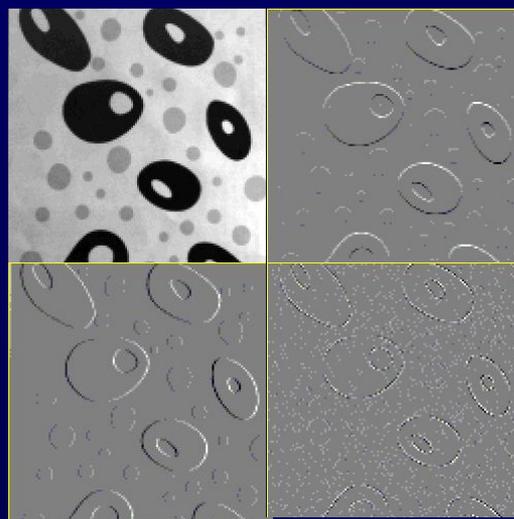
Проективные морфологические разложения

Ортогональные морфологии на базе БПФ и т.п.

БПФ, ДКП, фильтры НЧ, ВЧ



Вейвлет-преобразование и фильтры



Проективные морфологические разложения

<i>Группа методов</i>	Частотные и пространственно-частотные методы
<i>Базовый математический формализм</i>	Функциональный анализ, разложение в ряды ортогональных функций
<i>Вид модели</i>	$\text{Pr}(f(x,y),\{\phi_i(x,y)\}) = \sum_i c_i * \phi_i(x,y)$ где $\{\phi_i(x,y)\}$ – система ортогональных функций; c_i – соответствующие коэффициенты Фурье
<i>Ключевые идеи</i>	Фильтрация в частотной и пространственно-частотной области. <i>Разложения. Спектры. Прямое и обратное преобразование. Область пропускания.</i>

Проективные морфологические разложения

Морфологический анализ изображений

Переход от образов к изображениям (двумерным функциям):

Введем пространства параметров изображения P и разложения Q :

$$A \rightarrow A(\mathbf{p}); E_k \rightarrow E_k(\mathbf{p}) \rightarrow \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}); E \rightarrow E(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Морфологические разложения изображений:

Морфо-геометрическая проекция:

$$\text{Pr}(A(\mathbf{p}), E(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \mathbf{V}_{\mathbf{q} \in Q} (A(\mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})).$$

Морфо-геометрическое разложение:

$$\text{dec}(A(\mathbf{p})) = A(\mathbf{q}): \Omega(P) \rightarrow \Theta(Q).$$

Проекция разложения на разложение:

$$\text{Pr}(A(\mathbf{q}), B(\mathbf{q})) = r(A(\mathbf{p}), B(\mathbf{p})) \cdot B(\mathbf{q}).$$

Нормированный коэффициент линейной корреляции разложений:

$$K(A(\mathbf{q}), B(\mathbf{q})) = \|\text{Pr}(A(\mathbf{q}), B(\mathbf{q}))\| / \|A(\mathbf{q})\|.$$

Проективные морфологические разложения

Морфологический анализ изображений

Фильтрация изображений с использованием разложений:

Полный базис Ω : $\forall A(p) \in \Omega$:	$Pr(A(p), E(p, q)) = A(p)$.	
<u>Морфологическое преобразование:</u>	$\psi(A(p)) = \bigvee_{q \in Q} \psi(q) \cdot A(q) \cdot \phi(p, q)$	$\psi(q) \in \Psi$ – весовая функция данного преобразования.
Морфологический фильтр:	$\psi(\psi(A(p))) = \psi(A(p))$	преобразование-проектор
Область пропускания фильтра:	$f(A(p)) = \bigvee_{q \in Q} (f(q) \cdot A(q) \cdot \phi(p, q))$, $f(q) \in \{0, 1\}$	весовая функция не зависит от изображения
<u>Унифицированная двухэтапная схема структурной фильтрации:</u>	Этап1: Деконструкция (разложение, анализ).	Проектирование изображения на образующие элементы преобразования.
	Этап2: Частичная реконструкция (синтез).	Объединение проекций на те элементы, которые находятся в области пропускания фильтра.
<u>Морфологические спектры:</u>	<u>Интегральный спектр:</u> $Sr(A(p), q_1) = [\sum_{(q_2 \in Q)} A(q_1, q_2) ^m]^{1/n}$, $q = (q_1, q_2)$, q_1 – подвектор <i>параметров-характеристик</i> , q_2 – подвектор <i>параметров локализации</i> . <u>Дифференциальный спектр</u> – производная интегрального спектра.	Спектры вычисляются на основе морфологических разложений. Если максимумы спектров сигнала и помехи не совпадают, фильтрация может быть эффективной.

Проективные морфологические разложения

Морфологический анализ изображений

Структурное сравнение изображений (обобщение методики Ю.П. Пытьева)

Структурный проектор = Морфологический фильтр, применяемый к образу A , область пропускания которого согласована с образом B .

Характеристический базис образа B :

$$E_{\chi}(B) = \{\chi(b_k) \cdot E_k, E_k \in E\},$$

$$\chi(x) = \{0, \text{ если } x=0; 1 - \text{ в противном случае}\},$$

где E – исходный базис, $\chi(x)$ - индикатор структурной связи.

Морфологическая проекция образа A на модель образа $[B]$:

$$\text{Pr}(A, [B]) = \mathbf{V}_{k=1..n} (a_k \cdot \chi(b_k) \cdot E_k) = \text{Pr}(A, E_{\chi}(B)).$$

Морфологическая проекция разложений:

$$\text{Pr}(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = \text{Pr}(\{a_k\}, [\{b_k\}]) = \{a_k \cdot \chi(b_k)\}.$$

Структурный морфологический коэффициент корреляции:

$$K_{\text{стр}}(A, B) = \|\text{Pr}(\mathbf{a}, [\mathbf{b}])\| / \|\mathbf{a}\|,$$

где $A, B \in \Omega$; $\mathbf{a} = \text{dec}(A), \mathbf{b} = \text{dec}(B) \in \Theta$, со стандартными свойствами:

$$(a) 0 \leq K_{\text{стр}}(A, B) \leq 1; (b) K_{\text{стр}}(A, A) = 1; (c) K_{\text{стр}}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \text{Pr}(A, [B]) = \emptyset.$$

Класс морфологически эквивалентных структур:

$$B = \{X \in \Omega: K_{\text{стр}}(X, B) = 1\}.$$

Отношение «более простой/более сложный по структуре»:

$$(K_{\text{стр}}(A, B) = 1, K_{\text{стр}}(B, A) < 1) \Leftrightarrow (\text{«}A \text{ сложнее } B\text{»}, \text{«}B \text{ проще } A\text{»}).$$

Проективные морфологические разложения

Конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Обнаружение объектов с использованием разложений:

<u>Морфо-геометрическая модель объекта:</u>	$M(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \mathbf{V}_{\mathbf{q} \in Q} (M(\mathbf{u}, \mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$	$\mathbf{u} \in Q$ – вектор параметров локализации объекта $M(\mathbf{p}, \mathbf{u})$; $\mathbf{q} \in Q$ – вектор параметров локализации примитивов $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; $M(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \{0, 1\}$ – модель локализации объекта.
Проекция изображения на модель	$\text{Pr}(A(\mathbf{p}), M(\mathbf{p}, \mathbf{u})) = \mathbf{V}_{\mathbf{q} \in Q} M(\mathbf{u}, \mathbf{q}) \cdot A(\mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$	
<u>Морфологическое корреляционное поле</u> $K_M(\mathbf{u})$ в пространстве образов:	$K_M(A(\mathbf{p}), M(\mathbf{p}, \mathbf{u})) = \ \text{Pr}(A(\mathbf{p}), M(\mathbf{p}, \mathbf{u}))\ / \ A(\mathbf{p})\ .$	<i>Анализ изображения «сверху вниз» (согласованная фильтрация пространстве P)</i>
<u>Морфологическое корреляционное поле</u> $K_M(\mathbf{u})$ в пространстве разложений	$K_M(A(\mathbf{q}), M(\mathbf{u}, \mathbf{q})) = \ \mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) \cdot A(\mathbf{q})\ / \ A(\mathbf{q})\ .$	<i>Анализ изображения «снизу вверх» (согласованная фильтрация пространстве Q, <u>голосование структурных элементов в пользу гипотез об объектах</u>)</i>
<u>Способы повышения вычислительной эффективности:</u>	<i>Независимое аккумуляирование свидетельств</i>	Минимизация числа голосующих элементов
	<i>Декомпозиция и редукция вектора параметров*</i>	Минимизация размерности пространства параметров
	<i>Структурное загробление модели объекта*</i>	Минимизация числа типов элементов и размерности параметров
	<i>Иерархический структурный анализ</i>	Снижение размерности пространства параметров Унификация модульного детектора под несколько типов объектов
*Плата за быстроедействие - потеря однозначности \Rightarrow обязательна постпроверка путем повторного анализа изображения.		

Проективные морфологические разложения

Морфологические операторы сегментации и сжатия данных

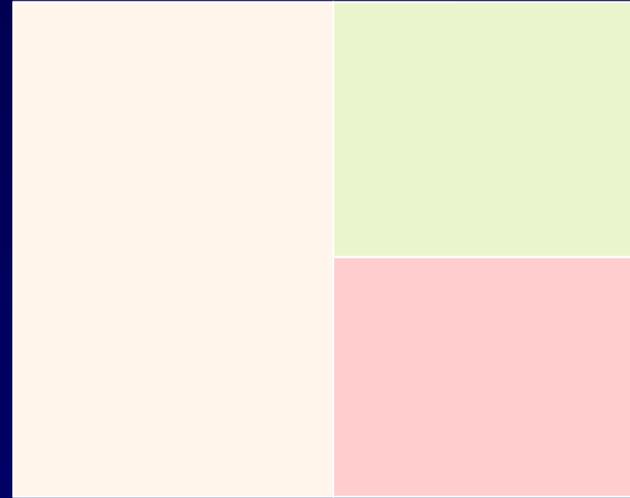
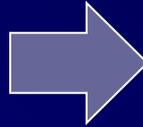
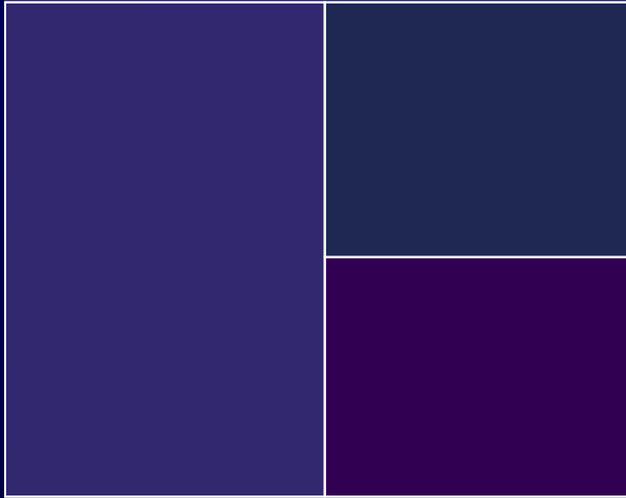
Морфологическая сегментация на базе проективных разложений

<u>Морфологический дескриптор</u>	$d(A, X) = \{n, d(A, X_1), \dots, d(A, X_n)\}$	$X = \{X_1, \dots, X_n\}$ – базис полного морфологического разложения; $n = \dim(X)$; $d(A, X_i)$ – дескриптор X_i .
<u>Объем дескриптора</u>	$v(d) \sim \dim(X)$	пропорционален размерности базиса
<u>Субдескриптор:</u>	$d(A, Y): Y = \{Y_1, \dots, Y_m\};$ $Y \subseteq X, \dim(Y) \leq \dim(X)$	
<u>Критерий сегментации</u>		
$\Phi(A, Y) = J(A, Pr(A, Y)) + \alpha \times v(d(A, Y)) \rightarrow \min(Y: Y \subseteq X)$		
где J – функционал точности реконструкции; α - настроечный параметр.		
<u>Процедура оптимальной сегментации:</u>	$Y = S(A, X): Y \subseteq X, \Phi(A, Y) \rightarrow \min(Y)$	Переход от полного дескриптора к субдескриптору, оптимизирующему критерий Φ.
<u>Матрица перехода к новому базису</u>	$Y = S(A) \times X$	$\dim(S(A)) = m \times n:$ $n = \dim(X)$ и $m = \dim(Y)$.
<u>Задача сегментации без потерь:</u>	$Y = S(A, X): Y \subseteq X,$ $Pr(A, Y) = A, v(d(A, Y)) \rightarrow \min(Y).$	
<u>Уменьшающие размерность эквивалентные преобразования:</u>	1) исключение примитивов с нулевыми коэффициентами разложения; 2) группировка (объединение) примитивов с одинаковыми коэффициентами разложения.	Для эквивалентных преобразований матрица перехода $[S(A)]$ состоит из нулей и единиц. Однако не все элементы с одинаковыми весами допустимо и целесообразно объединять. В каждой конкретной морфологии существуют свои ограничения на допустимое объединение образующих, которые можно описать как предикат правил перехода $p(X \rightarrow Y) = p([S])$.
<u>Задача сегментации с потерями:</u>	• Проекторы минимального расстояния • Монотонные проекторы • «Открытие»	Проективные свойства операторов оптимальной сегментации доказаны

Проективные морфологические разложения

Проективная сегментация без потерь

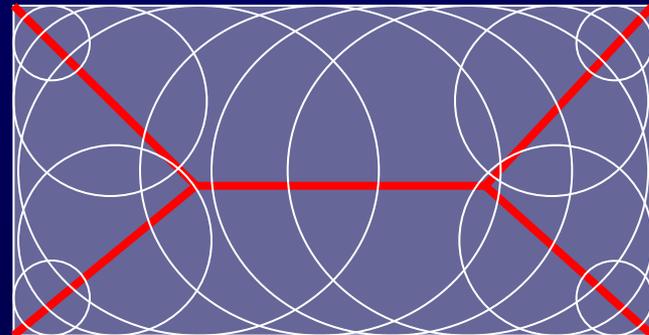
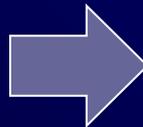
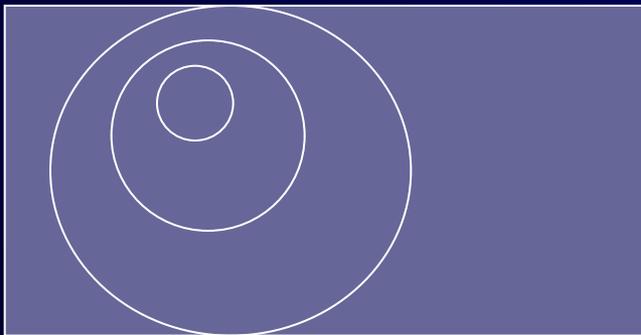
Морфология Пытьева «форма» Пытьева



Полное писксельное разбиение

Минимальное число областей

Морфология Серра морфологический скелет



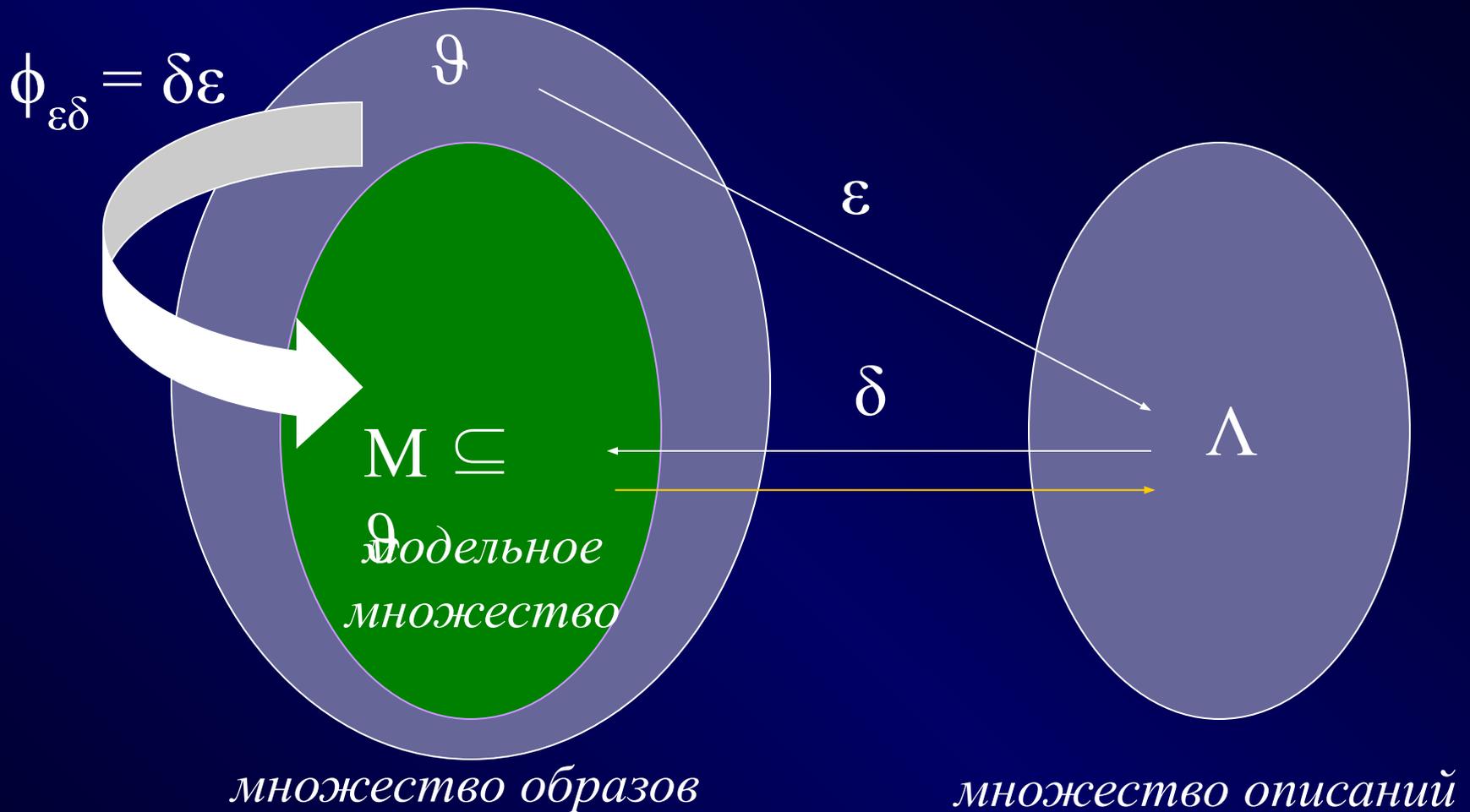
Полное дисковое представление

Минимальное число дисков

МОДУЛЬНОСТЬ

(в поисках нетривиального описания)

Формальная морфология



Морфологическая сегментация

$$\varepsilon: \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda$$

Морфологическая реконструкция

$$\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{D}$$

Морфологический фильтр

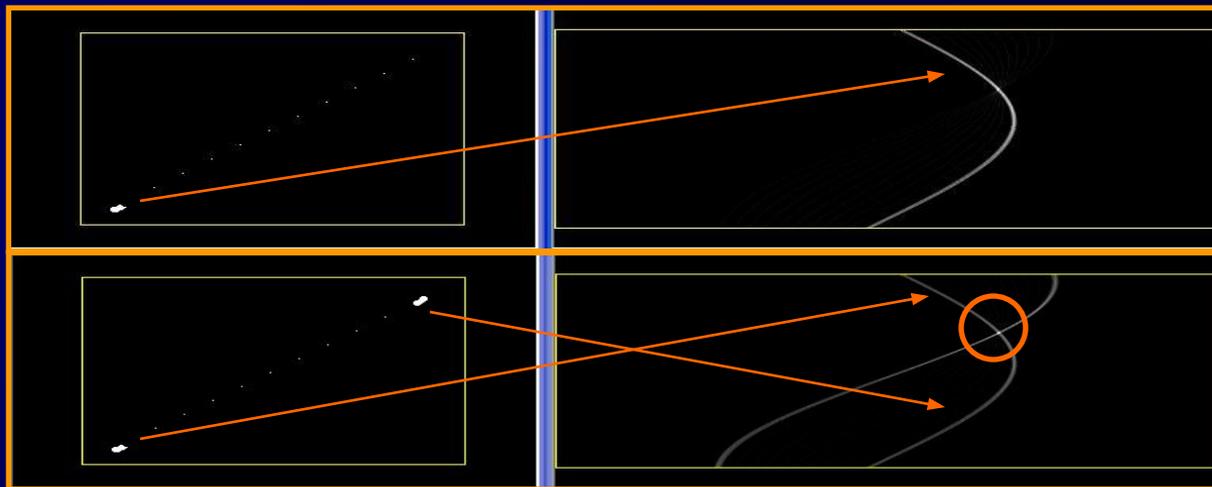
$$\phi_{\varepsilon\delta}(E) = \delta(\varepsilon(E)): \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda \rightarrow \mathfrak{D}$$

Способ описания: Преобразование Хафа и ГНТ

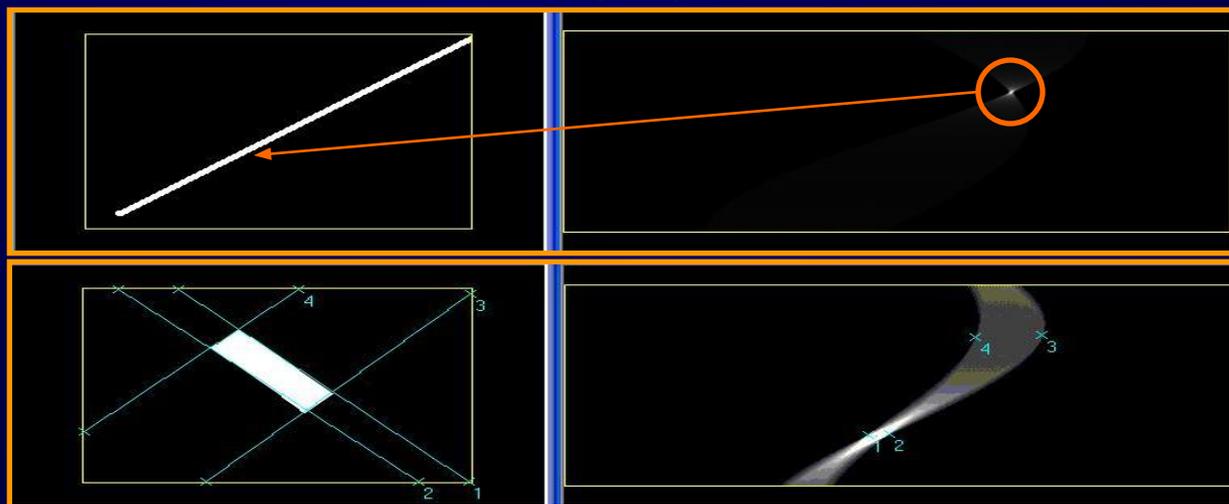
Параметризация:



Голосование точек в аккумулятор



Анализ аккумулятора



Обобщение:



Модульные проективные морфологии

<i>Группа методов</i>	Преобразование Хафа, ГНТ
<i>Базовый математический формализм</i>	Аналитическая геометрия, интегральные преобразования
<i>Вид модели</i>	$A(\rho, \theta) = \sum_x \sum_y \{f(x, y) : x \cos \theta + y \sin \theta = \rho\}$ где (ρ, θ) – параметры нормальной параметризации прямой; $A(\rho, \theta)$ – аккумулятор преобразования Хафа (Радона)
<i>Ключевые идеи</i>	<i>Голосование</i> пикселей в пользу <i>гипотез</i> в <i>пространстве параметров</i> . <i>Анализ аккумулятора.</i>

Монотонные проективные морфологии на базе преобразования Хафа и ГНТ

Н-открытие - объединение проекций изображения $A(\mathbf{p})$ на отдельные прямые линии:

$$\text{Pr}(A(\mathbf{p}), t) = \text{MAX}_{\mathbf{q} \in Q} (A(\mathbf{q}, t) \cdot \text{Pr}(A(\mathbf{p}), \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}))) = \text{MAX}_{\mathbf{q} \in Q} (A(\mathbf{q}, t) \cdot A(\mathbf{p}) \cdot \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})),$$

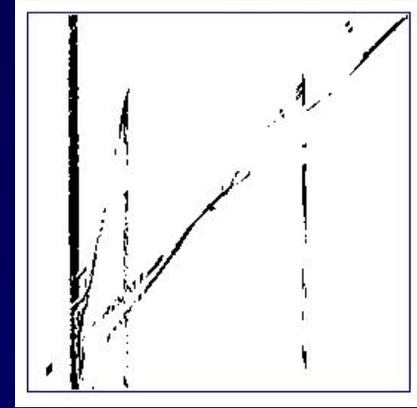
где $\mathbf{p}=(x, y)$; $\mathbf{q}=(\rho, \theta)$ – параметры нормальной параметризации прямой; Q – пространство параметров; $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \{0, 1\}$ – характеристическая функция прямой с параметрами \mathbf{q} ; $A(\mathbf{q}, t) \in \{0, 1\}$ – аккумулятор преобразования Хафа, бинаризованный по порогу t .



(a)



(b)



(c)

Пример морфологического Н-открытия: a – исходное бинарное изображение;

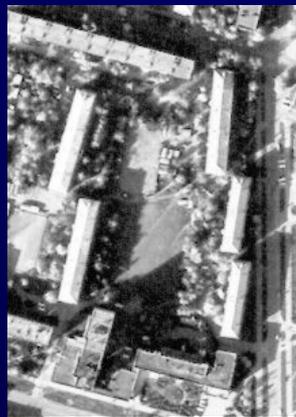
b – аккумулятор пространства Хафа c – результат Н-открытия.

На исходном контурном препарате выделены глобальные прямолинейные структуры.

Аналогичным образом строится монотонная проективная морфология на базе обобщенного преобразования Хафа (ГНТ).

Морфологическая фильтрация на базе рекуррентного преобразования Хафа в скользящем окне

Вычислительно-эффективная реализация алгоритма.



(a)



(b)

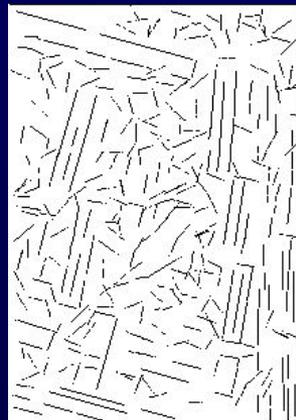


(c)

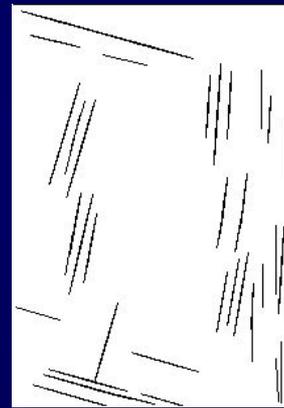
Пример морфологического RHT-открытия. Выделены локальные прямолинейные структуры.



(a)



(b)



(c)

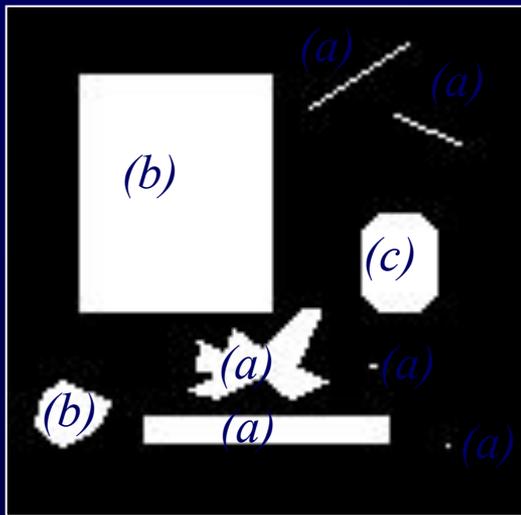
Пример морфологической RHT-фильтрации с различными параметрами размера окна.
Выделены линеаменты различных размеров.

МОДУЛЬНОСТЬ
(комбинирование процедур)

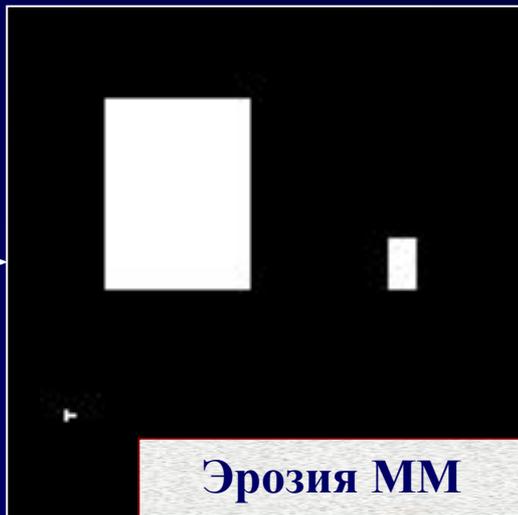
Альтернативные модульные морфологии

Идея: Построение различных модульных морфологических операторов путем комбинирования разных операторов сегментации с разными операторами реконструкции.

Пример: селективные морфологии на базе операторов ММ Серра



ε



Стандартная ММ

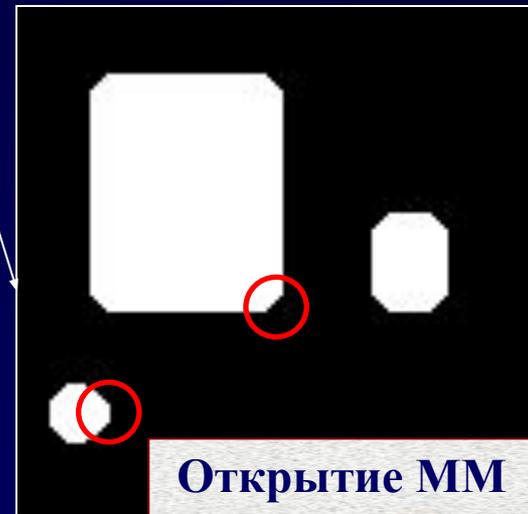
$$O(\text{Object}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } E(\text{Object}) = \emptyset & (a) \\ \text{Object}' \subseteq \text{Object}, & \text{if } E(\text{Object}) = \emptyset & (b) \\ \text{Object}, & \text{if } \exists \text{Im}: O(\text{Im}) = \text{Object} & (c) \end{cases}$$

Селективная ММ

$$SO(\text{Object}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } E(\text{Object}) = \emptyset & (a) \\ \text{Object}, & \text{if } E(\text{Object}) \neq \emptyset & (b) \end{cases}$$

Селективные морфологии

δ



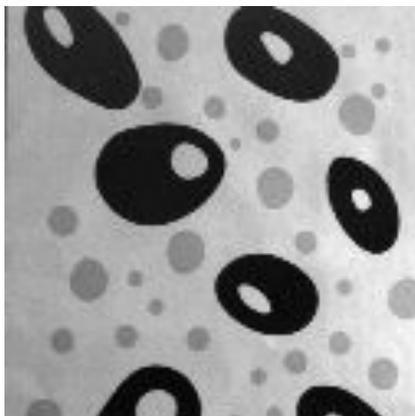
δ'



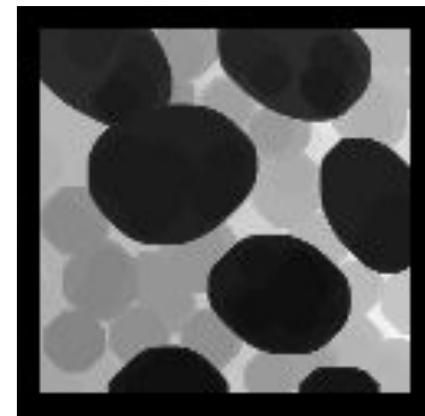
Селективные морфологии

Полугоновое
ММ-открытие

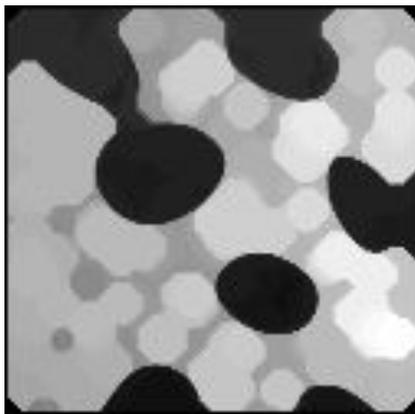
Im



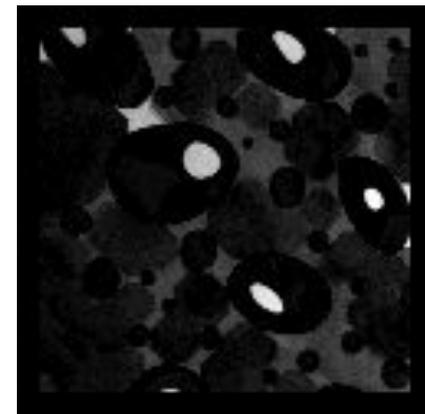
E(Im)



O(Im)



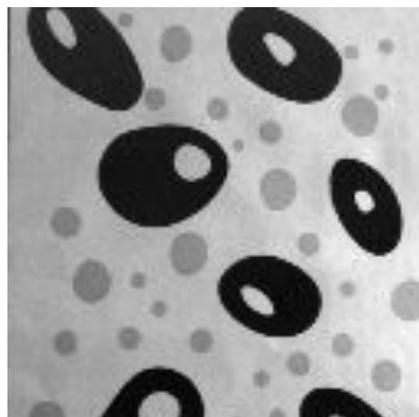
Im-O(Im)



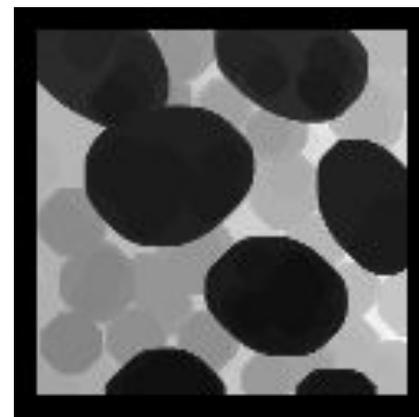
Селективные морфологии

Полутоновое SM-открытие

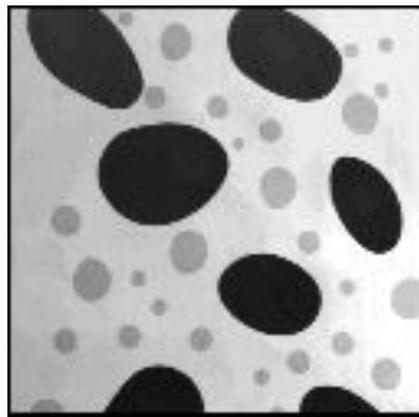
Im



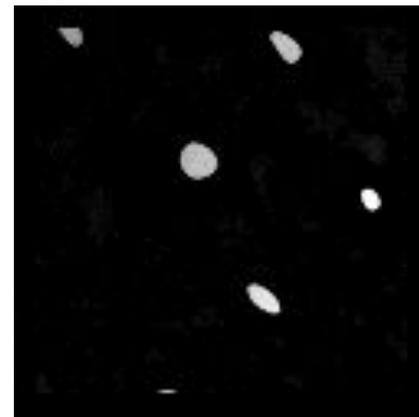
E(Im)



SO(Im)



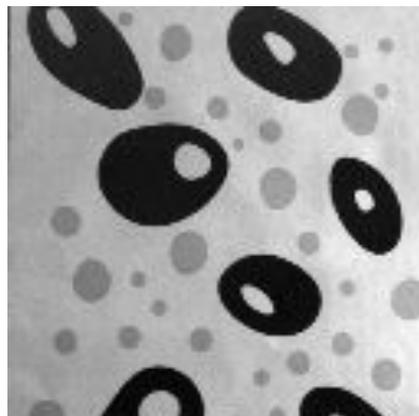
Im-SO(Im)



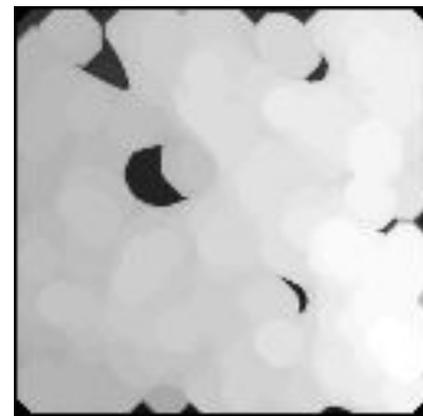
Селективные морфологии

Полутоновое ММ-заккрытие

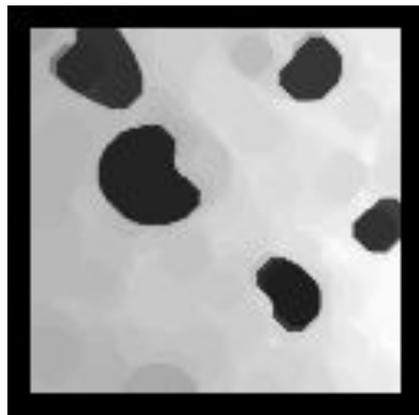
Im



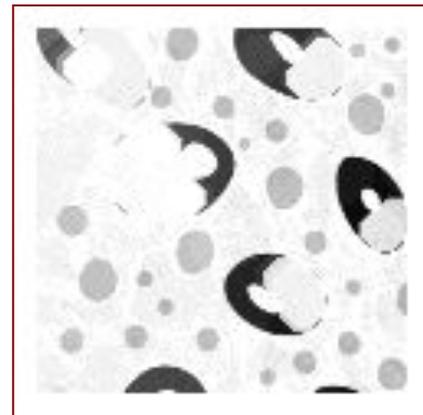
D(Im)



C(Im)



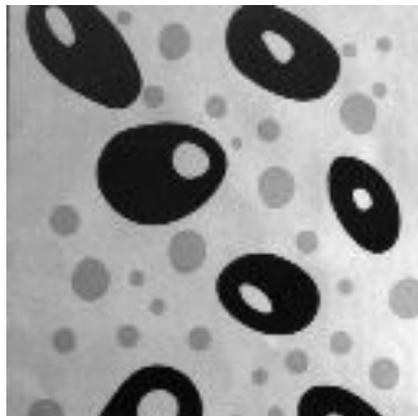
Im-C(Im)



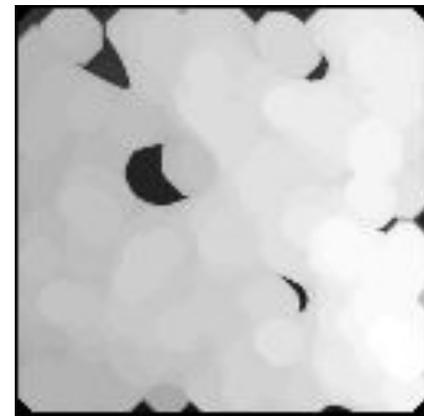
Селективные морфологии

Полутоновое
SM-закрытие

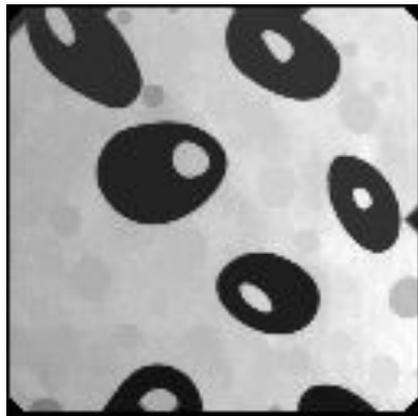
Im



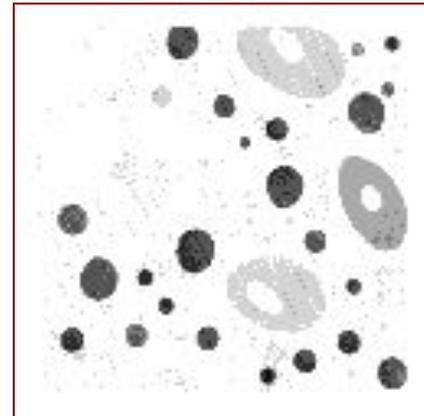
D(Im)



SC(Im)



Im-SC(Im)



Селективные морфологии

Полутоновое ММ-открытие

I_m



$E(I_m)$



$O(I_m)$



$I_m - O(I_m)$



Селективные морфологии

Полутоновое SM-открытие

Im



$E(Im)$



$SO(Im)$



$Im-SO(Im)$



Селективные морфологии

Полутоновое ММ-заккрытие

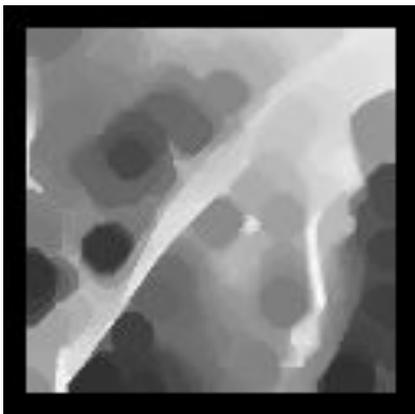
Im



$D(Im)$



$C(Im)$



$Im-C(Im)$



Селективные морфологии

Полутонное SM-закрытие

Im



$D(Im)$



$SC(Im)$



$Im-SC(Im)$



Селективные морфологии

Контурная селективная морфология

*(на базе оператора
удаления заданного
числа конечных
точек)*

I_m



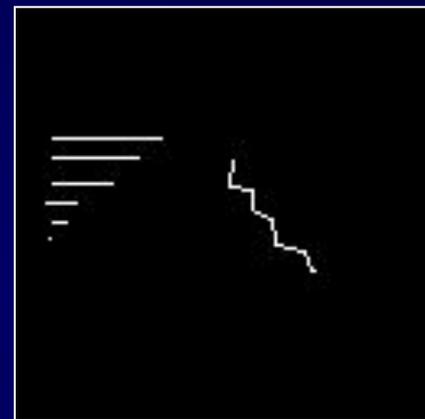
$E_{1D}(I_m)$



$SO_{1D}(I_m)$



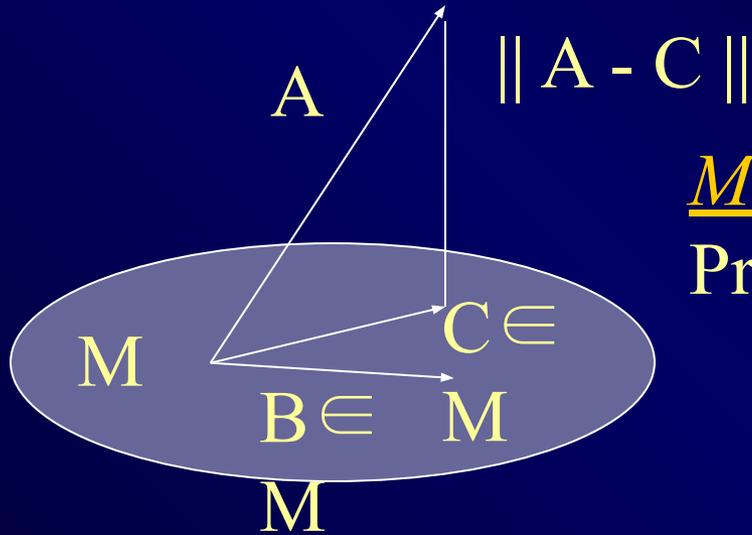
$I_m - SO_{1D}(I_m)$



МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ КРИТЕРИЕВ

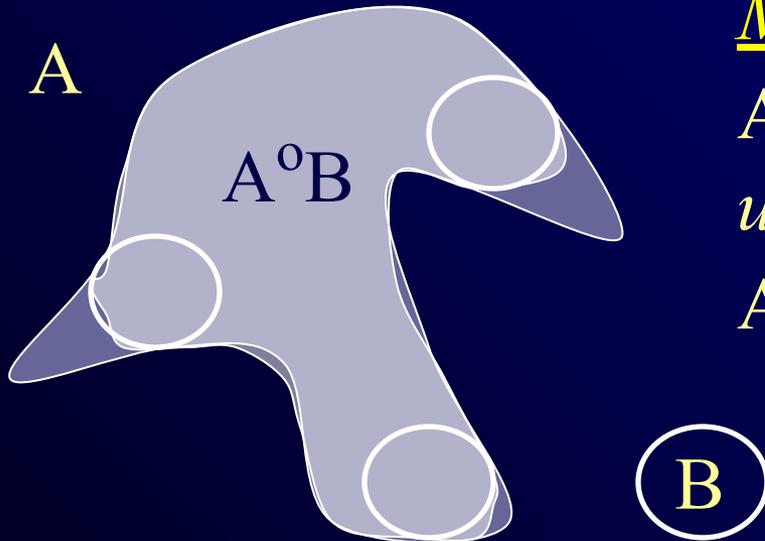
(сегментация с регуляризацией)

Критерии в классических морфологиях



Морфология Пытьева:

$$\text{Pr}(A, M(B)) = \operatorname{argmin}_{C \in M(B)} \|A - C\|$$



Морфология Серра:

$$A^{\circ}B = \operatorname{argmin}_{C \in M(B)} \{\|A - C\| : C \subseteq A\}$$

или

$$A^{\circ}B = \operatorname{argmax}_{C \in M(B)} \{\|C\| : C \subseteq A\}$$

Морфологический подход к анализу данных

Критериальная морфология:

Модель: $M(\lambda): \Lambda \rightarrow [0,1] \Leftrightarrow M(L): \mathfrak{G} \rightarrow [0,1]$

Критерий соответствия:

$K(E,\lambda): \mathfrak{G} \times \Lambda \rightarrow [0,1] \Leftrightarrow K(E,L): \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow [0,1]$

Критериальный морфологический фильтр ϕ_{Φ} на базе (ε, δ) :

$\varepsilon_{\Phi}(E)=\lambda, \phi_{\Phi}(E)=\delta(\lambda): \Phi(E,\lambda)=K(E,\delta(\lambda)) \times M(\lambda) \rightarrow \max(\lambda \in \Lambda)$

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{R})=\{\mathfrak{G}, \Lambda, \delta, K, M\} \Leftrightarrow \mathfrak{Z}'(\mathfrak{R})=\{\mathfrak{G}, \Lambda, \varepsilon_{\Phi}, \delta\}$ – \mathfrak{Z} -морфология.

Проективные критериальные морфологии: $\phi_{\Phi}(E)=\phi_{\Phi}(\phi_{\Phi}(E))$.

Морфологический подход к анализу данных

Морфологическое решение задач анализа данных:

1. Фильтрация $\phi_{\Phi}(E)=\delta(\lambda)$:

2. Сегментация $\varepsilon_{\Phi}(E)=\lambda$:

$$\Phi(E,\lambda)=K(E,\delta(\lambda))\times M(\lambda)\rightarrow\max(\lambda\in\Lambda)$$

3. Распознавание $c_{\Phi}(E)=H$:

$$\Phi(E,\lambda,H)=K(E,\delta(\lambda))\times M(\lambda,H)\times M(H)\rightarrow\max(\lambda\in\Lambda,H\in\Theta)$$

4. Обнаружение/локализация $\varepsilon_{\pi\Phi}(E)=\lambda$:

Параметрическая выборка $\pi(E,\lambda): \mathfrak{D}\times\Lambda\rightarrow\mathfrak{D}$,

$$\Phi_{\pi}(E,\lambda,H)=K(\pi(E,\lambda),\delta(\lambda))\times M(\lambda,H)\times M(H)\rightarrow\max(\lambda\in\Lambda,H\in\Theta)$$

селективный морфологический фильтр

$$\phi_{\pi}(E)=\pi(E,\varepsilon_{\pi\Phi}(E)): \mathfrak{D}\times\Lambda\rightarrow\mathfrak{D}.$$

Вывод: морфологический подход позволяет единым унифицированным способом решать все основные задачи обработки и анализа данных.

Форма и семантический смысл критериев

Нечеткие модели: $[0,1]$

Максимум достоверности:

$$\Phi(A,L) = K(A,L) \times M(L) \rightarrow \max(L \in \Omega)$$

Вероятностные модели: $[0,1]$

Максимум апостериорной вероятности

$$\psi(A) = L: P(A,L) = P(A/L) \times P(L) \rightarrow \max(L \in \Omega).$$

Четкие или логические модели: $[0,1] \rightarrow \{0,1\}$.

Морфологическая проекция на модельное множество:

$$\psi(A, \mathbf{M}): K(A,L) \rightarrow \max(L \in \mathbf{M}), \mathbf{M} = \{B \in \Omega: M(B)=1\}.$$

Теоретико-информационные критерии: $[0,1] \rightarrow [0,+\infty)$

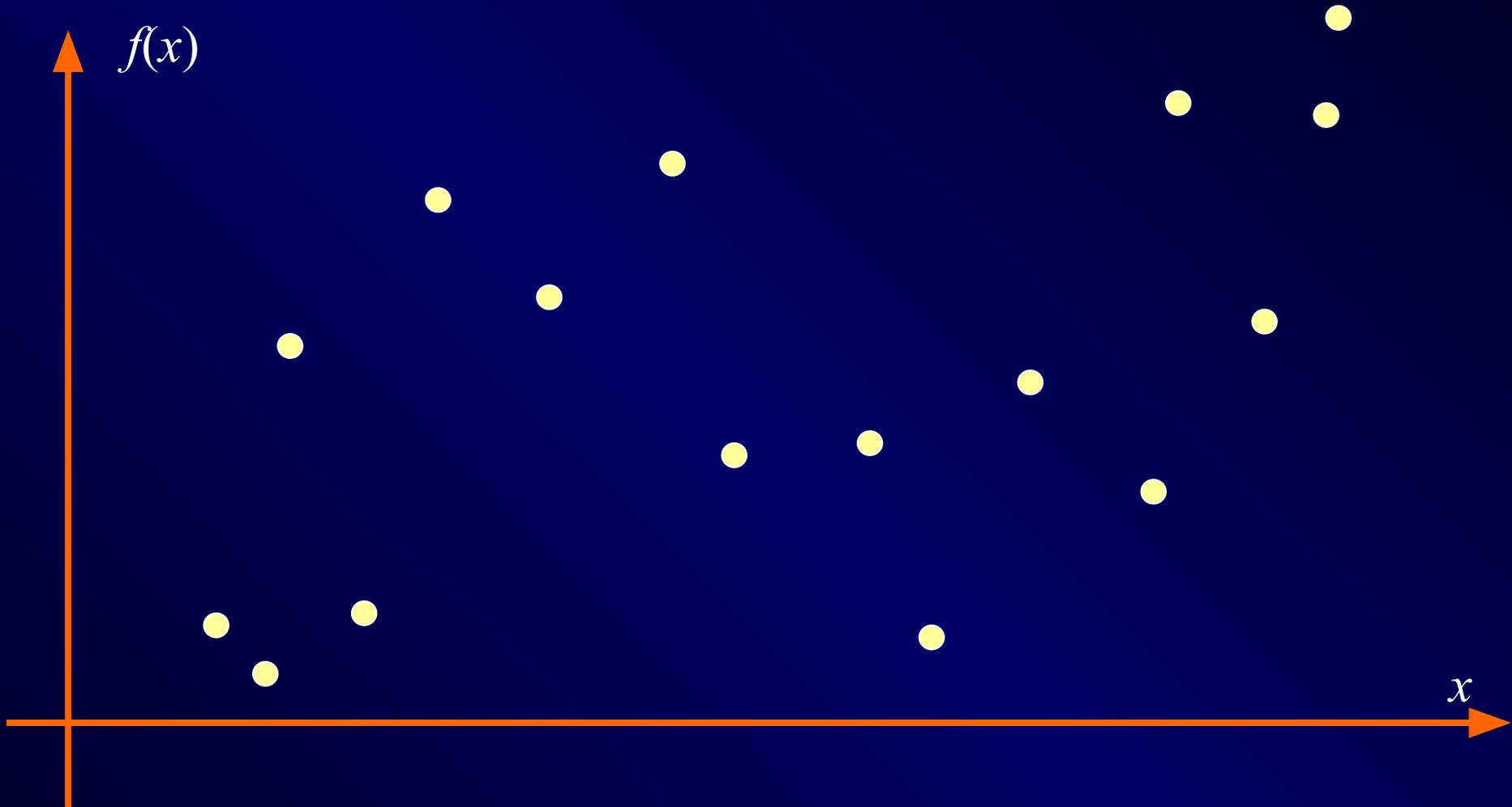
Максимум энтропии (минимум информации):

$$\Phi(A,L) = J(A,L) + \alpha \times Q(L) \rightarrow \min(L \in \Omega) \Leftrightarrow K(A,L) \times M(L)^\alpha \rightarrow \max(L \in \Omega).$$

$J(A,L) = -\log(P(A/L))$; $Q(L) = -\log(P(L))$; α - модельный параметр

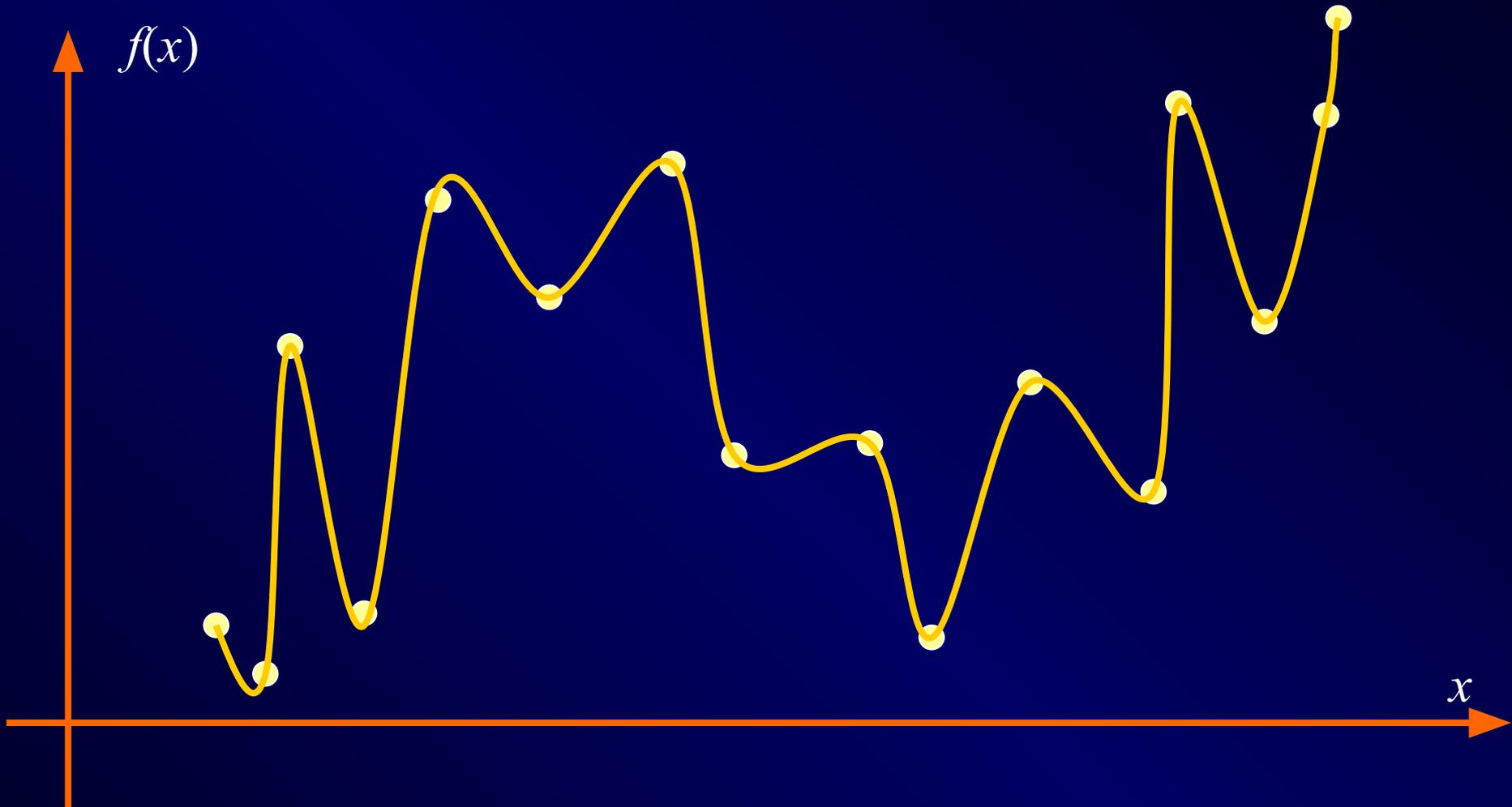
Интерпретация: регуляризация задачи сегментации по Тихонову

Регуляризация



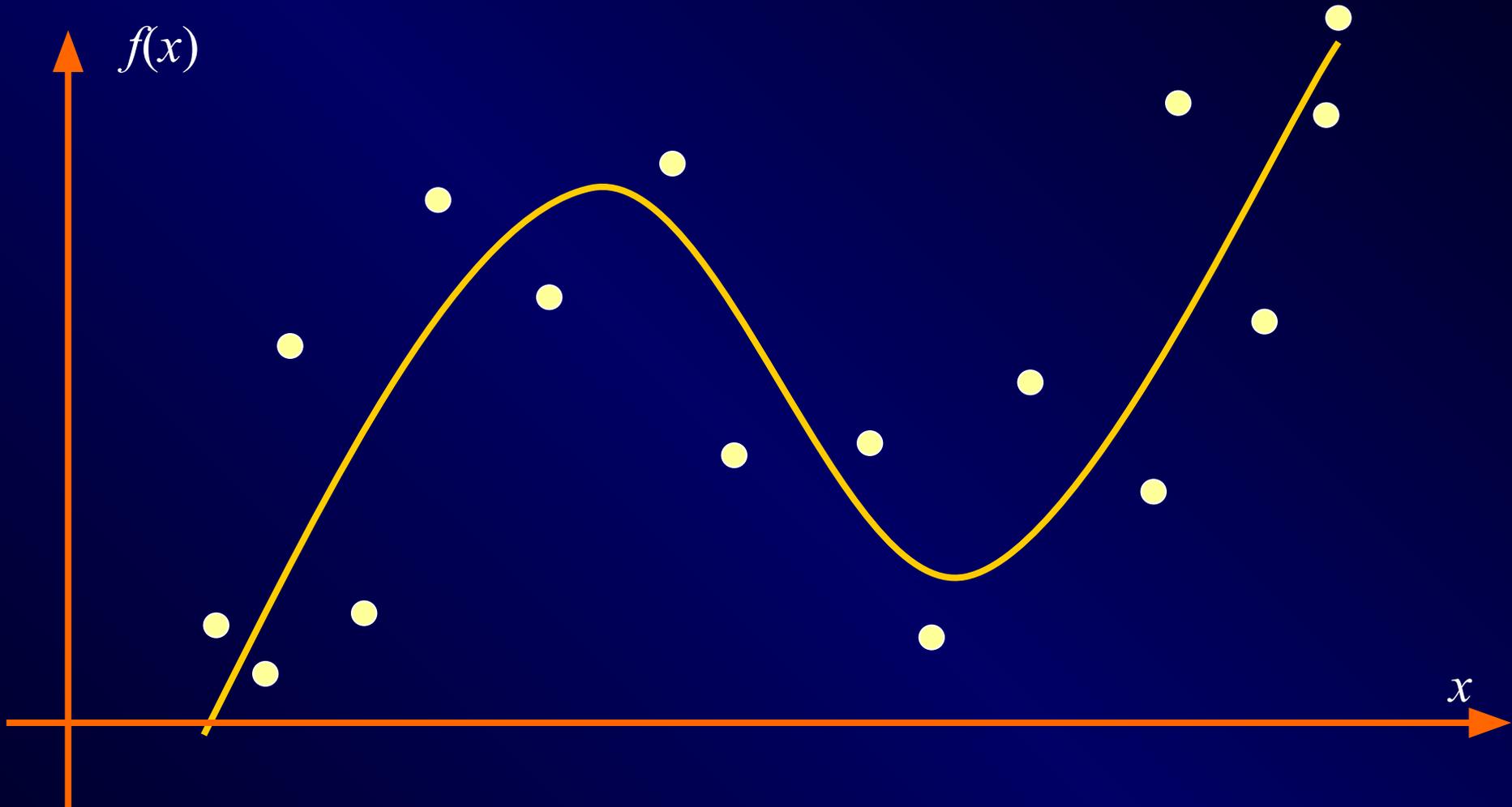
$$\Phi(A, L) = J(A, L) \rightarrow \min(L \in F(x))$$

Регуляризация



$$\Phi(A, L) = J(A, L) \rightarrow \min(L \in F(x))$$

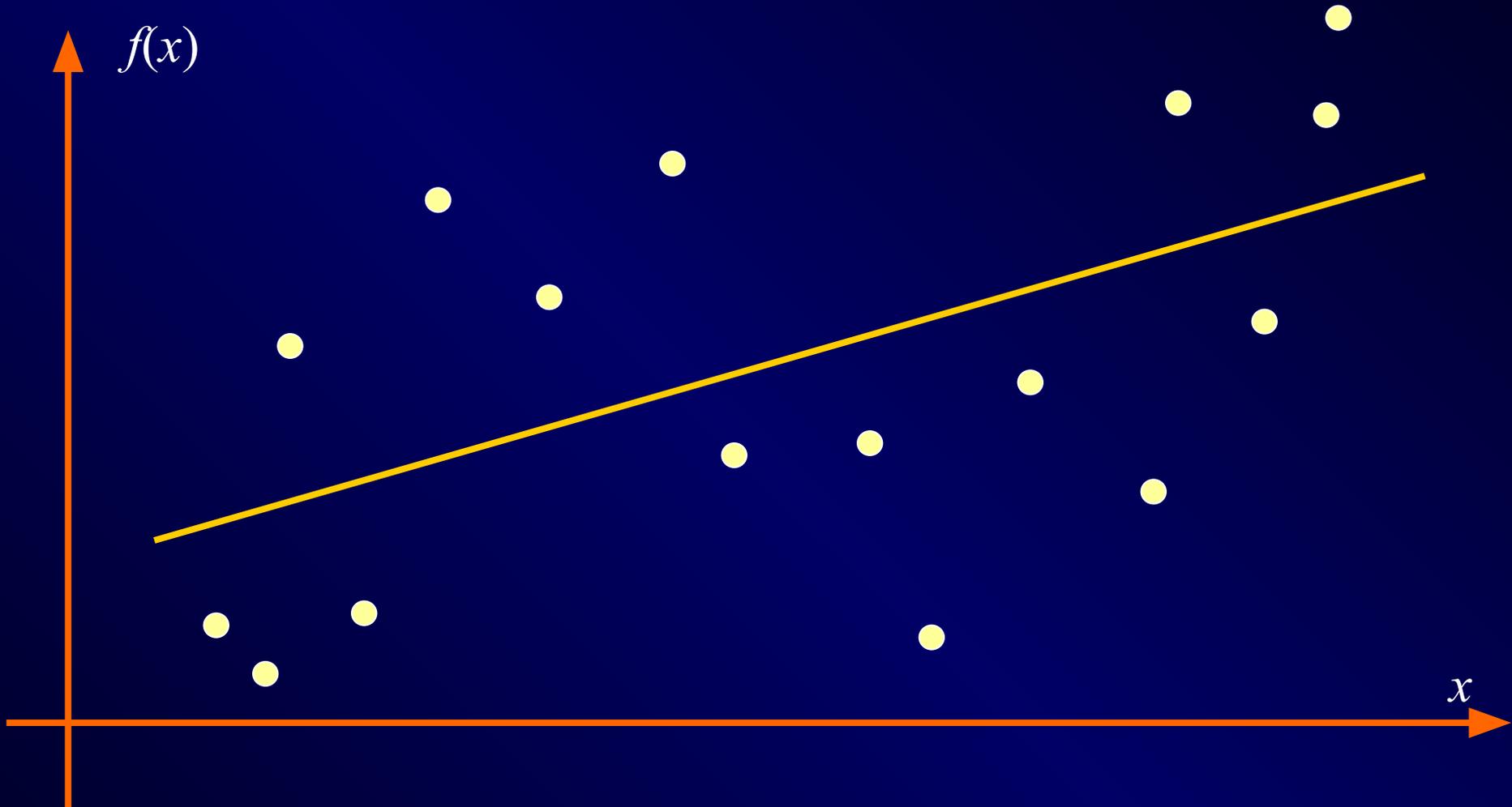
Регуляризация



$$\Phi(A, L) = J(A, L) + \alpha \times Q(L)$$

$$\rightarrow \min(L \in F(x))$$

Регуляризация \Rightarrow сегментация с потерями



$$\Phi(A, L) = J(A, L) + \alpha \times Q(L)$$

$$\rightarrow \min(L \in F(x))$$

Критериальные проективные морфологии

Пусть имеется множество образов Ω , на котором определена операция сложения ('+'), задающая на Ω группу с «нулевым образом» \emptyset . Кроме этого, на множестве образов определена Ω – норма $\mu(A)=\|A\|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\|\emptyset\|=0$, причем норма разности обладает свойствами расстояния. На множестве пар образов задана

Функция-критерий (критерий штрафа)

$$\Phi(A,B): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Морфологический проектор на базе критерия:

$$\text{Pr}(A, \Phi) = B: \Phi(A, B) \rightarrow \min(B \in \Omega), \text{Pr}(A) = \text{Pr}(\text{Pr}(A)), \text{Pr}(\emptyset) = \emptyset.$$

Критериальная морфологическая модель -

$$M = \{A \in \Omega: \text{Pr}(A, \Phi) = A\}$$

множество собственных (стабильных) элементов проектора. Модель M_2 по отношению к M_1 является более сложной, если $M_2 \subseteq M_1$.

Морфологический коэффициент корреляции:

$$K_M(A, \text{Pr}) = K_M(A, M) = \exp(-\|A - \text{Pr}(A, M)\| / \|\text{Pr}(A, M)\|),$$

$$0 \leq K_M(A, M) \leq 1; K_M(A, M) = 1 \Leftrightarrow A \in M; \text{Pr}(A, M) = \emptyset \Leftrightarrow K_M(A, M) = 0.$$

Конкретные морфологии определяются конкретным видом критерия.

Критериальные проективные морфологии

Стандартный критерий штрафа

$$\Phi(A, B) = J(A, B) + \chi(A, B) + \alpha \times Q(B)$$

где $J(A, B)$ – критерий соответствия проекции и образа, причем

$$\forall A \in \Omega, B \in V(A, \Phi): J(A, A) \leq J(A, B),$$

$\chi(A, B)$ – критерий (предикат) допустимости решения, определяющий ОДЗ

$$\chi(A, B) = \{0: B \in V(A, \Phi); +\infty: B \notin V(A, \Phi)\},$$

$Q(B)$ – критерий качества проекции, характеризующий ее принадлежность модели M ;

$\alpha \geq 0$ – структурирующий параметр, обеспечивающий компромисс между требованиями соответствия и качества.

Утверждение. С увеличением значения структурирующего параметра α сложность модели, которую определяет проектор, монотонно убывает.

$\Rightarrow \alpha$ - параметр морфологической сложности модели.

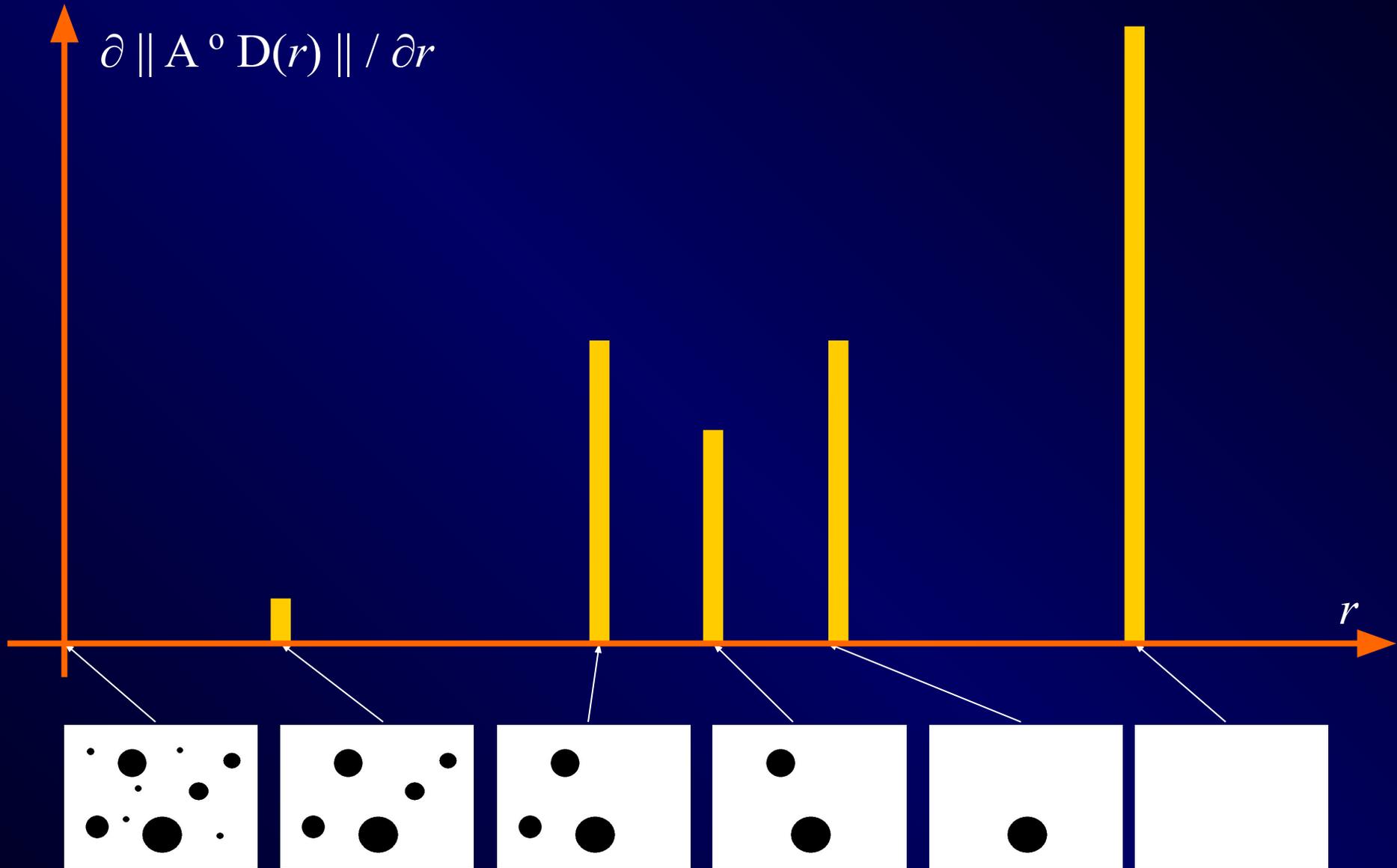
Морфологический спектр:

$$Sp(A, \alpha) = \partial \| Pr(A, J, \chi, \alpha, Q) \| / \partial \alpha$$

Коэффициент максимальной морфологической сложности:

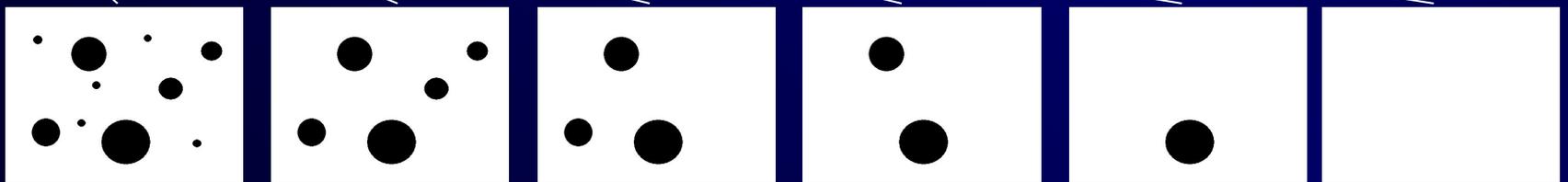
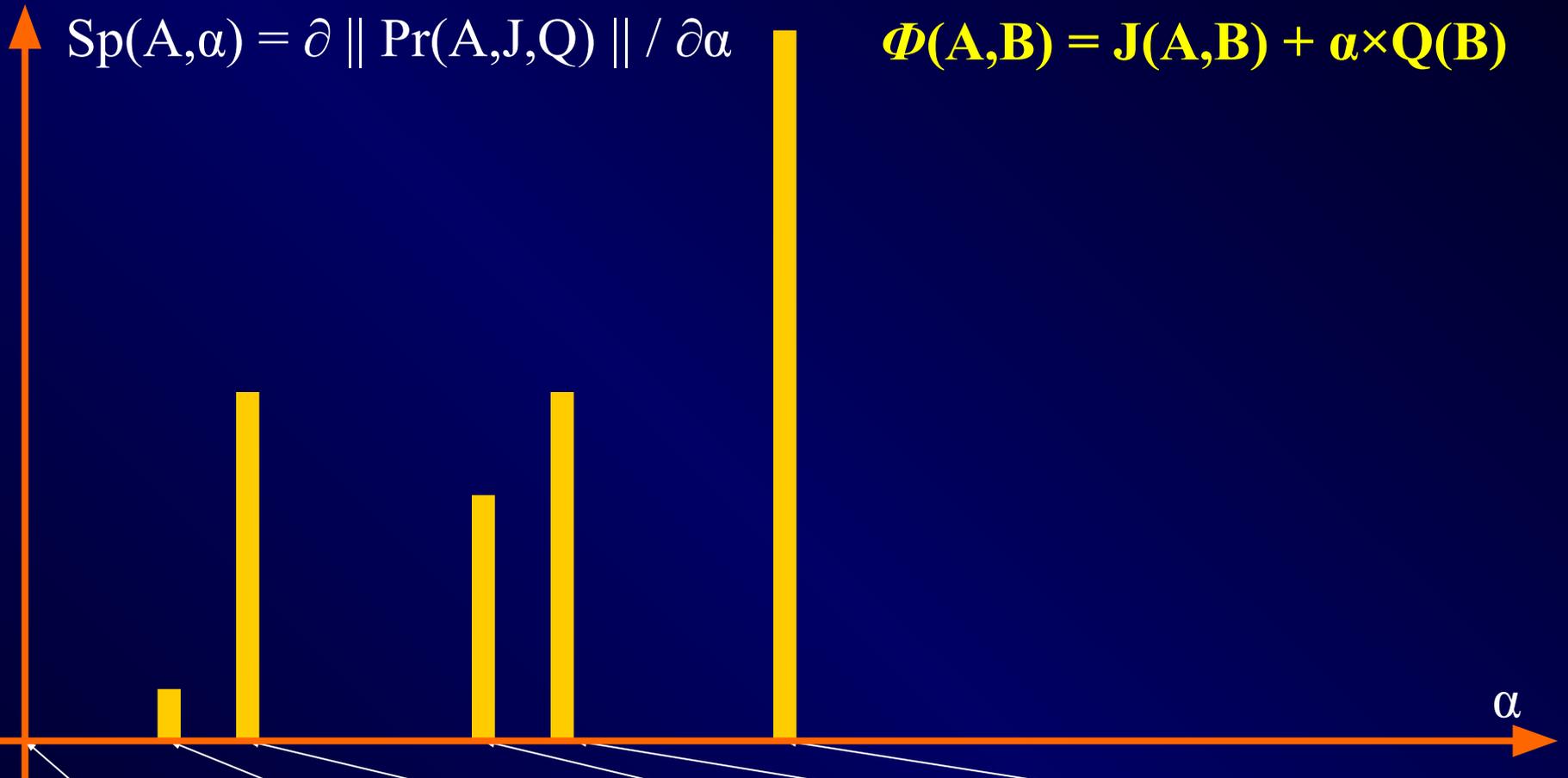
$$\alpha_{\max}(A) = \max\{\alpha \geq 0: A = Pr(A, J, \chi, \alpha, Q)\}.$$

Морфологический спектр по параметру



монотонное убывание сложности

Морфологический спектр по сложности



монотонное убывание сложности

Критериальные проективные морфологии

Достаточные условия построения проективных операторов

$$\Phi(A,B) = J(A,B) + \chi(A,B) + \alpha \times Q(B)$$

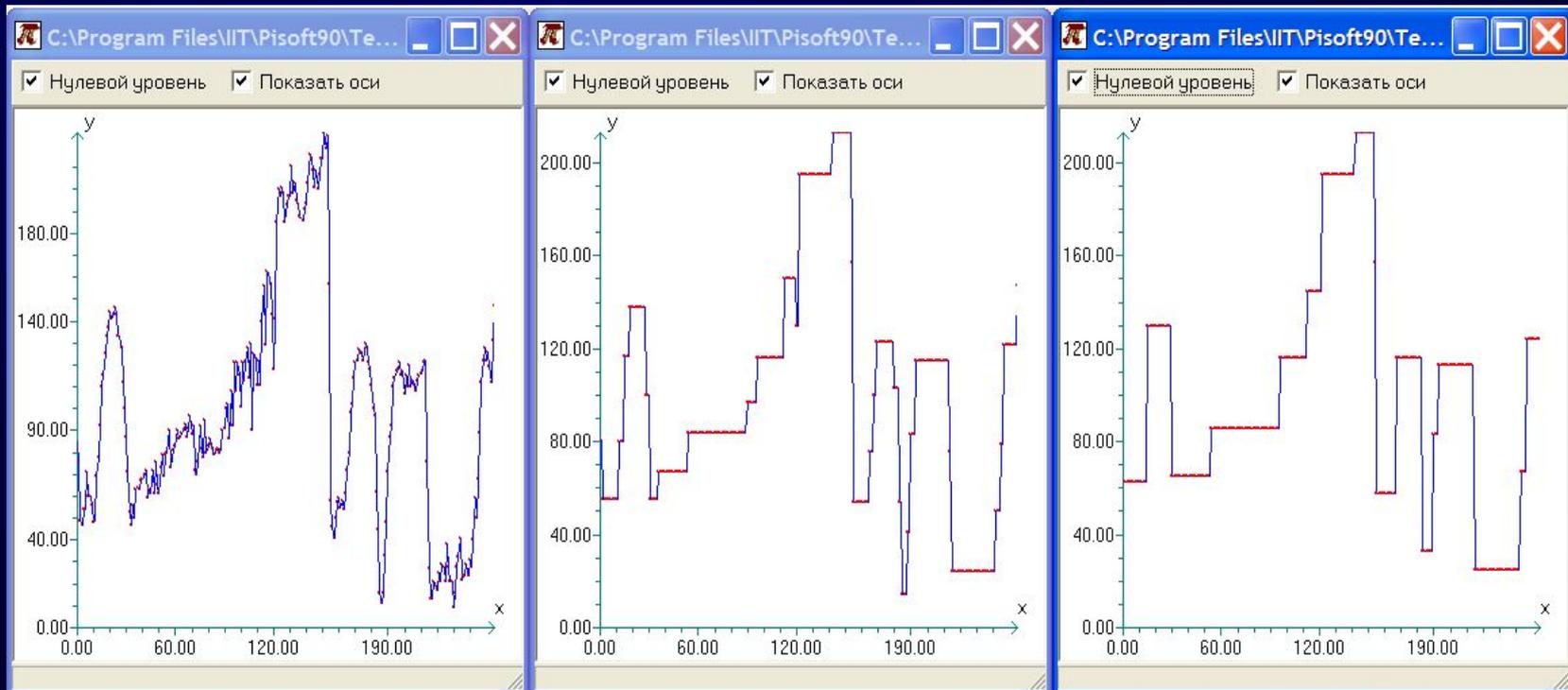
<p>1. Критерий минимального расстояния:</p>	<p>$\forall A,B,C \in \Omega: J(A,B) \geq 0, J(A,A)=0, J(A,B)=J(B,A), J(A,B)+J(B,C) \geq J(A,C).$ Утверждение 1. Монотонные по ОДЗ критерии минимального расстояния определяют морфологический проектор.</p>
<p>2. Критерий максимума обобщенной нормы проекции:</p>	<p>$\Phi(A,B) = -J(B) + \chi(A,B) + \alpha \times Q(B),$ $\forall A \in \Omega, B \in V(A, \Phi): V(B, \Phi) \subset V(A, \Phi), \forall A \in \Omega, B \in V(A, \Phi): J(A) \geq J(B).$ Утверждение 2. Монотонный по ОДЗ критерий максимума обобщенной нормы определяет морфологический проектор. Утверждение 3. Любой образ, полученный в результате применения проектора минимума нормы разности, при последующем применении к нему проектора максимума нормы проекции с теми же параметрами более не изменяется.</p>
<p>3. Квазимонотонный критерий максимума обобщенной нормы</p>	<p><i>Эффективное подмножество</i> ОДЗ: $U(A, \Phi) \subset V(A, \Phi),$ $\forall B \in V(A, \Phi), B \notin U(A, \Phi): \exists C \in U(A, \Phi), \Phi(A,C) < \Phi(A,B).$ <i>Условие квазимонотонности</i> ОДЗ: $\forall A \in \Omega, \forall B \in V(A, \Phi): U(B, \Phi) \subset V(A, \Phi).$ Утверждение 4. Квазимонотонные по ОДЗ критерии максимума обобщенной нормы определяют морфологический проектор</p>
<p>4. Выпуклый критерий, модель задана предикатом</p>	<p>Утверждение 5. Если критерий качества задан штрафным предикатом $Q(B) \in \{0, +\infty\}$, а критерий $J(A,B)$ является хорошо определенной функцией соответствия $\forall A, B \in \Omega, A \neq B \Rightarrow J(A,A) < J(A,B),$ морфологический фильтр является проектором</p>
<p>5. Критерий и модель заданы предикатами</p>	<p>$\Phi(A,B) = \chi(A,B) + Q(B) \in \{0, +\infty\}$ Модель проекции: $M(Q) = \{B \in \Omega: Q(B) < +\infty\}$ Модель соответствия: $M(A, \chi) = \{B \in \Omega: \chi(A,B) < +\infty\}.$ Утверждение 6. Критерий на базе предикатов задает морфологический проектор, в том и только в том случае, когда для любого A область $V(A, \Phi) = M(Q) \cap M(A, \chi)$ ОДЗ содержит ровно один образ, удовлетворяющий одновременно предикату $\chi(A,B)$ и предикату $Q(B)$</p>
<p>6. Критерий на базе признаков описаний и параметрических моделей</p>	<p><i>Набор признаков:</i> $f(A) = \langle f_1(A), \dots, f_n(A) \rangle \in \Psi^n,$ <i>Параметризованная модель:</i> $B \in \Omega: B \leftrightarrow \Psi^n.$ $\Phi(A,B) = \chi(A,B) + Q(B) \in \{0, +\infty\}$ Предикат модели проекции: $Q(B) = \{0: B \in B; +\infty: B \notin B\}$ Предикат модели соответствия: $\chi(A,B) = \{0: f(A) = f(B); +\infty: f(A) \neq f(B)\}.$ Согласно утверждению 6 такой выбор предикатов определяет проектор $Pr(A, \chi, Q).$ Соответствующую морфологию можно назвать <i>морфологией на базе признаков описаний.</i> Морфологиями на базе признаков описаний являются, в частности, все проективные морфологические разложения.</p>

Алгоритмические аспекты морфологии (от математического зрения к компьютерному)

<i>Тип структурной модели</i>	<i>Тип вычислительного алгоритма</i>	<i>Проективность морфологических операторов</i>
Однородная (проективные разложения)	1. Независимое вычисление проекций на образующие 2. Независимое голосование элементов в пользу гипотез	Гарантирована
Неоднородная, ациклический структурный граф	1. Логическое программирование 2. Динамическое программирование 3. Линейное программирование	Гарантирована
Неоднородная, циклический структурный граф	Распространение свидетельств («имитационный отжиг»)	Не гарантирована

Критериальные проективные морфологии

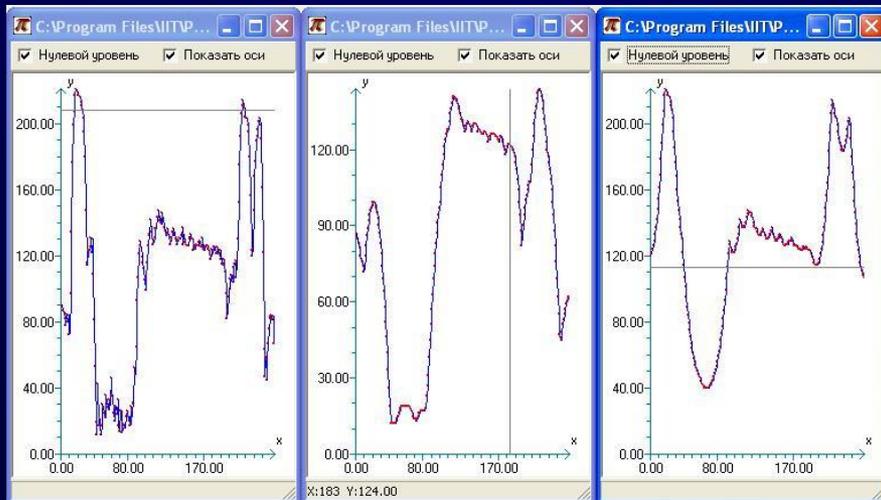
Среднеквадратичная проективная сегментация одномерных функций



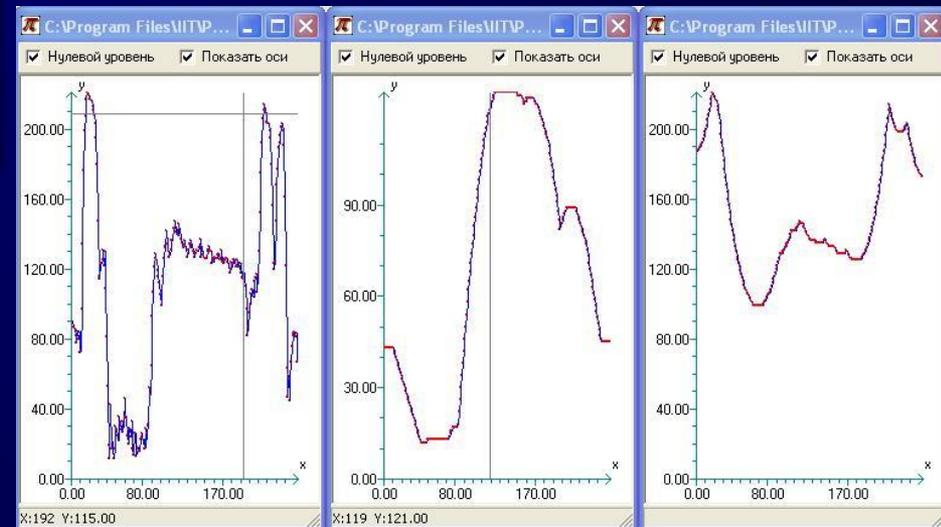
Пример СКО-фильтрации. Исходная функция, результаты сегментации для $\alpha=500$ и $\alpha=2000$.

Критериальные проективные морфологии

Монотонная проективная фильтрация одномерных функций



Примеры применения операторов DP-Open ($\alpha=200$) и DP-Close($\alpha=200$).

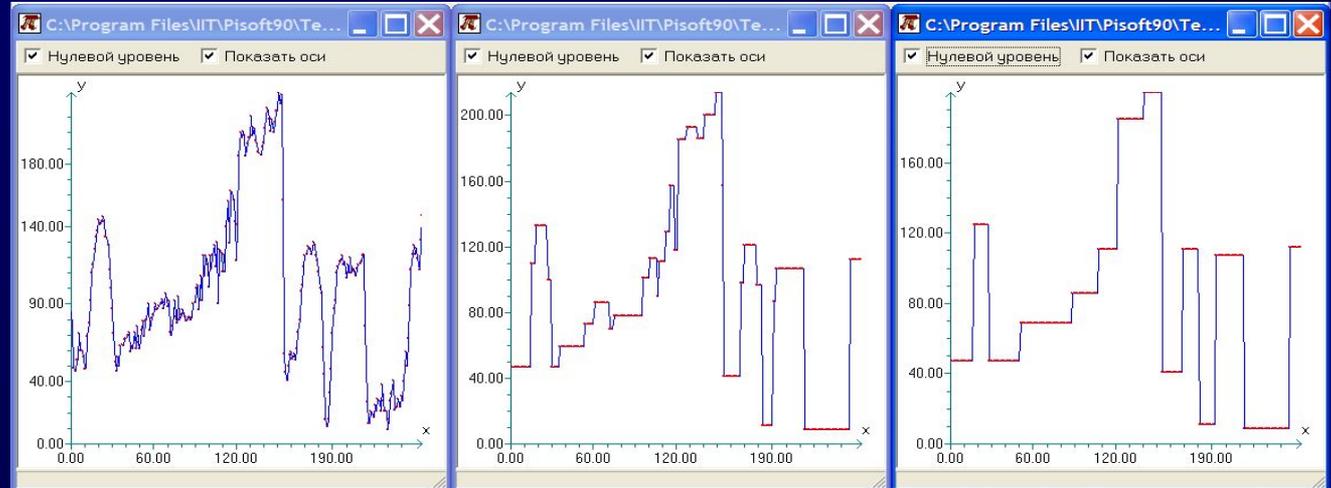


Примеры применения операторов DP-Open ($\alpha=1000$) и DP-Close($\alpha=1000$).

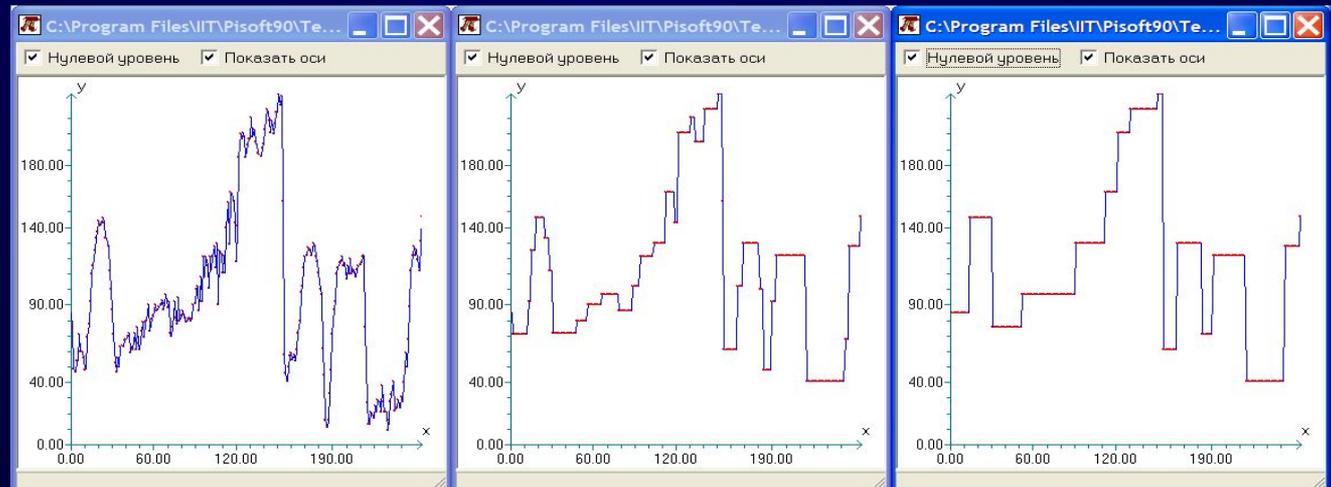
Критериальные проективные морфологии

Монотонная проективная сегментация одномерных функций

Примеры применения операторов DP-Open:
Исходная функция,
DP-Open ($\alpha=1000$),
DP-Open ($\alpha=50000$)



Примеры применения операторов DP-Close:
Исходная функция,
DP-Close ($\alpha=1000$),
DP-Close ($\alpha=50000$).



Критериальные проективные морфологии

Монотонная фильтрация и сегментация двумерных кривых (контуров бинарных изображений)



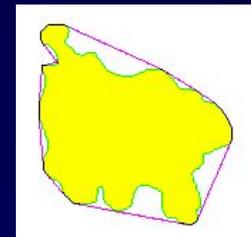
$\alpha=0$



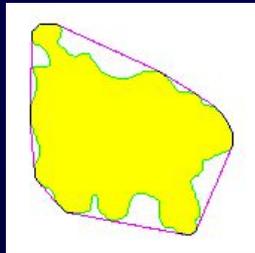
$\alpha=100$



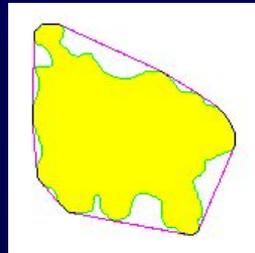
$\alpha=200$



$\alpha=300$



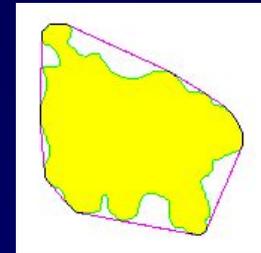
$\alpha=400$



$\alpha=500$



$\alpha=600$



$\alpha=700$

Пример кусочно-линейной сегментации типа «закрытие».

Критериальные проективные морфологии

Монотонная фильтрация и сегментация двумерных кривых (контуров бинарных изображений)



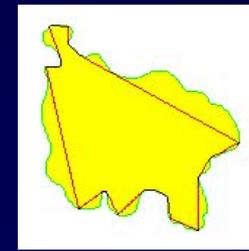
$\alpha=0$



$\alpha=100$



$\alpha=200$



$\alpha=300$



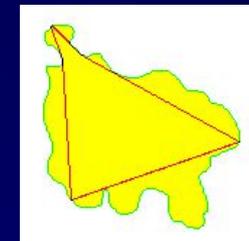
$\alpha=400$



$\alpha=500$



$\alpha=600$



$\alpha=700$

Пример кусочно-линейной сегментации типа «открытие».

Критериальные проективные морфологии

Морфологии на базе сопоставления функций

1D-Matching:

$$g(x) = f(x+v(x)) + \xi$$

$$J(f(x),g(x),L(x))=J(f(x),g(x+L(x))).$$

2D-Matching:

$$g(x,y) = f(x+v_x(x,y),y+v_y(x,y)) + \xi,$$

$$L(x,y)=\{L_x(x,y),L_y(x,y)\}$$

$$\Phi(f(x,y),g(x,y),L(x,y))= J(f(x,y),g(x,y),L(x,y)) + \alpha Q(L(x,y)) \rightarrow \min(L),$$

$$J(f(x,y),g(x,y),L(x,y))= \sum_x \sum_y (f(x_i,y_i)-g(x_i+L_x(x,y),y_i+L_y(x,y)))^2$$

$L(x)$ - функция-решение = функция диспаратности

$Pr(f,g)=g(x_i+L_x(x,y),y_i+L_y(x,y))$ – морфологический проектор

Критериальные проективные морфологии

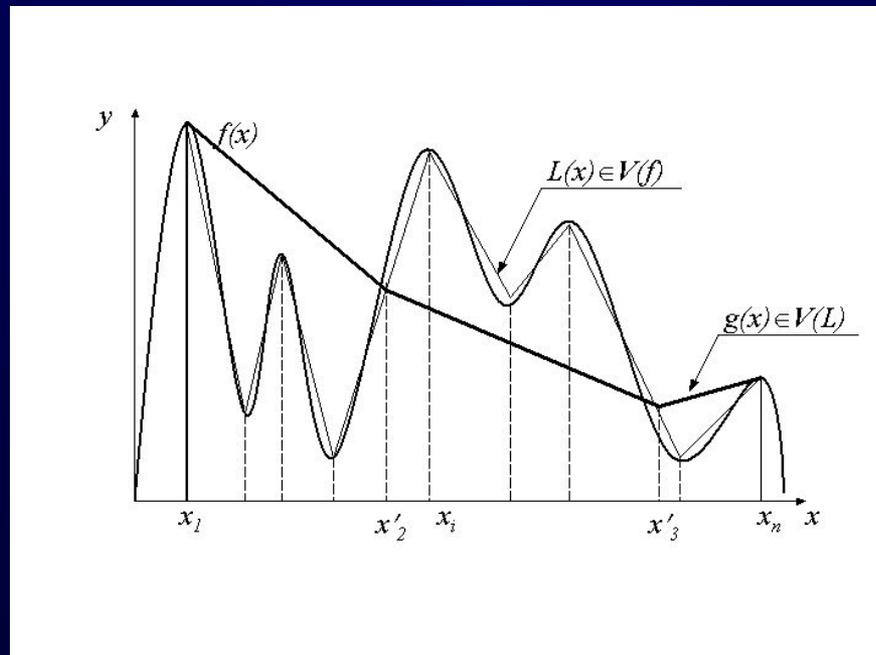
Морфология на базе оптимальной кусочно-линейной интерполяции

$$\Phi(f,L) = -J(L) + \chi(f,L) + \alpha \times Q(L) \rightarrow \min(L),$$

где $J(L)$ – длина графика ломаной; $Q(L)$ – число узловых точек.

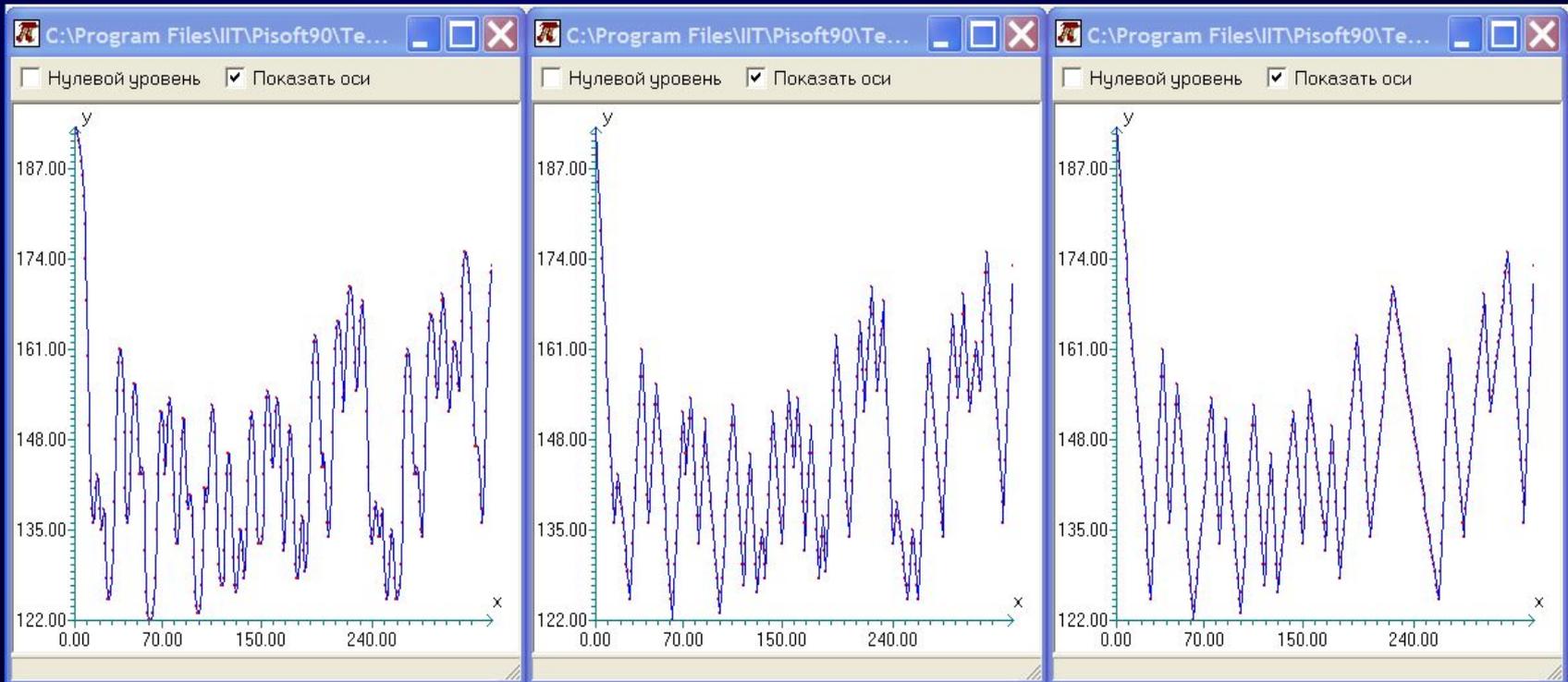
Множество опорных точек – переменная оптимизации.

Квазимонотонная ОДЗ: $V(f) \subseteq V(L)$



Критериальные проективные морфологии

Морфология на базе оптимальной кусочно-линейной интерполяции



a)

b)

c)

а – исходная функция; б – результат сегментации $\alpha=5$; с – результат сегментации $\alpha=15$.

Критериальные проективные морфологии

Морфология на базе оптимальной кусочно-линейной интерполяции
двумерных кривых (контуров бинарных изображений)



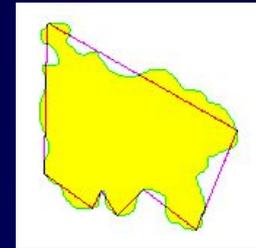
$\alpha=0$



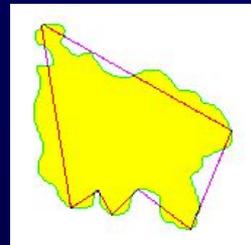
$\alpha=200$



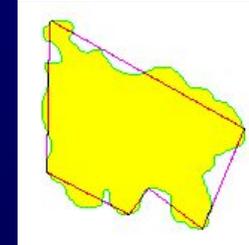
$\alpha=400$



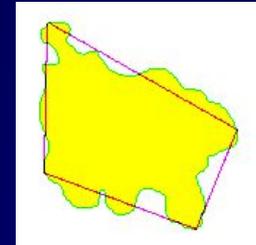
$\alpha=600$



$\alpha=800$



$\alpha=900$

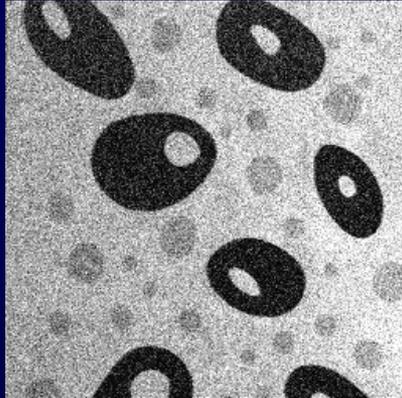


$\alpha=1000$

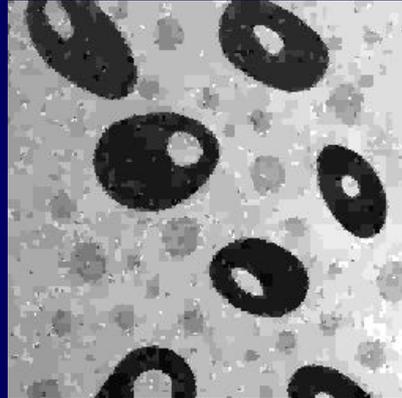
Пример критериальной морфологической интерполяции контура
двумерного бинарного образа.

Динамическое программирование: 2-D как 1-D

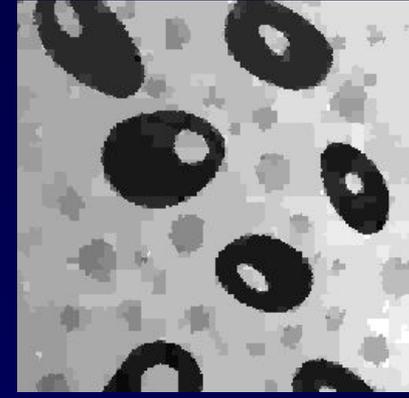
Морфология на базе оптимальной кусочно-постоянной сегментации
двумерных полутоновых изображений



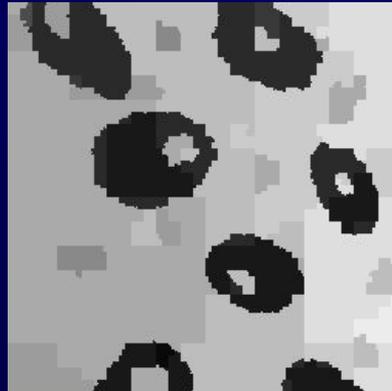
а) $\alpha=0$



б) $\alpha=5$



в) $\alpha=10$



г) $\alpha=100$



д) $\alpha=1000$

Проективная сегментация зашумленного полутонового изображения с использованием развертки по кривой Пеано

Динамическое программирование: 2-D как 1-D

Морфология на базе оптимальной кусочно-постоянной сегментации
двумерных полутоновых изображений



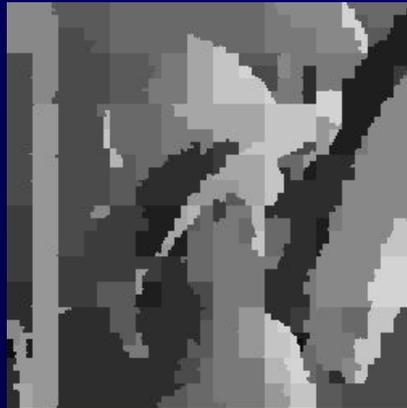
а) $\alpha=0$



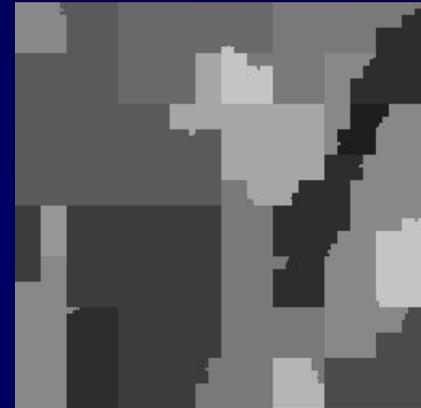
б) $\alpha=5$



в) $\alpha=10$



г) $\alpha=100$

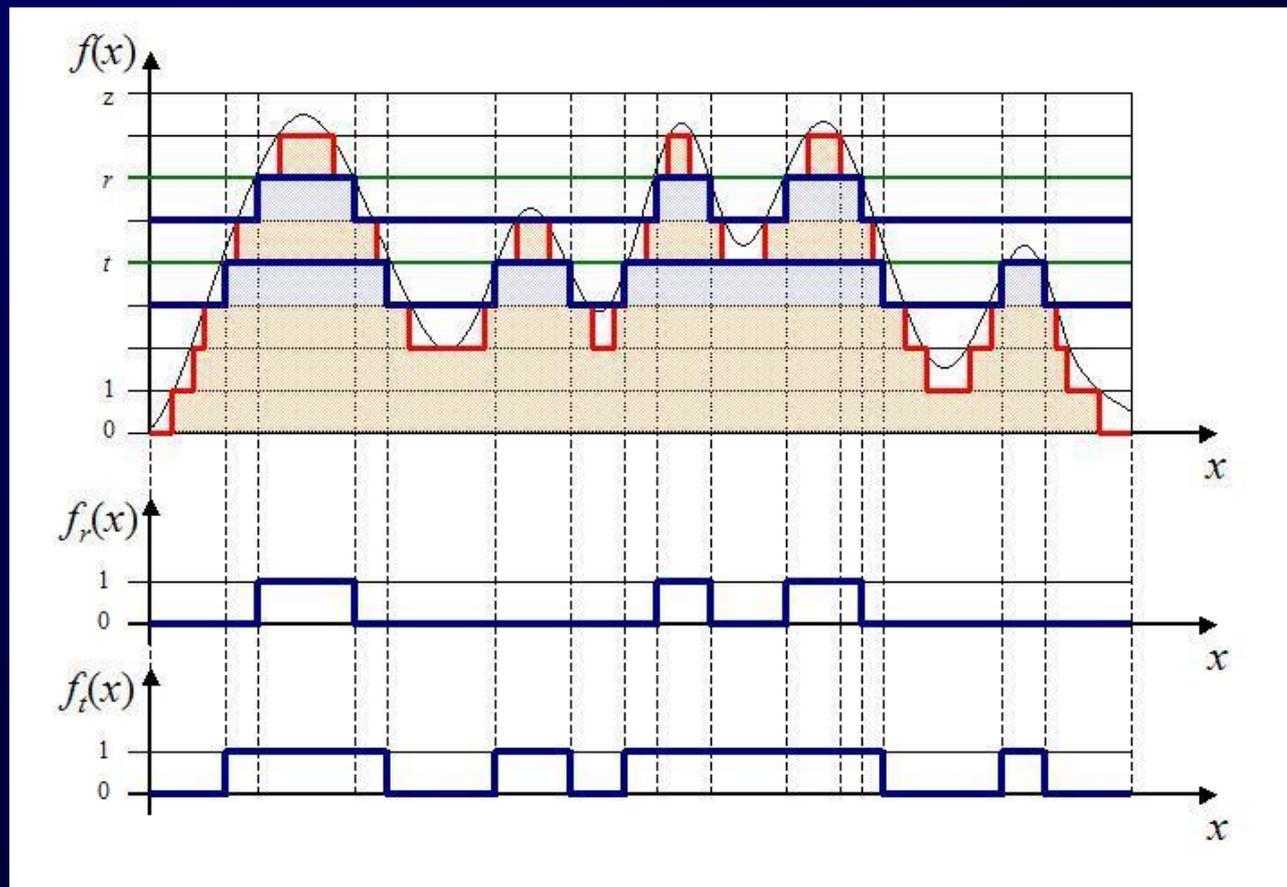


д) $\alpha=1000$

Проективная сегментация зашумленного полутонового изображения с использованием развертки по кривой Пеано

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений

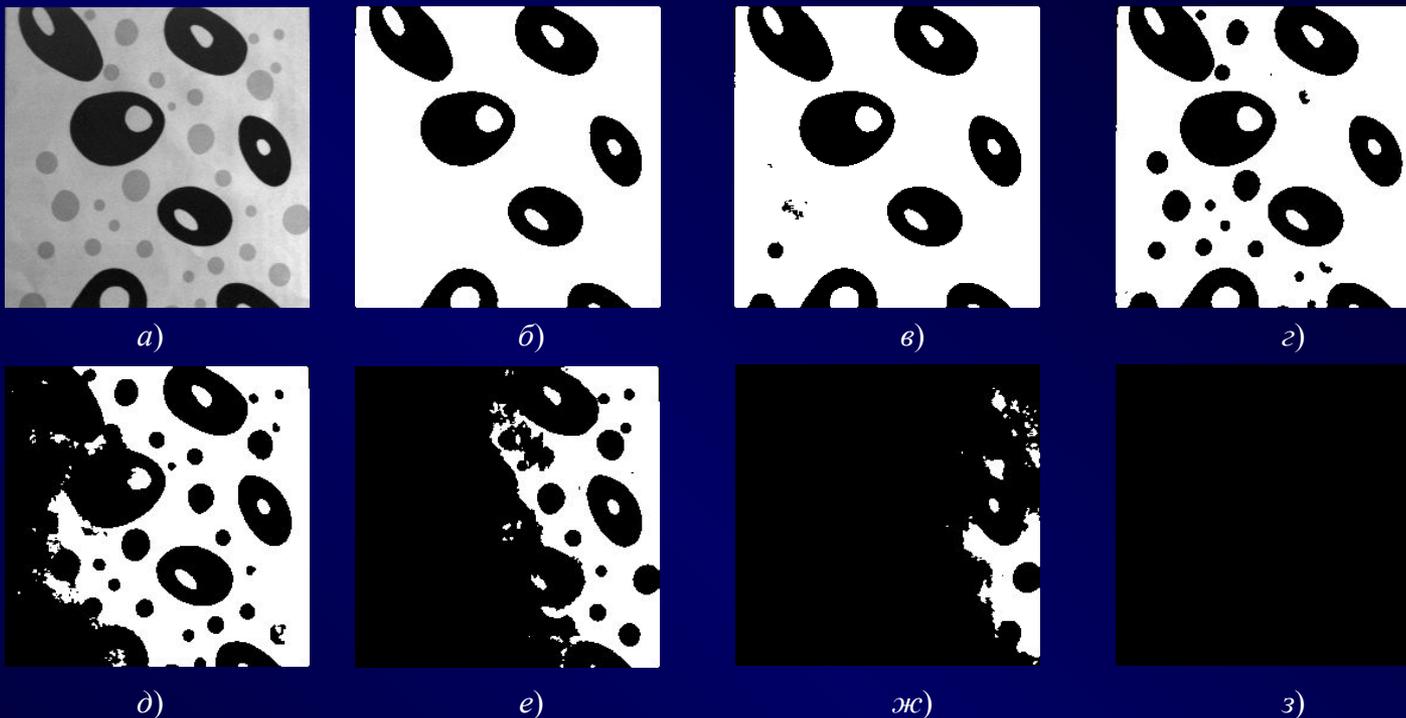
Срезовой стек:



Оператор реконструкции срезового стека δ :

$$f(x) = \delta f = \sum_{t=0, \dots, z} f_t(x) = \max_{t=0, \dots, z} (t \times f_t(x))$$

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений



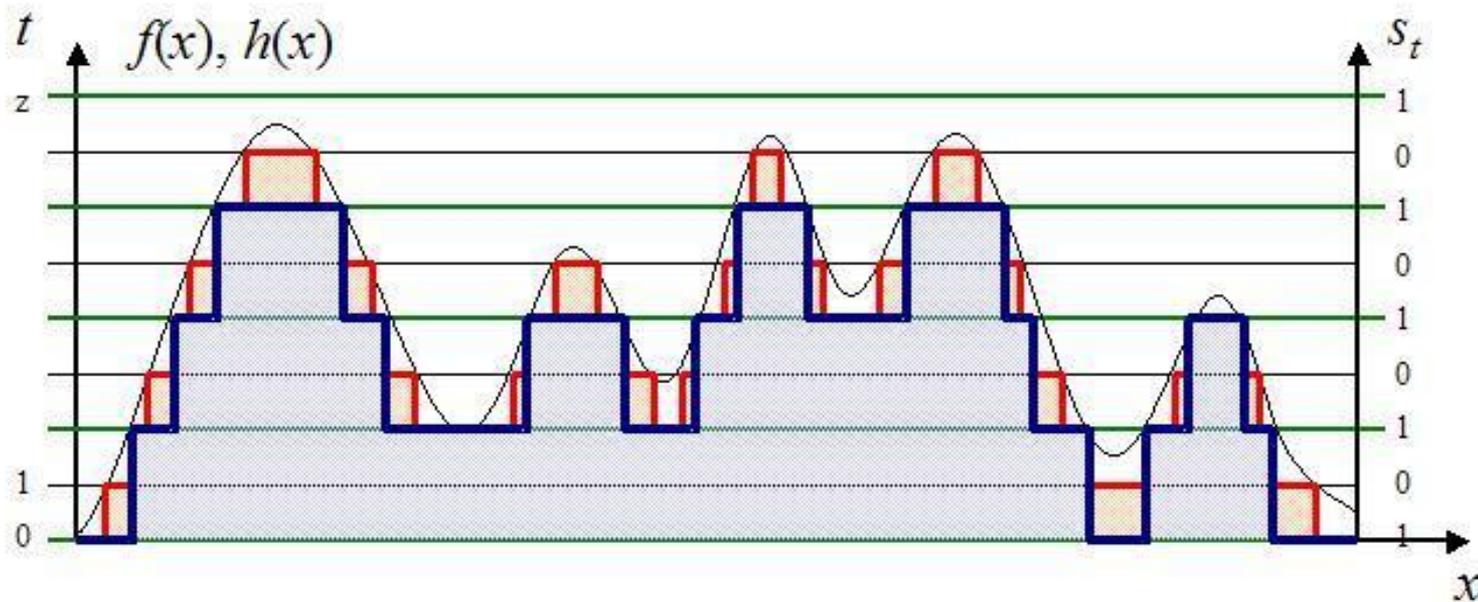
*Стековое свойство элементов срезовой цепи изображения:
а) полутоновое изображение, б) з) ряд последовательных яркостных срезов с различными порогами t .*

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений

Оператор уменьшающей срезовой фильтрации:

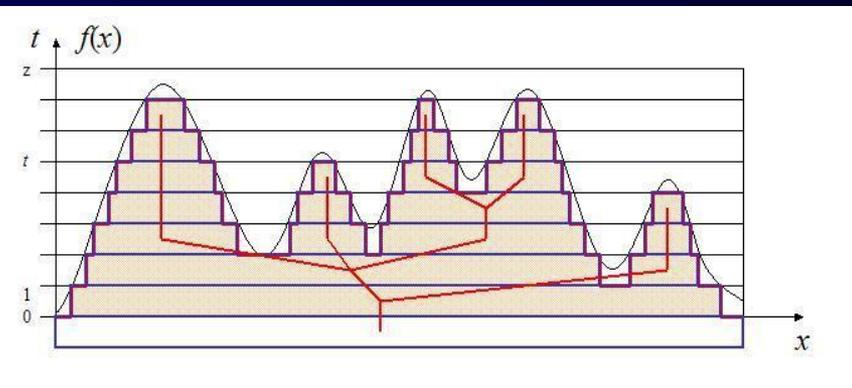
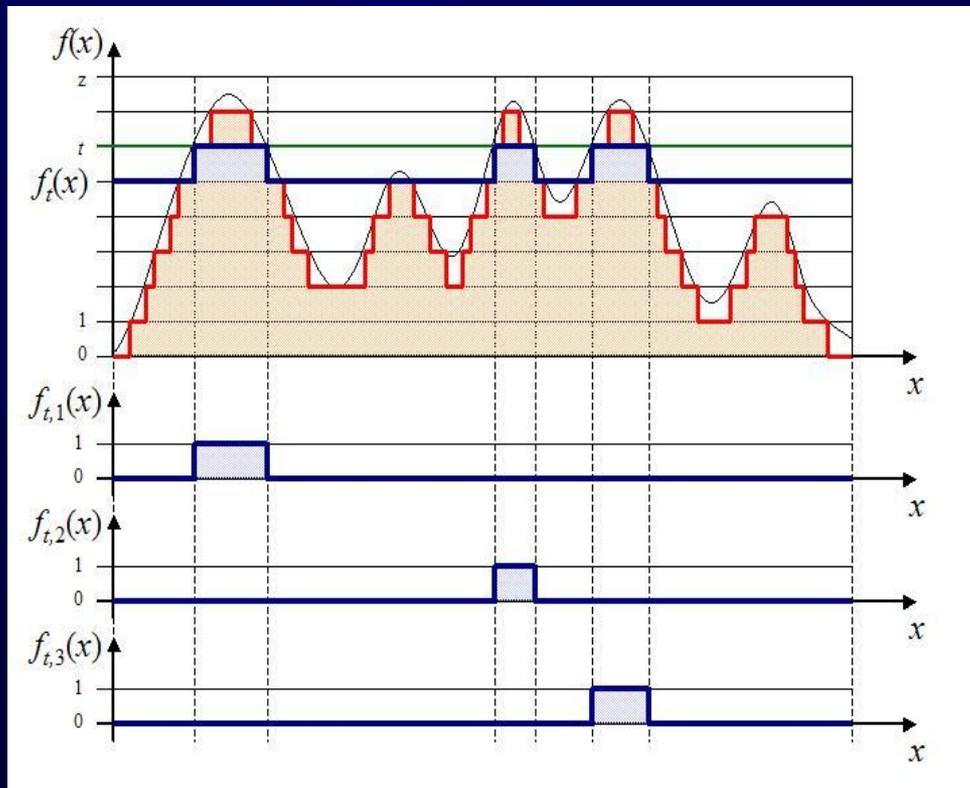
$$\psi_S f(x) = h(x) = \sum_{t=0..z} h_t(x) = \max_{t=0..z} (t \times h_t(x))$$

$$h_t(x) = \max_{r=t..z} (f_r(x) : s_r > 0)$$



Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений

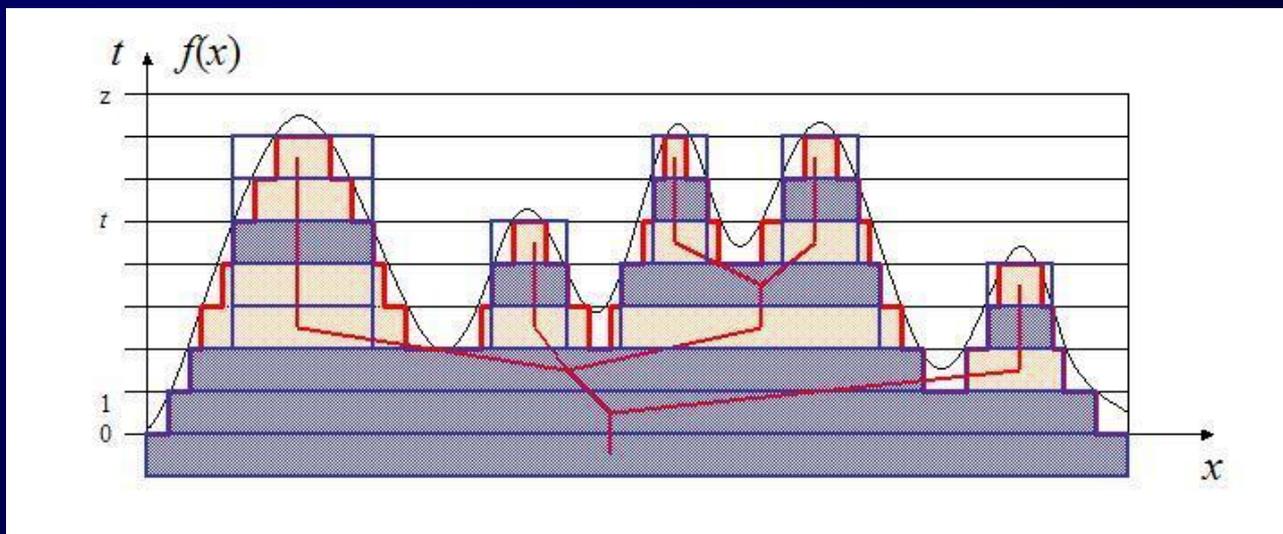
Дерево срезовых сегментов:



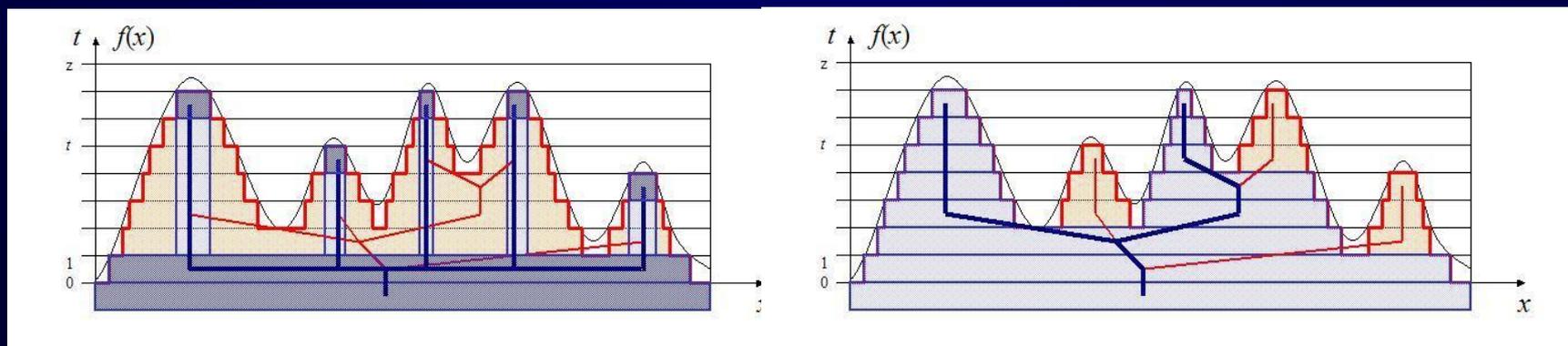
$$f_t(x) = \sum_{k=1..n(t)} f_{t,k}(x) = \max_{k=1..n(t)} (f_{t,k}(x))$$

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений

1. Морфологический фильтр, сохраняющий структуру стекового дерева



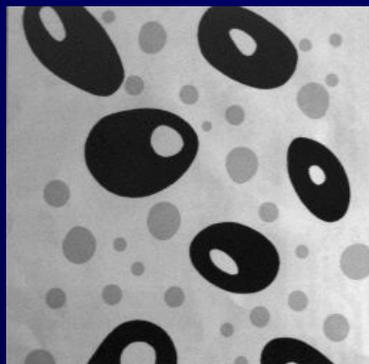
2. Морфологический фильтр с преобразованиями стекового дерева:



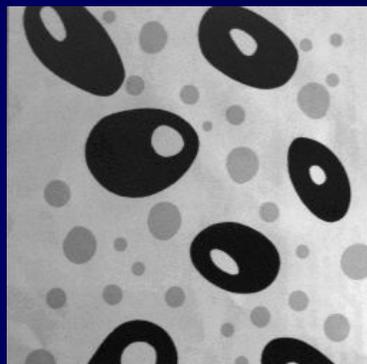
Слияние узлов

Удаление ветвей

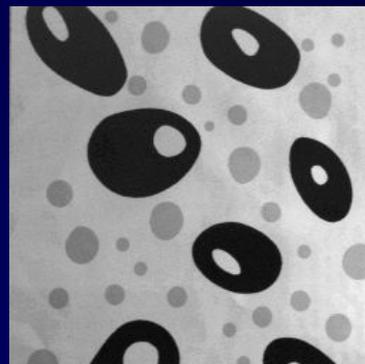
Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений



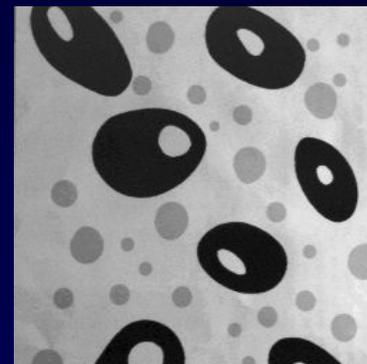
а) $\alpha=0$, $n=56$;



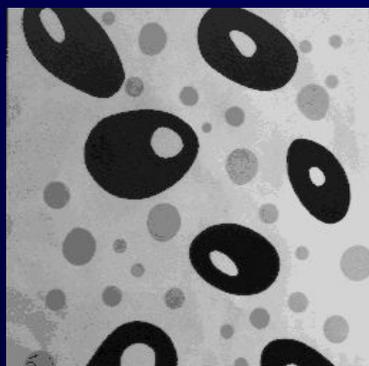
б) $\alpha=10$, $n=53$;



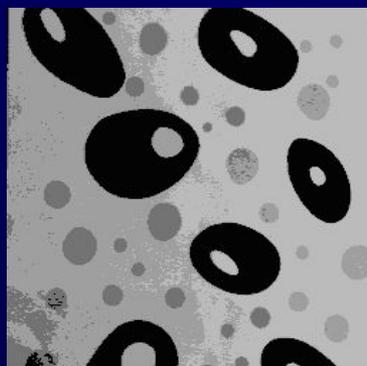
в) $\alpha=100$, $n=45$;



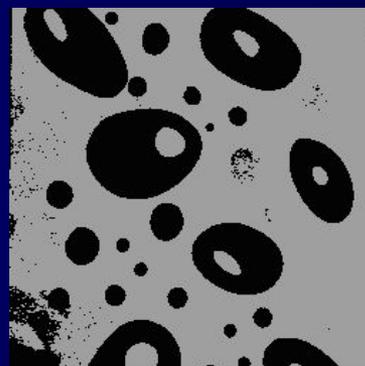
г) $\alpha=1000$, $n=33$;



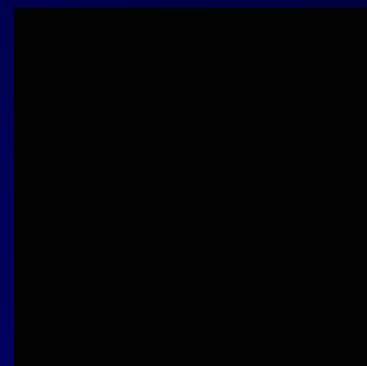
д) $\alpha=10000$, $n=12$;



е) $\alpha=100000$, $n=4$;



ж) $\alpha=1000000$, $n=2$;

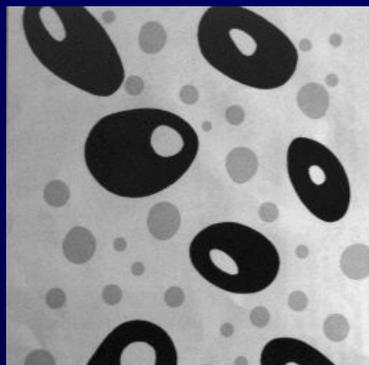


з) $\alpha=10000000$, $n=1$.

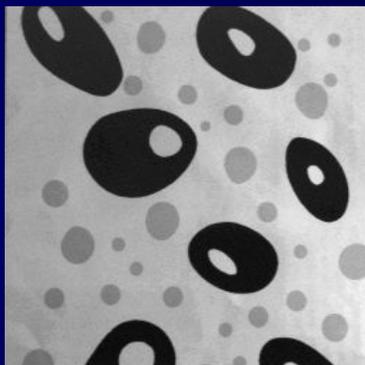
Примеры морфологического открытия изображения по срезовой цепи при различных значениях модельного параметра α , определяющего число n опорных срезов.

$$\|A - B\| + \alpha \times n(B) \rightarrow \min(B: B \leq A)$$

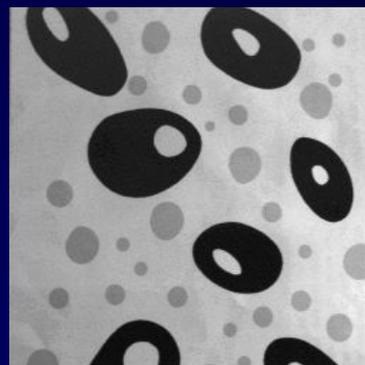
Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений



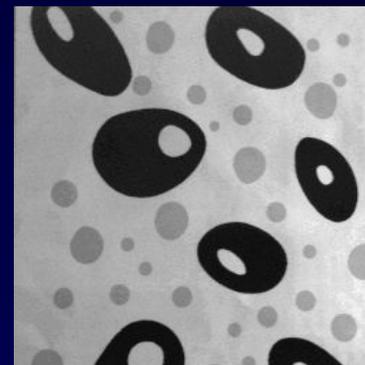
а) $\alpha=0$, $n=56$;



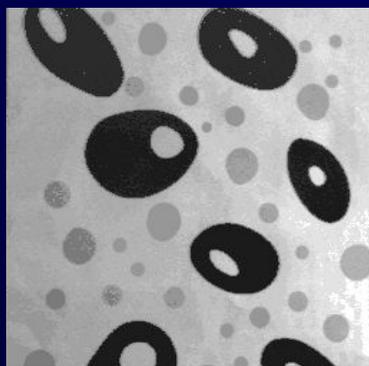
б) $\alpha=10$, $n=53$;



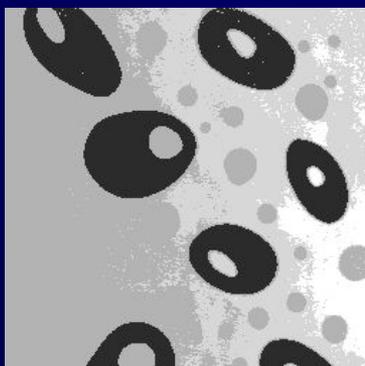
в) $\alpha=100$, $n=45$;



г) $\alpha=1000$, $n=32$;



д) $\alpha=10000$, $n=12$;



е) $\alpha=100000$, $n=4$;



ж) $\alpha=1000000$, $n=1$;



з) $\alpha=10000000$, $n=1$.

Примеры морфологического закрытия изображения по срезовой цепи при различных значениях модельного параметра α , определяющего число n опорных срезов.

$$\|A - B\| + \alpha \times n(B) \rightarrow \min(B: A \leq B)$$

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений



а) $\alpha=0$, $n=1584$;



б) $\alpha=10$, $n=686$;



в) $\alpha=100$, $n=371$;



г) $\alpha=1000$, $n=120$;



д) $\alpha=10000$, $n=24$;



е) $\alpha=100000$, $n=8$;



ж) $\alpha=1000000$, $n=3$;



з) $\alpha=10000000$, $n=1$.

Примеры морфологического **открытия** изображения по срезовому дереву при различных значениях модельного параметра α , определяющего число n опорных срезových областей.

$$\|A - B\| + \alpha \times n(B) \rightarrow \min(B: B \leq A)$$

Морфологическая фильтрация с использованием стековых представлений



а) $\alpha=0$, $n=1395$;



б) $\alpha=10$, $n=813$;



в) $\alpha=100$, $n=480$;



г) $\alpha=1000$, $n=156$;



д) $\alpha=10000$, $n=38$;



е) $\alpha=100000$, $n=12$;



ж) $\alpha=1000000$, $n=2$;



з) $\alpha=10000000$, $n=1$.

Примеры морфологического закрытия изображения по срезовому дереву при различных значениях модельного параметра α , определяющего число n опорных срезковых областей.

$$\|A - B\| + \alpha \times n(B) \rightarrow \min(B: A \leq B)$$

НЕПРОЕКТИВНЫЕ МОРФОЛОГИИ

**МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СВИДЕТЕЛЬСТВ**

(от математического зрения к компьютерному)

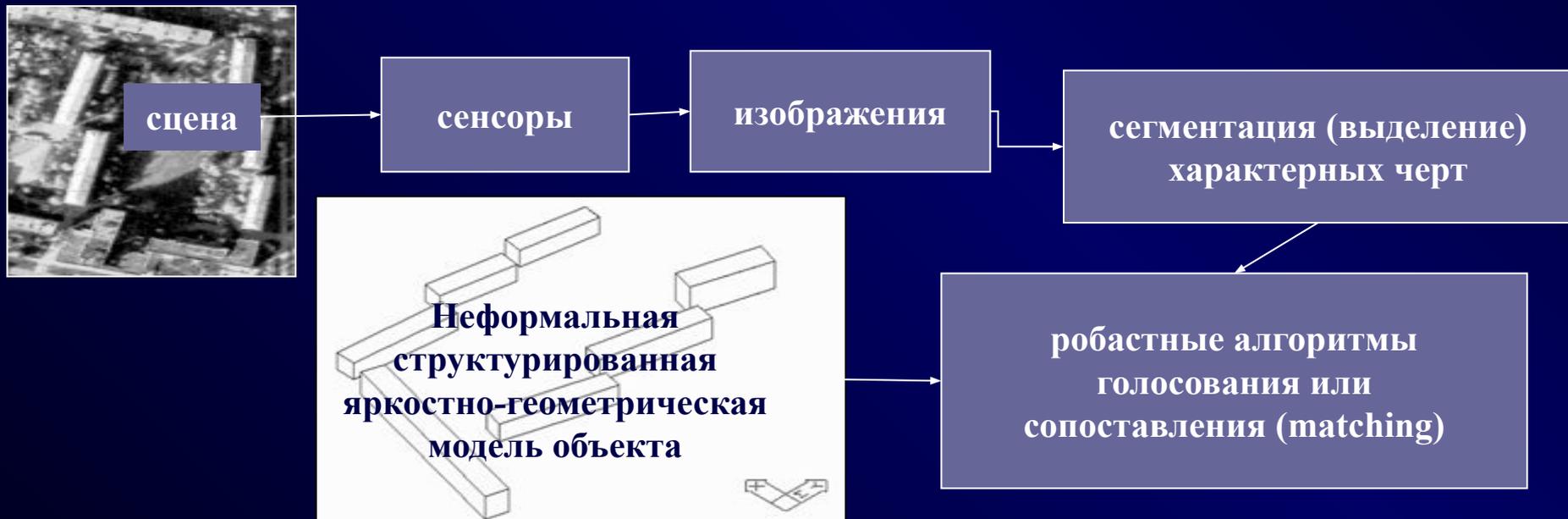
МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД

к построению эффективных процедур обнаружения объектов

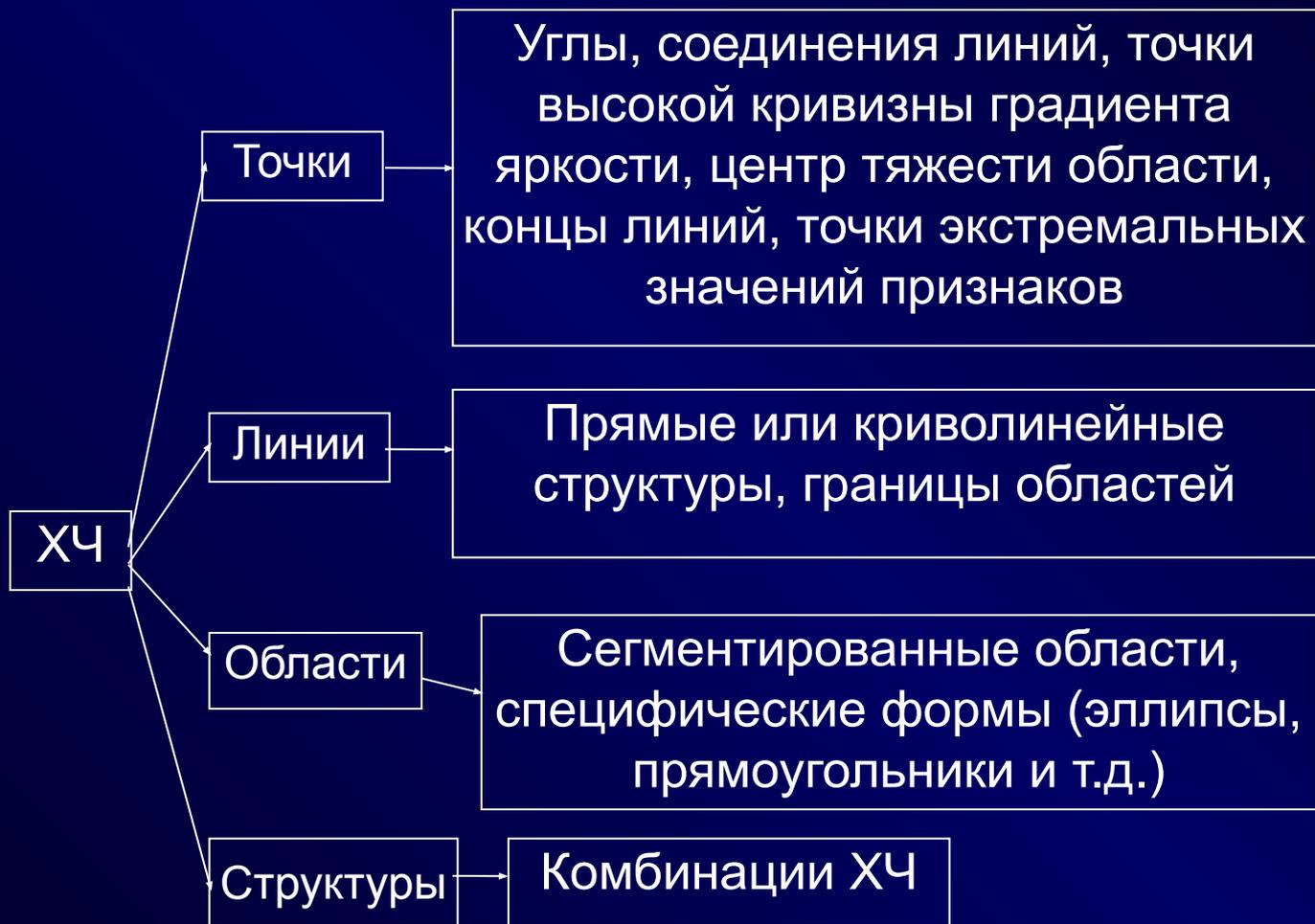
Основной современный подход к задаче обнаружения и распознавания – обнаружение и распознавание объектов, основанное на их структурированных яркостно-геометрических моделях.

1. Составление яркостно-геометрической конструкции (модели объекта) – *неформальный* элемент алгоритмизации
2. Поиск и локализация объекта распознавания – формальный элемент алгоритмизации

Схема модельного подхода к обнаружению объектов



Характерные элементы (черты), используемые в иерархических алгоритмах обнаружения

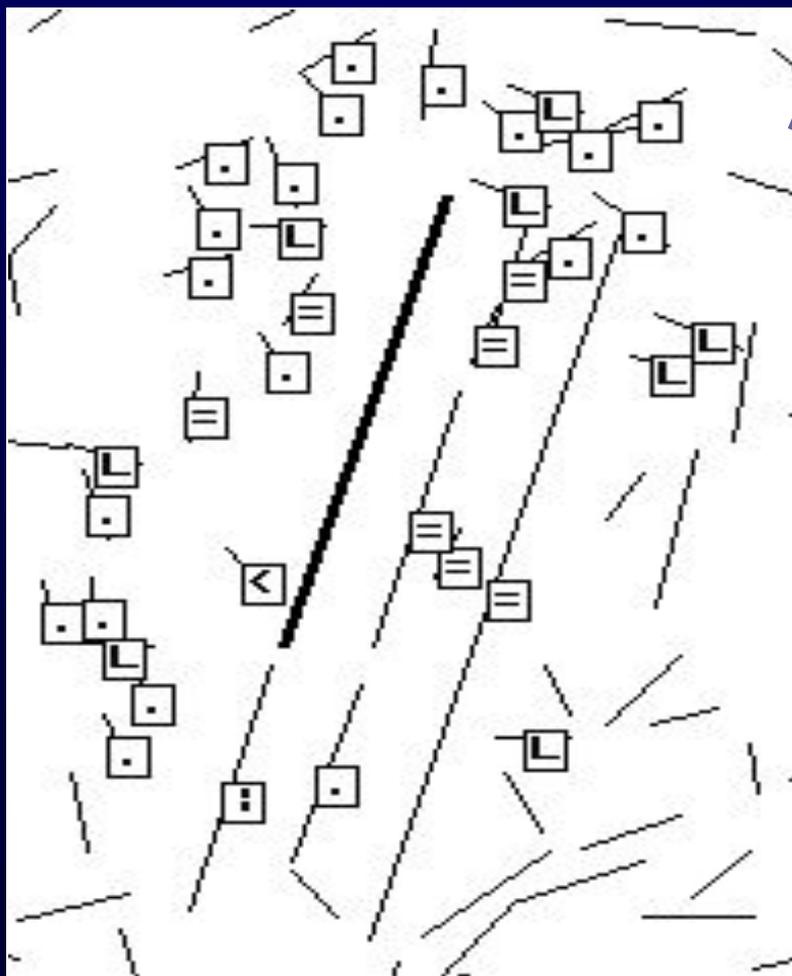


Свойства (атрибуты) характерных черт

Характерные черты на изображении имеют следующие виды атрибутов:

- 1. Положение:** Концы отрезка, центр отрезка, центр тяжести области, вершины многоугольников;
- 2. Геометрические атрибуты:** Ориентация, длина, кривизна, площадь, периметр, ширина линии, минимальный и максимальный диаметр области, оси симметрии, число и положение особых точек, показатель компактности;
- 3. Радиометрические атрибуты:** Контраст, статистика распределения яркости, знак и величина края, автокорреляция;
- 4. Текстурные атрибуты:** Матрица смежности, показатель однородности, энергия, энтропия, статистика градиентов текстуры, результаты применения текстурных фильтров, моменты;
- 5. Топологические атрибуты:** Связность, соседство, общие точки, пересечение, параллельность, перекрытие, включение;
- 6. Цветовые/многозональные атрибуты:** вектор атрибутов для каждого канала;
- 7. Динамические атрибуты:** атрибуты статических и движущихся объектов;
- 8. Временные атрибуты:** функции изменения атрибутов со временем.

Примеры атрибутов характерных черт



Исходная информация



‘.’ - близость;
‘!’ - коллинеарность;
‘=’ - параллельность;
‘L’ - перпендикулярность; ‘<’ –
угол.

— Выбранный отрезок
— Другие линии

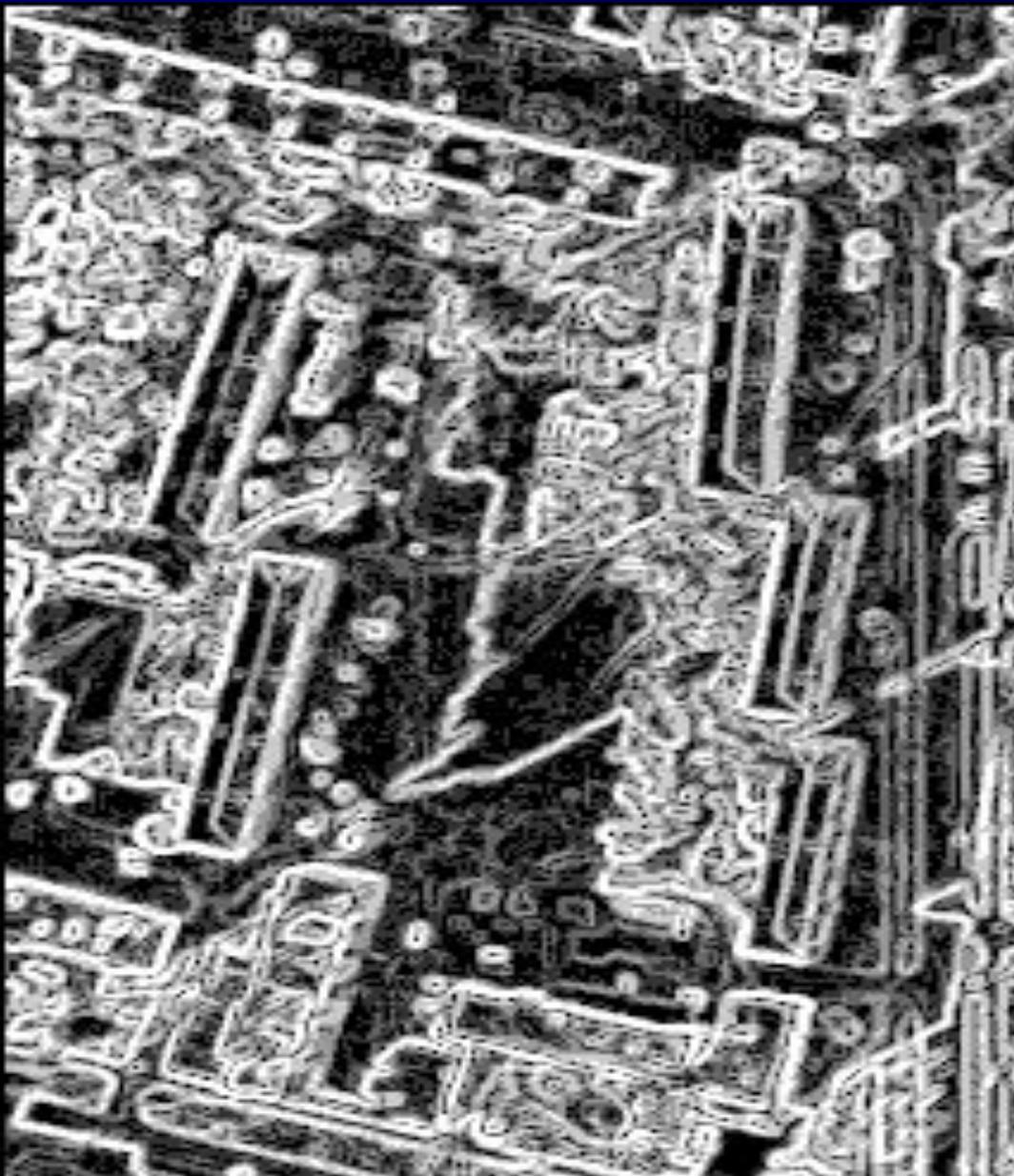
Критерии выбора ХЧ и их атрибутов для построения алгоритмов обнаружения

- 1. Присутствие/плотность:** наличие данных ХЧ на всех используемых изображениях, достаточная плотность ХЧ для покрытия интересующего района;
- 2. Редкость/Уникальность:** редкость конкретной ХЧ на изображении, уникальность ХЧ в окрестности;
- 3. Инвариантность/Устойчивость:** робастность по отношению к геометрическим и радиометрическим искажениям, нечувствительность к шуму;
- 4. Локализация:** возможность точной локализации;
- 5. Интерпретация:** возможность быстрого распознавания и интерпретации;
- 6. Скорость:** время выделения данного класса ХЧ из исходного изображения.



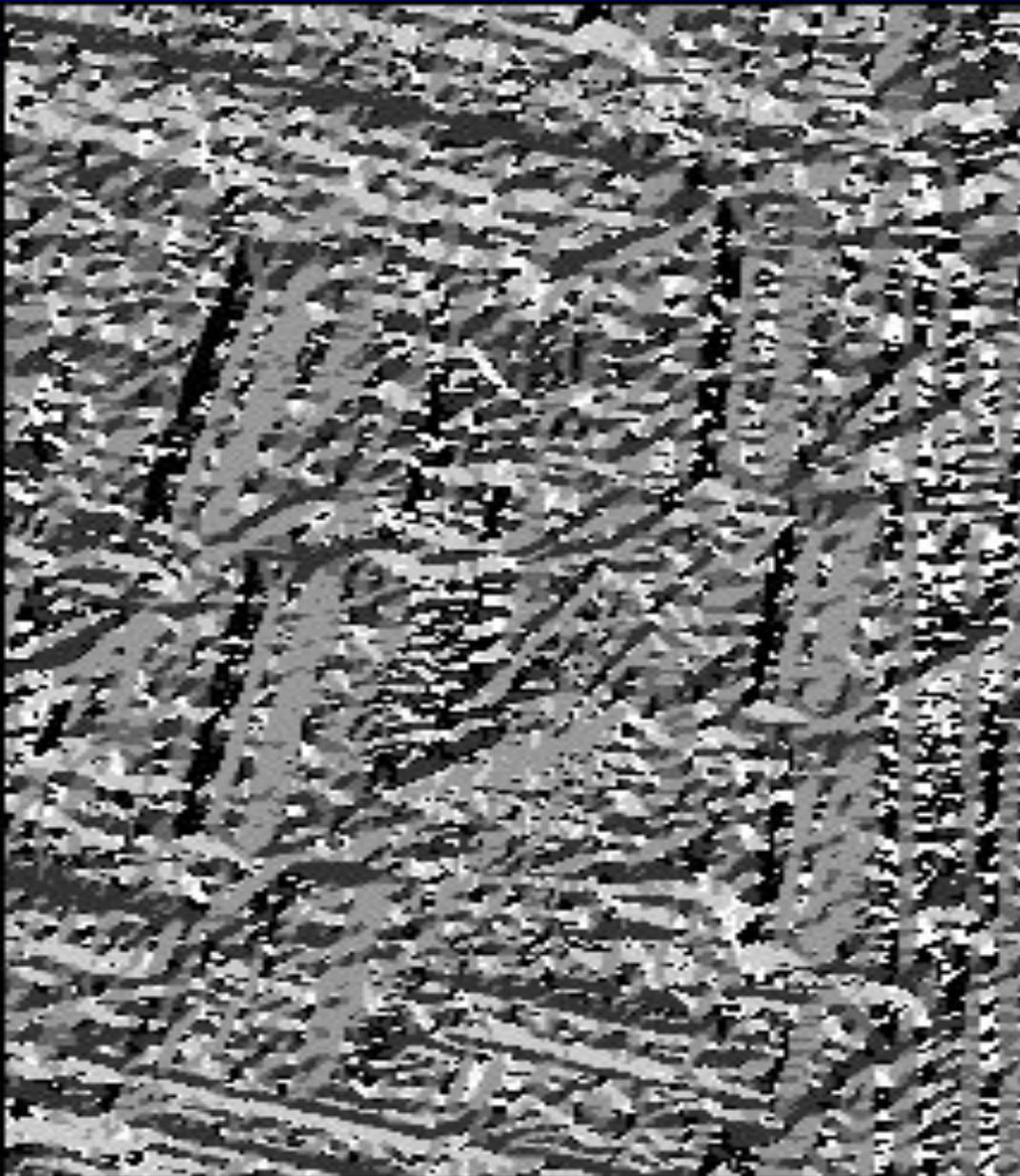
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

исходное изображение



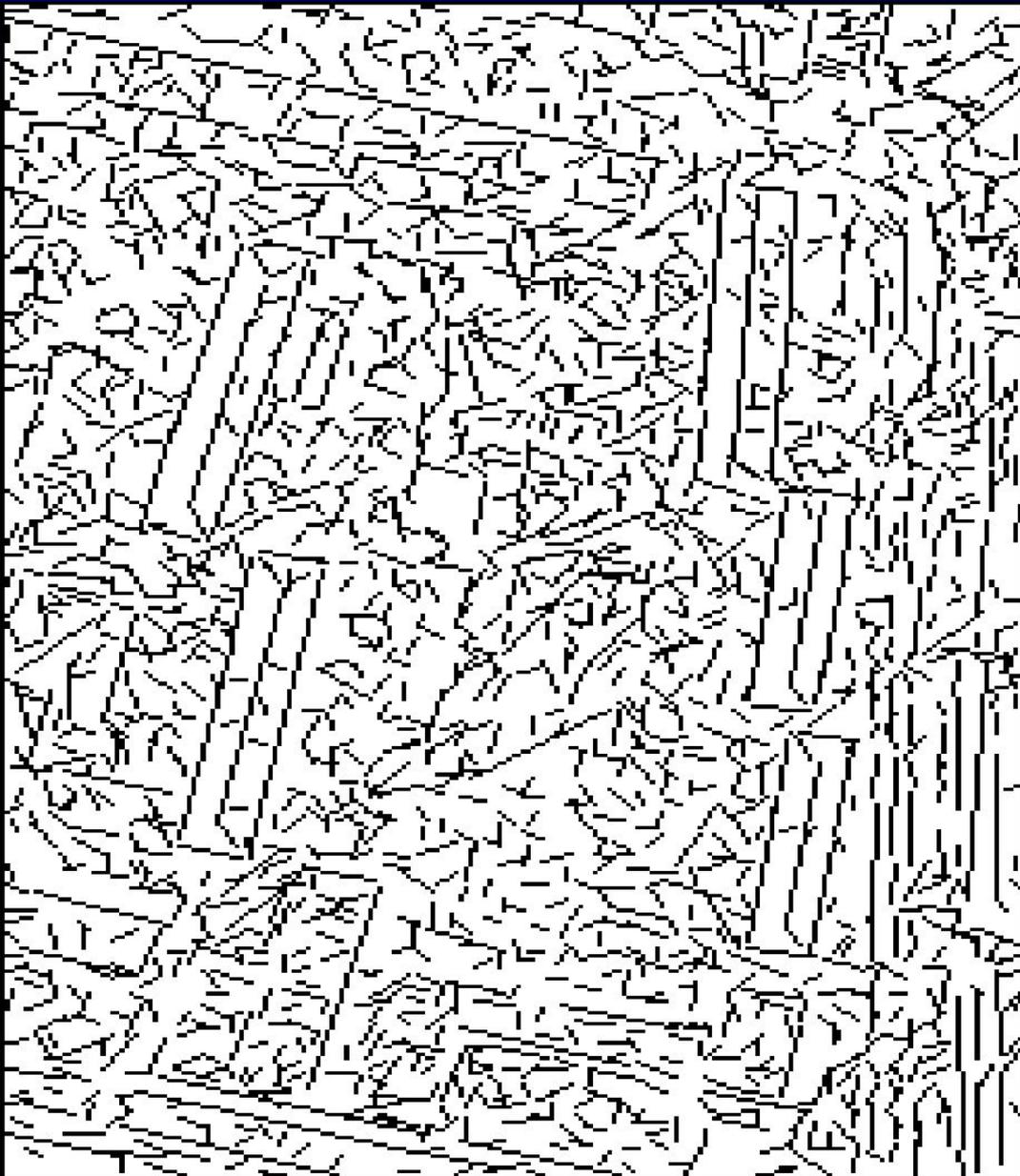
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Контурный
препарат*



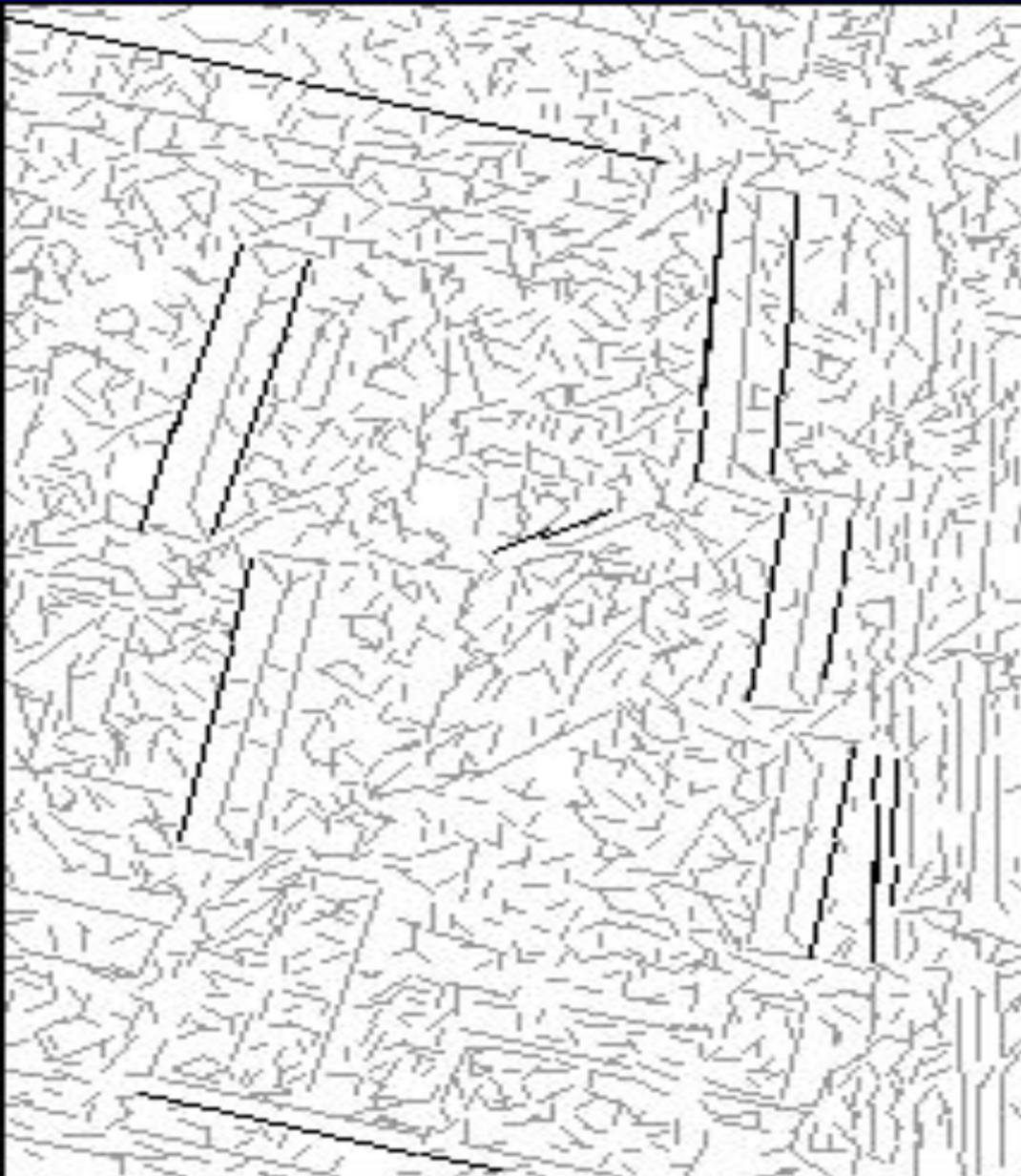
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Выделение
характерных черт -
областей поддержки
линеаментов*



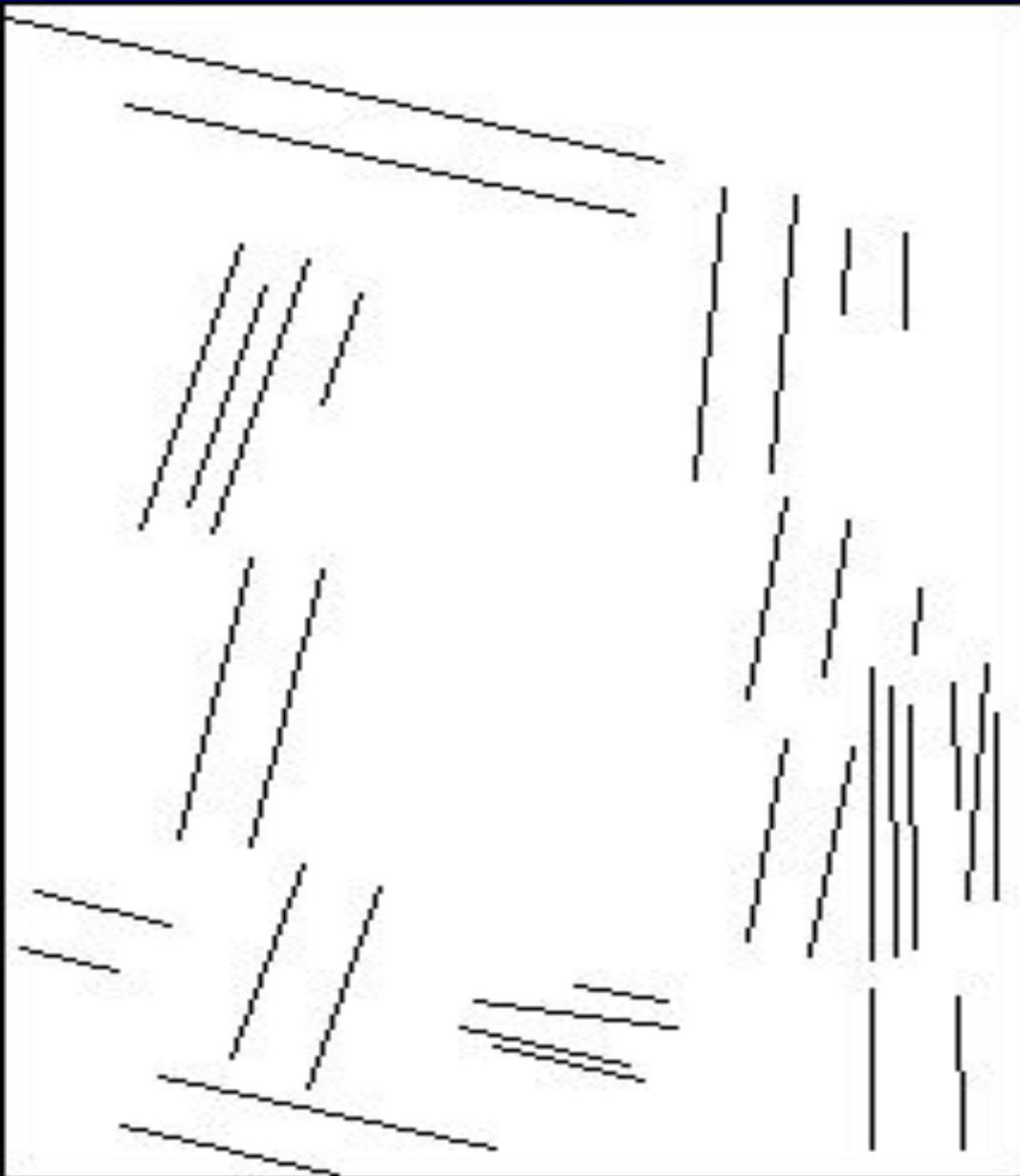
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Выделение первичных
линеаментов*



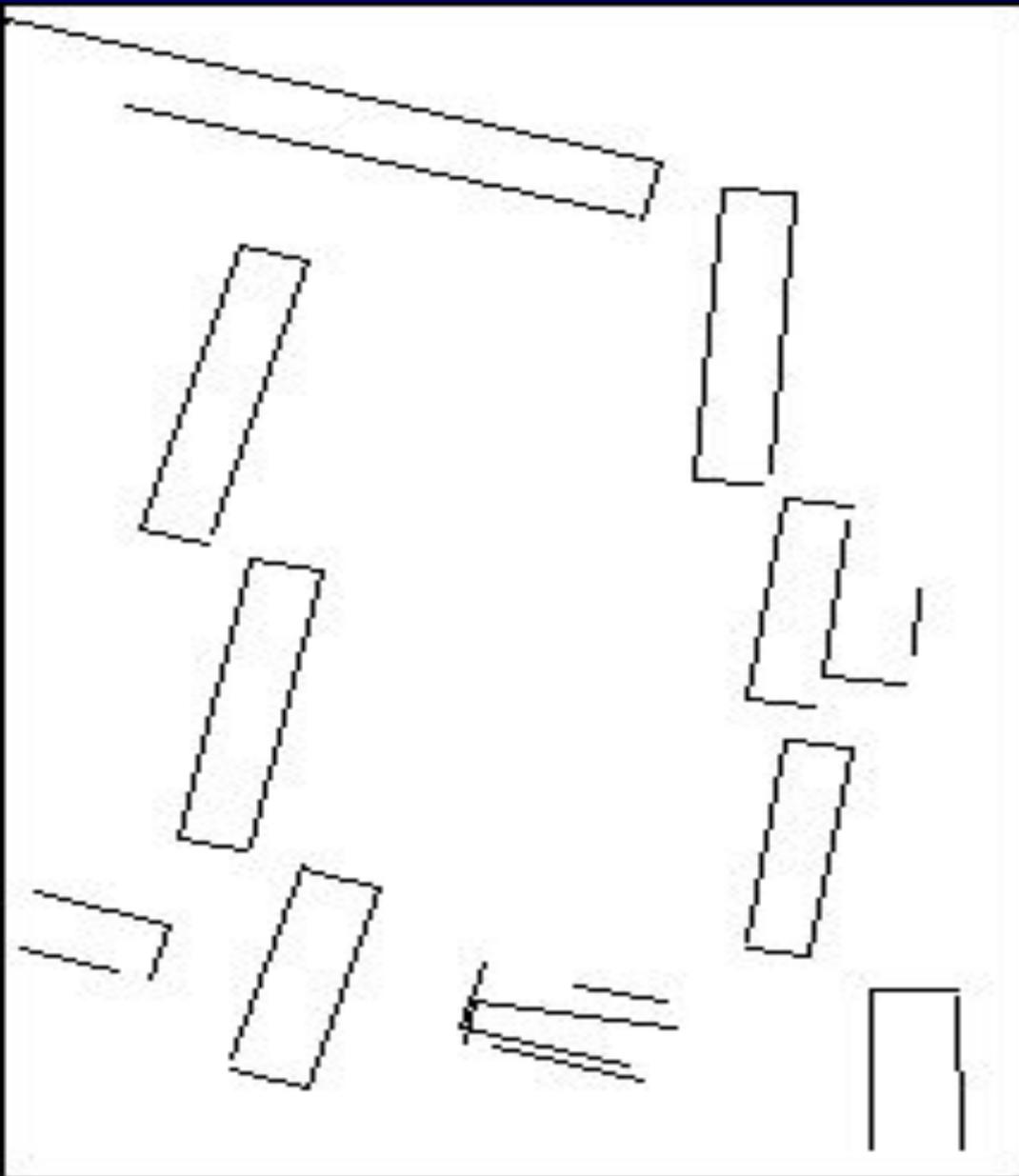
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Выделение крупных и/или
параллельных
линеаментов*



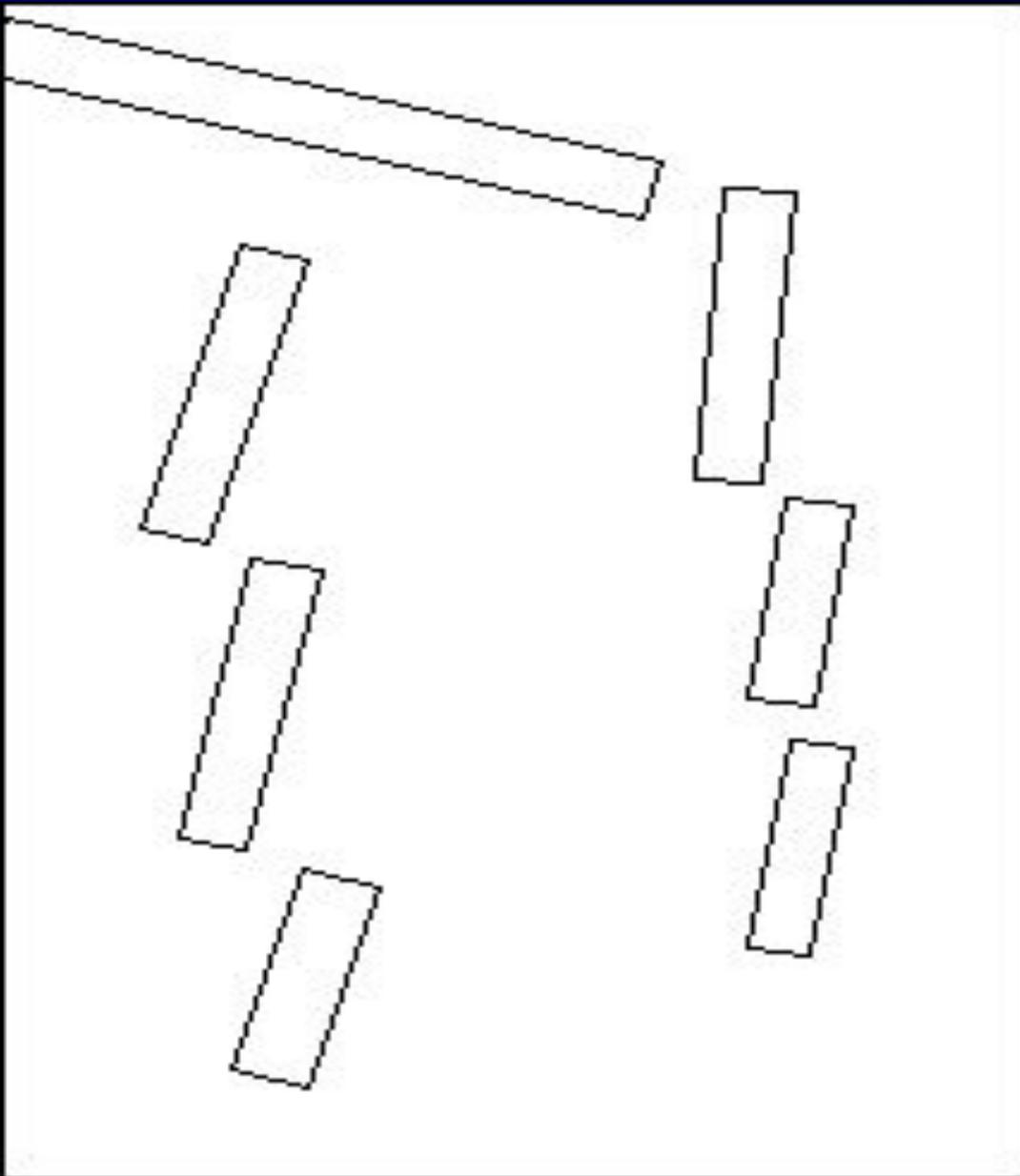
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

Фильтрация по размеру



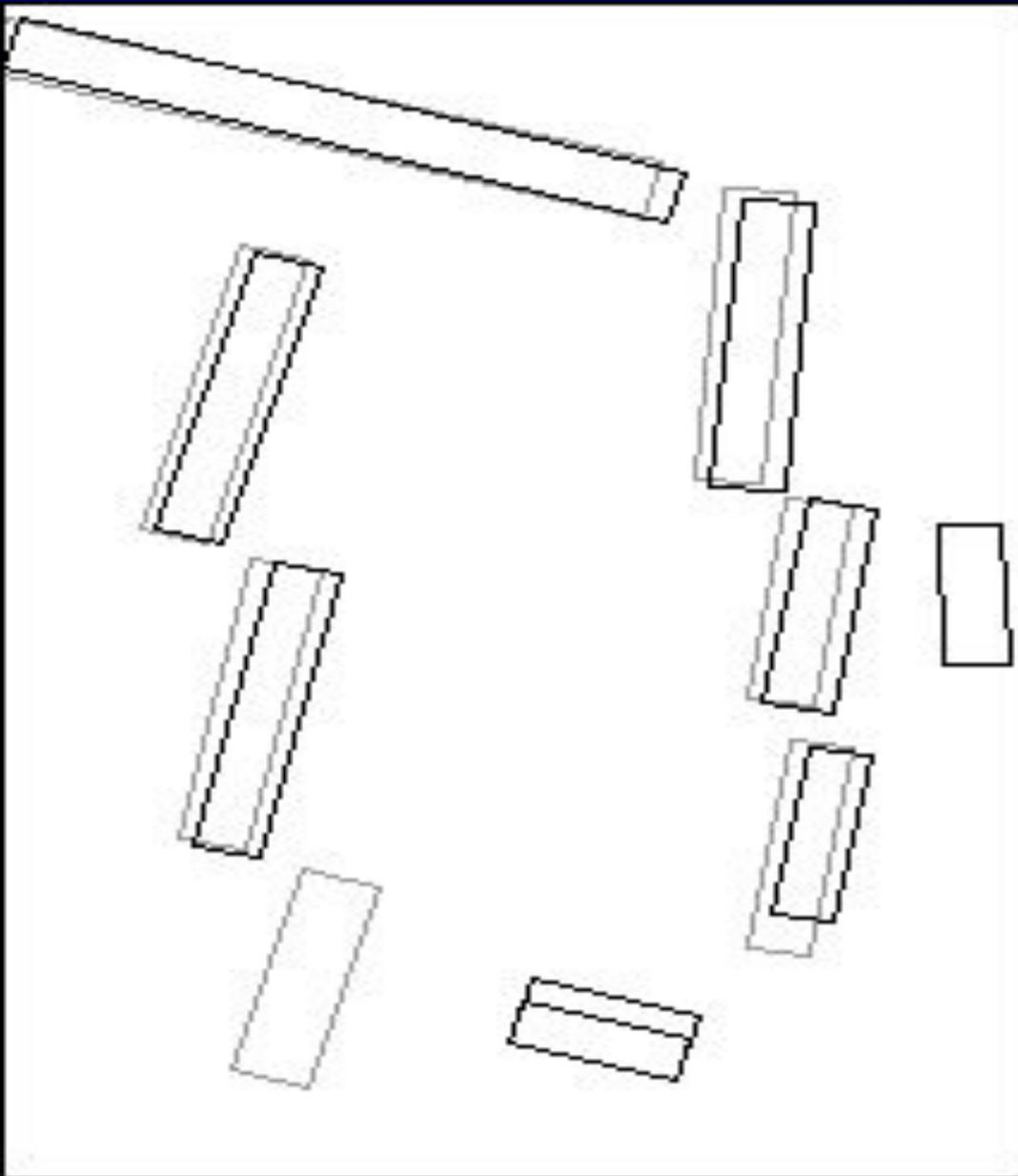
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

Поиск П-образности



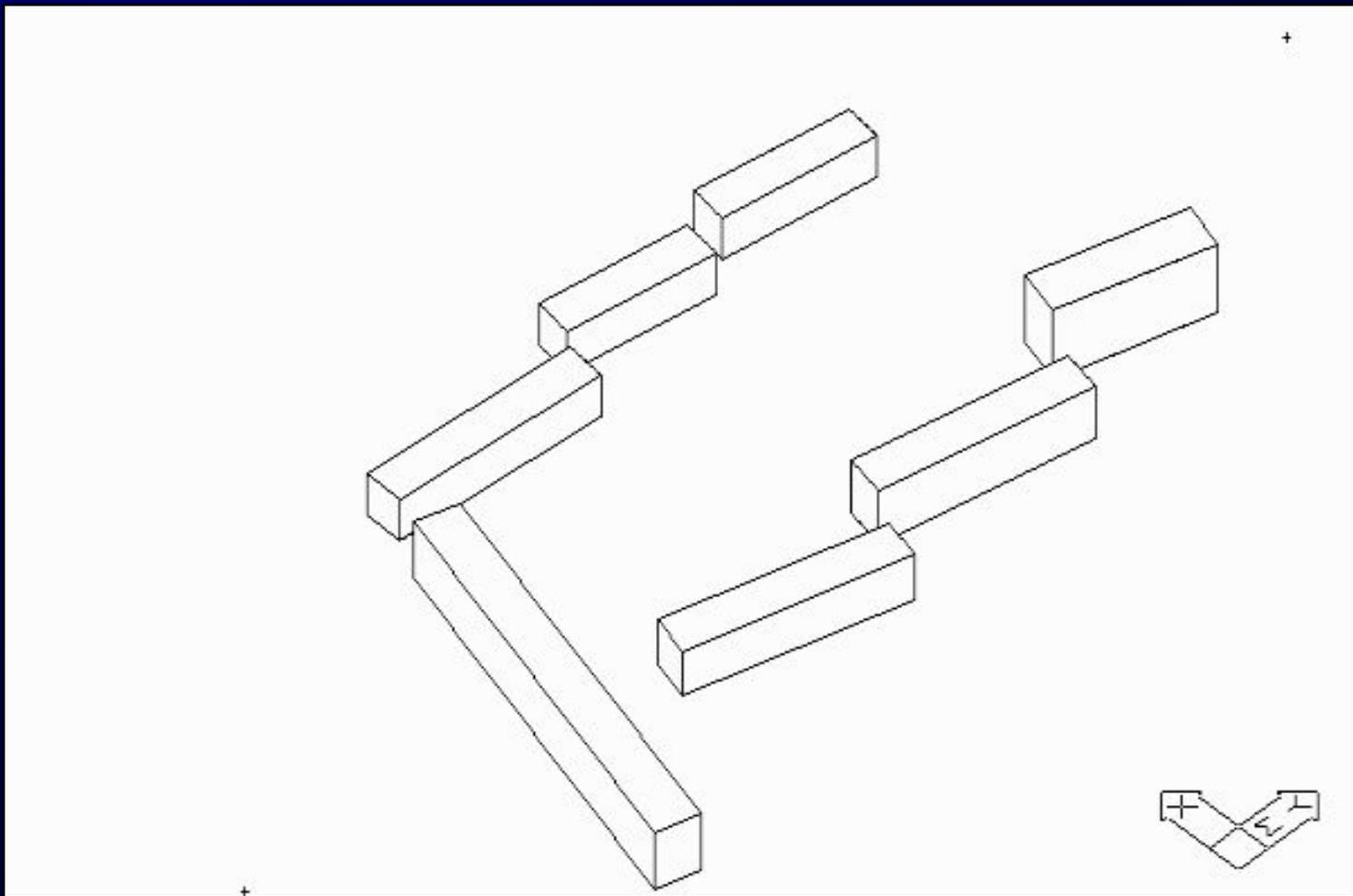
Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Окончательная 2D-
модель*



Пример
автоматического
обнаружения зданий
с летательного
аппарата

*Межкадровое
соответствие*



*Окончательная
модель*

Морфологический анализ свидетельств

Вероятностная интерпретация методов морфологического анализа изображений

Вероятностная модель формирования образа

$$P(\mathbf{M}): \Omega \rightarrow [0,1],$$

Вероятностная модель регистрации изображения

$$P(\mathbf{L}/\mathbf{M}): \mathbf{M} \rightarrow [0,1],$$

Вероятностная модель искажений

$$P(\mathbf{A}/\mathbf{L}): \mathbf{M} \times \Omega \rightarrow [0,1]$$

Критерий максимальной вероятности

$$P(\mathbf{A},\mathbf{L})=P(\mathbf{A}/\mathbf{L}) \times P(\mathbf{L}/\mathbf{M}) \times P(\mathbf{M}) \rightarrow \max(\mathbf{L}).$$

Оператор максимально вероятной реконструкции образа

$$\psi: \Omega \rightarrow \mathbf{M}, \psi(\mathbf{A})=\mathbf{L}: P(\mathbf{A},\mathbf{L}) \rightarrow \max(\mathbf{L}).$$

Морфологический анализ свидетельств

Вероятностное обобщение понятия проективности

При вторичном применении оператора максимально вероятной реконструкции необходимо учитывать изменения в вероятностной модели, происходящие при переходе от реального образа к модельному:

$$P(L, L) = P(L/L) \times P(L/M) \times P(M) \rightarrow \max(L),$$

причем переход $L \rightarrow L$ не вносит искажений.

Пусть σ - численный параметр *мощности искажений*. Тогда:

$$\forall A \neq L, \sigma > 0: P(A/L, \sigma) > P(A/L, 0);$$

$\forall \sigma \neq 0 \exists A \neq L: P(A/L) > P(L/L) \Rightarrow$ проективность может быть нарушена.

Параметрическая модель:

$$P(A, L, \sigma) = P(A/L, \sigma) \times P(L/M) \times P(M),$$

$$\psi(\sigma): \Omega \rightarrow M, \psi(A, \sigma) = L: P(A, L, \sigma) \rightarrow \max(L).$$

Требование детерминированной проективности

$$\psi(A) = \psi(\psi(A))$$

Требование вероятностной проективности

$$\psi(A, \sigma) = \psi(\psi(A, \sigma), 0)$$

Морфологический анализ свидетельств

Признаки как достаточные статистики. Независимые признаки

Набор признаков: $\mathbf{f}(A) = \langle f_1(A), \dots, f_n(A) \rangle \in \Psi^n$,

Критерий максимальной вероятности:

$$P(\mathbf{f}, L) = P(\mathbf{f}/A) \times P(A/L) \times P(L/M) \times P(M) \rightarrow \max(L).$$

Вероятностная модель измерений:

$$P(\mathbf{f}/L) = P(\mathbf{f}/A) \times P(A/L),$$

$$P(\mathbf{f}, L) = P(\mathbf{f}/L) \times P(L/M) \times P(M) \rightarrow \max(L).$$

Оператор максимально вероятной реконструкции образа по признакам

$$\psi_{\mathbf{f}}: \Omega \rightarrow \mathbf{M}, \psi_{\mathbf{f}}(A) = L: P(\mathbf{f}, L) \rightarrow \max(L).$$

Вероятностная обоснованность системы признаков

в задаче морфологического анализа:

$$P(\mathbf{f}, L) \rightarrow \max(L) \Rightarrow P(A, L) \rightarrow \max(L),$$

$$\forall A \in \Omega: \psi_{\mathbf{f}}(A) = \psi(A), P(L/A) = P(L/\mathbf{f}(A)),$$

то есть $\mathbf{f}(A)$ является достаточной статистикой для A .

Независимость признаков: существует факторизация

$$P(\mathbf{f}, L) = \prod_{i=1, \dots, n} P(f_i, L).$$

Морфологический анализ свидетельств

Анализ морфологических свидетельств

Морфологическое событие:

$$e(\mathbf{p}) = \{f(\mathbf{A}, \mathbf{p}) = e \in X\}.$$

Морфологическая гипотеза:

$$h(\mathbf{q}) = \{\psi(\mathbf{A}) = L(\mathbf{q})\}.$$

Модель голосования:

$$P(E(\mathbf{A}), h(\mathbf{q})) = \prod_{\mathbf{p} \in X} P(e(\mathbf{p}), h(\mathbf{q})) \rightarrow \max(h(\mathbf{q})),$$

где $E(\mathbf{A})$ – совокупность морфологических событий или точнее *совокупное морфологическое событие*, связанное с образом \mathbf{A} ; $h(\mathbf{q}) \subseteq H(\Theta)$, $H(\Theta)$ – пространство морфологических гипотез; $P(e(\mathbf{p}), h(\mathbf{q}))$ - вероятностная модель морфологического голосования.

Носитель гипотезы (множество влияющих событий):

$$S(h(\mathbf{q})) = \{e(\mathbf{p}) : \exists h'(\mathbf{q}) \neq h(\mathbf{q}) : P(e(\mathbf{p}), h(\mathbf{q})) \neq P(e(\mathbf{p}), h'(\mathbf{q}))\}.$$

Носитель события (множество влияющих гипотез):

$$S(e(\mathbf{p})) = \{h(\mathbf{q}) : \exists e'(\mathbf{p}) \neq e(\mathbf{p}) : P(e(\mathbf{p}), h(\mathbf{q})) \neq P(e'(\mathbf{p}), h(\mathbf{q}))\}.$$

Полную группу событий, относящихся к одному признаку $f(\mathbf{p})$, будем называть *доменом событий*, полную группу гипотез, соответствующую различным значениям $L(\mathbf{q})$ – *доменом гипотез*.

Морфологический анализ свидетельств

Анализ морфологических свидетельств

Под анализом морфологических свидетельств понимается следующая процедура:

- Морфологические события *подают голоса (свидетельствуют)* в пользу морфологических гипотез.
- Голоса накапливаются (*свидетельства суммируются*)
- Наиболее вероятной считается та гипотеза, в пользу которой подано максимальное количество голосов (*накоплена максимальная сумма свидетельств*).

Возможность факторизации функции вероятности является **необходимым и достаточным** условием возможности независимого (от порядка вычислений) аккумулялирования (накопления) свидетельств.

Метод анализа морфологических свидетельств

- строится экспертная вероятностная модель, описывающая связь между особенностями изображения (характерными чертами) и гипотезой о принадлежности объекта заданной яркостно-геометрической модели
- вероятностная модель используется непосредственно в ходе низкоуровневого анализа изображения
- каждая обнаруженная особенность изображения (ХЧ) рассматривается как событие, свидетельствующее в пользу гипотезы (ряда гипотез) о наличии и характеристиках искомого объекта (голосование в специальном аккумуляторном пространстве).

**РАЗРАБОТКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО
ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ
АНАЛИЗА МОРФОЛОГИЧЕСКИХ
СВИДЕТЕЛЬСТВ**

(от математического зрения к компьютерному)

Морфологический анализ свидетельств

Способы повышения вычислительной эффективности:

- независимое аккумуляирование свидетельств
- декомпозиция вектора параметров $S(\theta) = S'(\theta') \cdot S''(\theta'')$
- редукция вектора параметров $S(\theta) \rightarrow S'(\theta')$
- загрубление модели объекта $M \rightarrow M' \supseteq M$
- иерархический анализ свидетельств

Модульная схема алгоритма обнаружения

- *обработка изображения по схеме голосования с целью выделения объектов или их составляющих*
- *анализ аккумулятора с целью определения положения и/или ориентации объектов*
- *повторный анализ изображения с целью проверки природы обнаруженных объектов и уточнения их параметров*

Морфологический анализ свидетельств

Иерархический анализ свидетельств. Теорема разделения

Пусть

1. Свидетельства $\{e_k\}$ статистически независимы в совокупности.
2. Набор гипотез первого уровня $\langle H \rangle = \{H_j\}$ удовлетворяет условию $S(H_i)S(H_j) = 0, i, j; H_i, H_j \in \langle H \rangle; .$

$$\text{Тогда } P(H/Im) = \frac{\frac{P(H)}{P} \prod_j \{P(H_j / Im)\}}{\frac{P(H)}{P} \prod_j \{P(H_j / Im)\} + \frac{P(H^C)}{P^C} \prod_j \{P(H_j^C / Im)\}}$$

$$\text{где } P = \prod_j \{P(H_j / Im)\} \quad P^C = \prod_j \{P(H_j^C / Im)\}$$

$$P(H_j / Im) = \frac{P(H_j) \times \prod \{P(e_k / H)\}}{P(H_j) \times \prod \{P(e_k / H)\} + P(H_j^C) \times \prod \{P(e_k / H_j^C)\}}$$

Морфологический анализ свидетельств

Последовательность шагов разработки алгоритма обнаружения и идентификации объектов

1. описать *модели объекта, регистрации и искажений*
2. определить степень *загрубления модели объекта*
3. осуществить необходимую *редукцию параметров*
4. определить *типы «событий»*
5. составить качественную *вероятностную модель*
6. определить *процедуру голосования*
7. определить соответствующую *процедуру анализа аккумулятора*
8. разработать процедуру *постпроверки достоверности детектирования*

Пример. Метод обнаружения штриховых кодов и текстовых областей на изображениях

Обнаружение штриховых кодов. Постановка задачи

Модель объекта. Прямоугольная область плоскости, заполненная белыми и черными полосами. Ширина полос может быть различной.

Модель регистрации. Геометрическая - проективные преобразования с малыми углами (\approx аффинные). Радиометрическая - отображение черно-белой палитры на шкалу серого цвета (0-15).

Модель искажений. По яркости - блики, перечеркивание, замещение фрагментов. По геометрии - изгибы и "коробление" несущей поверхности.

Обнаружение штриховых кодов. Разработка алгоритма

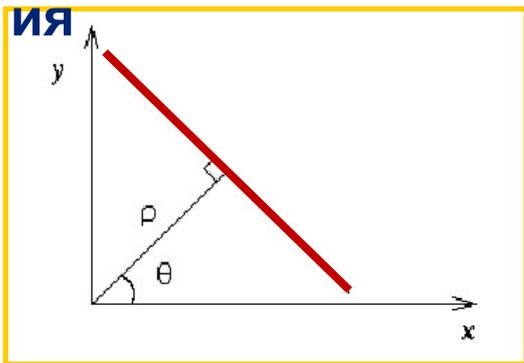
1. **Загрубление модели.** Прямоугольная область плоскости $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$ с высокой коллинеарностью градиентов.

2. **Загрубление и декомпозиция вектора параметров.** Модель "четыре угла" преобразуется к модели "четыре прямые" $(\rho_1, \theta, \rho_2, \theta+90^\circ, \rho_3, \theta, \rho_4, \theta+90^\circ)$. Отсюда декомпозиция модели на кодосодержащую полосу (ρ_1, ρ_2, θ) и положение в полосе (ρ_3, ρ_4) .

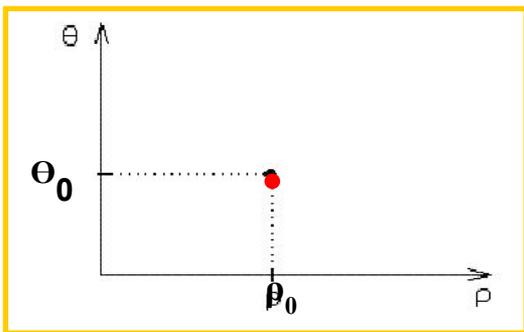
3. **Аккумуляция свидетельств.** Голоса пикселей с высоким градиентом аккумуляруются в двухпараметрическом пространстве Hough (ρ, θ) с учетом направления градиента.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАФА

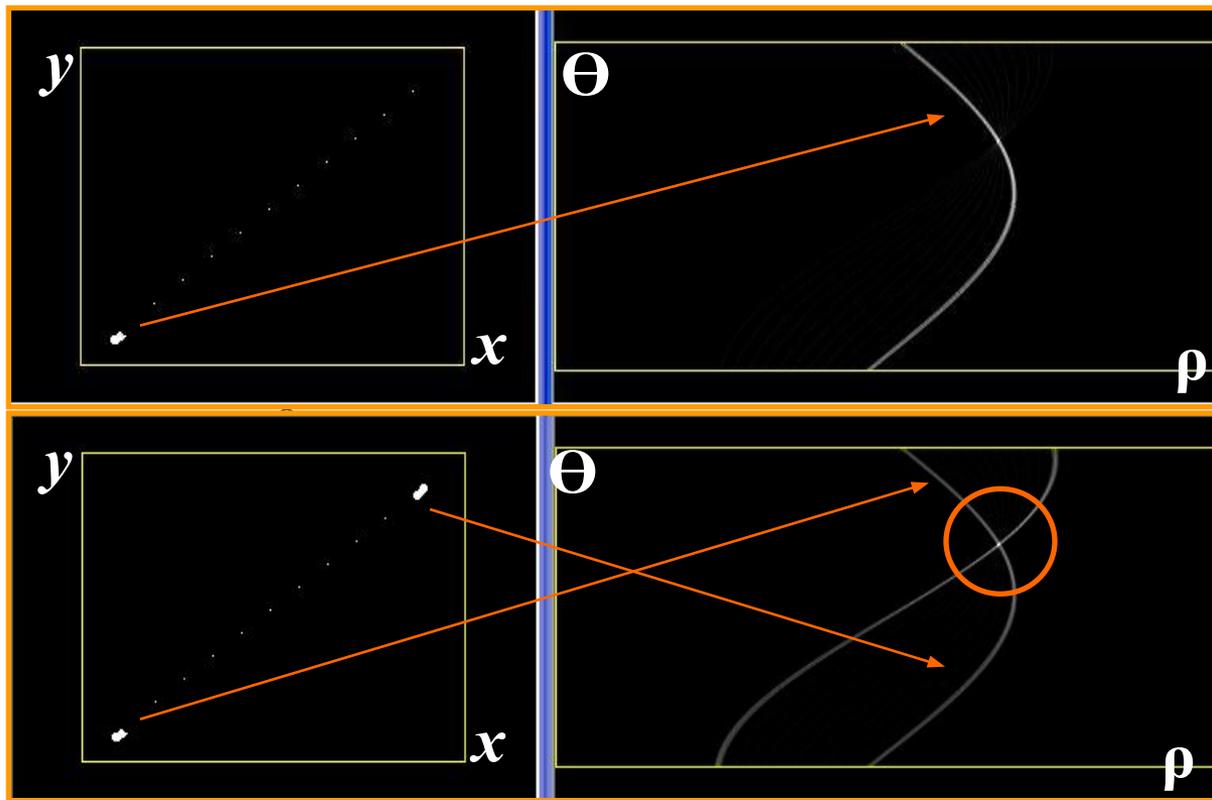
Параметризац



$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho$$



Голосование точек в



Достоинства: инвариантность к аффинным преобразованиям,

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

(от математического зрения к компьютерному)

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Постановка задачи

$$P_1(R, A) \rightarrow \min(R, A) \mid P_2(R, A) \leq P_{2max}, T(R, A) \leq T_{max}$$

P_1 – вероятность необнаружения объекта;

P_2 – вероятность ложной тревоги;

T – вычислительная стоимость алгоритма
(время, ресурсы);

R – используемая морфологическая система;

A – алгоритм анализа данных.

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

1. Метод автоматизированного конструирования алгоритмов обнаружения объектов, основанный на преобразованиях модельных описаний

- *Функции системы*
- *Метод преобразования модельных описаний*
- *Рекурсивные модели и алгоритмы*
- *Нерекурсивные модели и алгоритмы*
- *Проективные морфологии на базе неоднородных структурных моделей, описываемых логическими предикатами*

2. Метод автоматизированного конструирования модульных процедур обнаружения объектов, основанный на «генетическом отборе» элементов модельного описания

- *Общий подход к построению процедур идентификации*
- *Учет информативности опорных элементов*
- *Построение процедур идентификации объектов нескольких классов*
- *Генетический отбор морфологических процедур*

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

- 1. Формальное описание моделей объектов.*
- 2. Преобразование моделей объектов.*
- 3. Перевод декларативного описания в процедурное (сопоставление описанию объекта процедуры его обнаружения на изображении).*
- 4. Реализации полученных алгоритмов путем модификации типовых метаалгоритмов, соответствующих стандартным метамоделям.*
- 5. Вероятностное описание моделей и расчет характеристик достоверности их обнаружения.*
- 6. Учет программно-аппаратных характеристик типовых процедур (в заданной архитектуре вычислителя).*
- 7. Статистический анализ результатов обработки изображения.*

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

Метод преобразования модельных описаний

- Модель объекта:

$$Obj = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

- Преобразования моделей:

- **перестановка** порядка предикатов;

$$Obj = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n, \quad Obj = A_2 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n$$

- **декомпозиция** (разбиение) модели на две части и **редукция** (отсечение) одной из них.

- $Obj = \{ Obj_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \mid Obj_2 = A_{k+1} \wedge A_{k+2} \wedge \dots \wedge A_n \}$

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

Пример преобразования модельных описаний

Модели:

Штриховая линия = набор штрихов, лежащих на одной прямой.

(M1)

Штриховая линия = прямая, состоящая из отдельных штрихов.

(M2)

Процедуры:

Найти все штрихи, выбрать те, что лежат на одной прямой. (П1)

Последовательно находить штрихи, лежащие на одной прямой. (П2)

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

Пример преобразования модельных описаний

Рекурсивная модель (M2):

$Штрих_линия(X) = лежать_на_прямой(x) \text{ рядом}(x,y) Штрих_линия(X \setminus x);$
 $Штрих_линия(\{x\}) = лежать_на_прямой(x).$

После перестановки предикатов:

$Штрих_линия(X) = лежать_на_прямой(x) Штрих_линия(X \setminus x) \text{ рядом}(x,y);$
 $Штрих_линия(\{x\}) = лежать_на_прямой(x).$

После декомпозиции:

Нерекурсивная модель (M2'):

$Штрих_линия1(X) = лежать_на_прямой(x) Штрих_линия1(X \setminus x);$
 $Штрих_линия1(\{x\}) = лежать_на_прямой(x) ()$

Рекурсивная модель (M2''):

$Штрих_линия2(X) = \text{рядом}(x,y) Штрих_линия2(X \setminus x);$
 $Штрих_линия2(\{x\}) = \text{ИСТИНА}.$

Смешанная модель:

$M1' = (M2', M2'')$

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

Алгоритм применения построенной модели процедуры голосования:

1. Осуществить все возможные успешные индексации целевого предиката на изображении.
2. Удалить все голосующие элементы, не участвующие в найденных успешных индексациях целевого предиката.

*Результатом применения процедуры является **морфологическая проекция** изображения на модель объекта, заданную в запросе.*

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Конструирование детекторов по модельным описаниям

Проективные морфологии на базе неоднородных структурных моделей, описываемых логическими предикатами

Утверждение (достаточное условие построения проективного морфологического фильтра на базе логической модели):

Морфологическое преобразование на базе модели M является морфологическим проектором, если выполняется условие

$$\forall \mathbf{q}: A(\mathbf{q})=0 \Rightarrow \forall A'(\mathbf{q}) \neq 0: M(A(Q) \vee A(\mathbf{q})) = M(A(Q) \vee A'(\mathbf{q}))$$

(то есть в пользу $M(A(Q))$ голосуют только ненулевые элементы $A(\mathbf{q})$).

Морфологический проектор:

$$\text{Pr}(A(\mathbf{p}), M) = \Phi(A(\mathbf{p}), M) = \Phi(\Phi(A(\mathbf{p}), M), M)$$

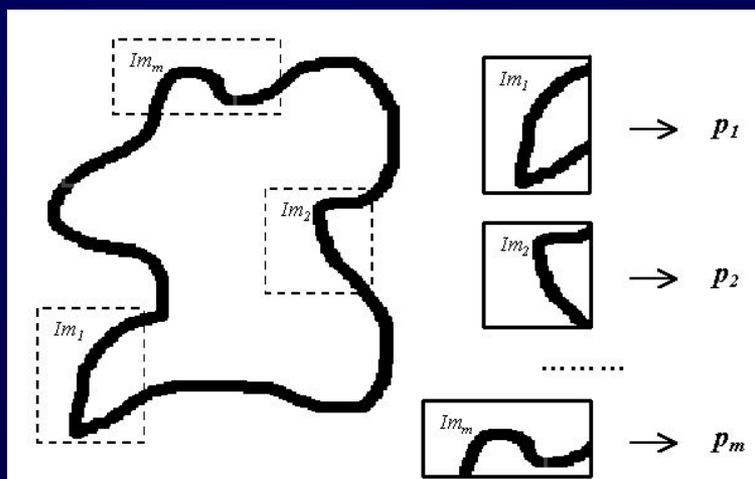
Морфологический коэффициент корреляции изображения с моделью:

$$K_M(A(\mathbf{p}), M) = \min(\|\text{Pr}(A(\mathbf{p}), M)\|, \|A(\mathbf{p})\|) / \max(\|\text{Pr}(A(\mathbf{p}), M)\|, \|A(\mathbf{p})\|)$$

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Метод генетического отбора структурных моделей

Принцип конструирования процедуры идентификации



Множество процедур обнаружения:

$$P = \{ p^k \mid p^k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_{m_k}^k) \},$$

где p_j^k - процедура обнаружения фрагмента, реализующая один из заданных базовых алгоритмов ($j=1, 2, \dots, m_k; k=1, 2, 3 \dots$).

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Метод генетического отбора структурных моделей

Задача условной оптимизации:

$$P_{opt} = \arg(\min T(p^k))$$
$$\begin{aligned} & \text{prec}(p^k, S_i) > a, \\ & i=1, 2, \dots, n \\ & \forall p^k \in P \end{aligned}$$

где: $T(p^k)$ - время работы процедуры на изображениях из обучающей выборки;

$\text{prec}(p^k, S_i)$ - функция вычисления точности обнаружения объекта на изображении из обучающей выборки. При этом:

$P_{opt} \in P^l$ P^l - множество процедур длины не больше l ,

$$P^l = \{p^k \mid p^k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_{m_k}^k), m_k \leq l\}$$

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Метод генетического отбора структурных моделей

Схема применения генетического алгоритма:

1. *Ген* = одна из элементарных процедур.
2. *Хромосома* = последовательность генов ограниченной длины.
3. *Функция качества* хромосомы:
$$F(p) = \sum_{i=1}^n f(p, S_i)$$
$$f(p, S_i) = t(p, S_i) + A * \text{pen}(p, S_i)$$
где p - процедура обнаружения заданного объекта; S_i - изображение из обучающей выборки; t - время работы процедуры p на изображении S_i ; A - настроечный коэффициент; $\text{pen}(p, S_i)$ штрафная функция.
4. *Операция скрещивания* – перегруппировка и обмен составных частей существующих решений (цепочек процедур обнаружения).
5. *Операция мутации* позволяет изменить параметры (x_j, y_j, w_j, h_j) для выбранной элементарной процедуры.
6. *Генетический отбор* осуществляется путем итеративного «размножения», тестирования и селекции в каждом поколении хромосом с наилучшим значением функции качества. При этом на каждом этапе случайным образом осуществляются мутации параметров и скрещивание моделей.

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Метод генетического отбора структурных моделей

Схема применения генетического алгоритма для формирования морфологических детекторов:

1. *Ген* = один из возможных структурных примитивов, характеризуемый набором $\{M_k(\mathbf{u}, \mathbf{q}_k), t_k, \mathbf{q}_k\}$.
2. *Хромосома* = последовательность генов = морфо-геометрическая модель объекта $M(\mathbf{p}, \mathbf{u})$.
3. *Функция качества* хромосомы - аналогично.
4. *Операция скрещивания* – аналогично.
5. *Операция мутации* позволяет изменить параметры локализации $\{M_k(\mathbf{u}, \mathbf{q}_k), \mathbf{q}_k\}$ для выбранного элемента модели.
6. *Генетический отбор* - аналогично.

Автоматизированное конструирование алгоритмов обнаружения объектов

Метод генетического отбора структурных моделей

Интерпретация результата:

1. *Процедурная интерпретация* = Близкая к оптимальной процедура обнаружения заданного объекта.
2. *Модельная интерпретация* = Набор элементов структурной модели объекта, на основе которой искомый объект может быть обнаружен и/или идентифицирован на изображениях из обучающей выборки.

**РАЗНООБРАЗИЕ
МОРФОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Какие бывают морфологии:

- Проективные / непроективные
- Модульные / унитарные
- Алгебраические / критериальные
- Монотонные / ортогональные
- Вложения / заполнения
- Аппроксимирующие / интерполирующие
- Дискретные / непрерывные
- На базе однородных / неоднородных структур
- На базе независимого проецирования
- На базе независимого голосования
- На базе логического программирования
- На базе динамического программирования
- На базе линейного программирования...

Типы описаний, используемых в анализе изображений

<i>Изображение как...</i>	
<i>...функция</i>	$\Omega = \{f(x) = f(x_1, \dots, x_n): X(f) \subseteq R^n \rightarrow Z(f) \subseteq R^m\}$
<i>...совокупность точек</i>	$B(p): X(f) \times Z(f) \rightarrow \{0, 1\}, p = \langle x, z \rangle, x \in X, z \in Z.$
<i>...топологический объект</i>	$X \times Z$ - топологическое пространство (окрестности, соседство).
<i>...геометрический объект</i>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>геометрические преобразования</i> изображений, свойства этих преобразований; - <i>параметрическое описание</i> множеств точек в координатном пространстве; - <i>геометрическая логика</i> (планиметрия, стереометрия, геометрический вывод); - <i>способы построения и отыскания фигур.</i>
<i>...совокупность признаков</i>	$f(A) = \langle f_1(A), \dots, f_n(A) \rangle \in \Psi^n$
<i>...структура</i>	$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$
<i>...алгебраический конструктор (алгебра изображений)</i>	$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

Типы описаний. Систематическая таблица морфологий

<i>Изображение как...</i>	
<i>...разложение в системе ортогональных функций</i>	$f(x,y)=\sum(a_i \times f_i(x,y))$
<i>...разбиение кадра (морфология Пытьева)</i>	$f(x,y)=\sum(a_i \times \chi_i(x,y))$
<i>...объединение элементов (ММ Серра)</i>	$O(A,B)=\bigcup_{\langle x,y \rangle} \{B(x,y) : B(x,y) \subseteq A\}$
<i>...реляционный гиперграф</i>	<p><i>Гиперграф</i> $h=\{V,G^R\}$,</p> <ul style="list-style-type: none"> - вершины из V - элементы образа; - <i>гиперребра</i> g^R соединяют подмножества элементов, если они связаны отношением g^R.
<i>...грамматическая конструкция (структурно-лингвистический подход)</i>	<p><i>Алфавит:</i> $X=\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \Omega$. <i>Подстановки</i> $A \rightarrow B: A, B \in M(X)$</p> <p><i>Правила вывода:</i> $R(A \rightarrow B)$. <i>Множество постулатов.</i> $\Theta \in M(X)$</p> <p><i>Грамматика</i> $\Gamma=\{X, R, \Theta\}$. <i>Выводимость</i> Y в $\Gamma: Y \leftarrow \Gamma$.</p>
<i>...двумерная проекция трехмерной сцены</i>	<p><i>Стерео наблюдение</i> $A(x,y)=\delta(L(x,y,z))$,</p> <p><i>Трехмерная реконструкция</i> $L(x,y,z)=\varepsilon(A(x,y))$.</p> <p><i>Морфологическая сегментация = трехмерная реконструкция.</i></p>

$$\Phi(A, \lambda) = K(e(A), \delta(\lambda)) \times M(\lambda) \rightarrow \max(\lambda \in \Lambda).$$

Выбор $\mathfrak{Z}(\mathfrak{R}) = \{\vartheta, \Lambda, \delta, K, M\}$ определяет конкретную морфологическую систему. Возникает нечто вроде систематической таблицы методов анализа изображений. Часть клеток заполнена, часть – еще нет.

Вывод: на наш век морфологий хватит:)

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

Морфологическое сравнение бинарных изображений
на базе их скелетных представлений

Основная идея: для бинарных морфологий аналогом Пытьевских «форм» как *постоянного разбиения кадра с переменными значениями яркости* являются морфологические «скелеты» как *постоянные множества центров опорных структурирующих элементов с переменными значениями радиуса* (масштаба) этих элементов.

Морфологическое сравнение бинарных изображений на базе их скелетных представлений

Пусть дан образ B и требуется сравнить его форму с формой образа A .

Морфологическая проекция бинарного образа B на форму образа A :

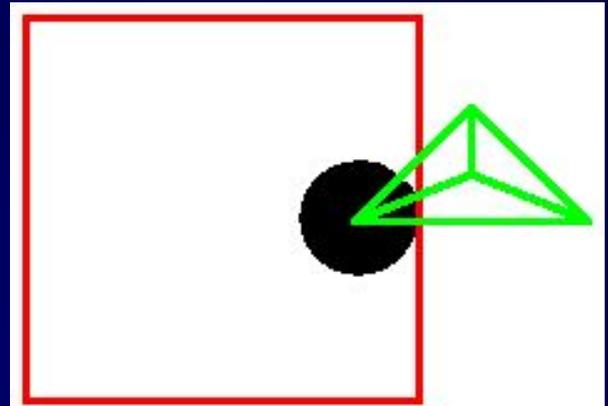
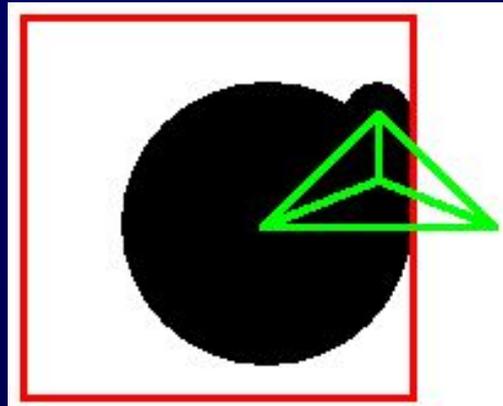
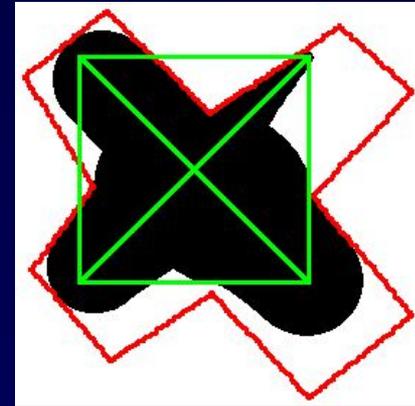
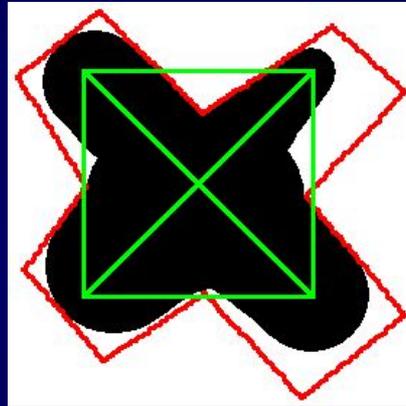
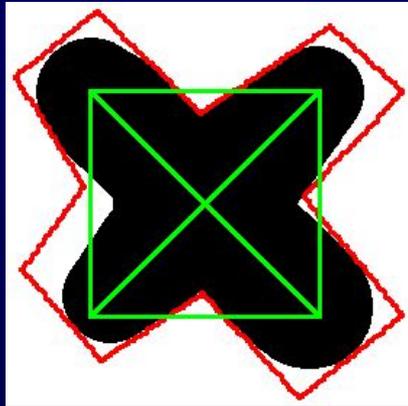
$$\text{Pr}(B, A) = \bigcup_{p \in S(A)} \{ G(p, r_B(p)) \}.$$

Нормированный *морфологический коэффициент корреляции* (МКК) Пытьева:

$$K_M(B, A) = \| \text{Pr}(B, A) \| / \| B \|.$$

МКК оценивает степень сходства формы фигуры B с формой фигуры A .

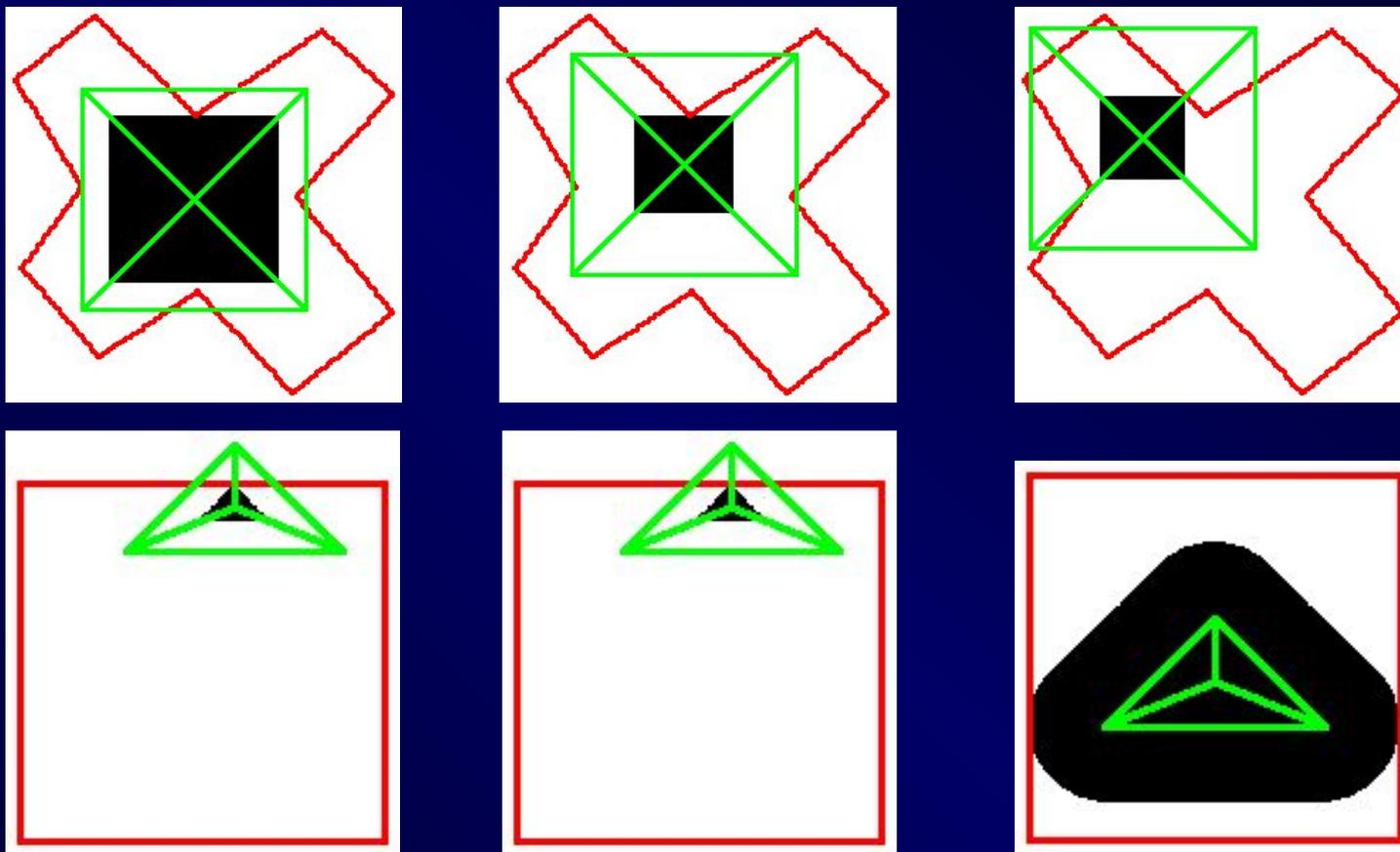
Морфологическое сравнение бинарных изображений на базе их скелетных представлений



Примеры проекции фигуры на форму

$$\text{Pr}(B, A) = \bigcup_{p \in S(A)} \{ G(p, r_B(p)) \}$$

Морфологическое сравнение бинарных изображений на базе их скелетных представлений

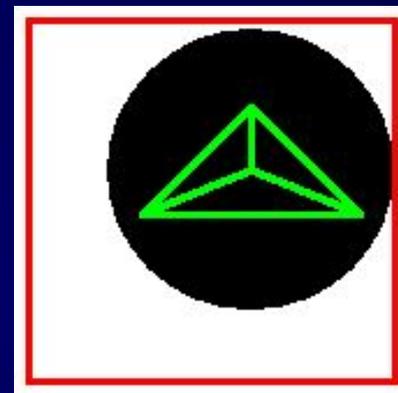
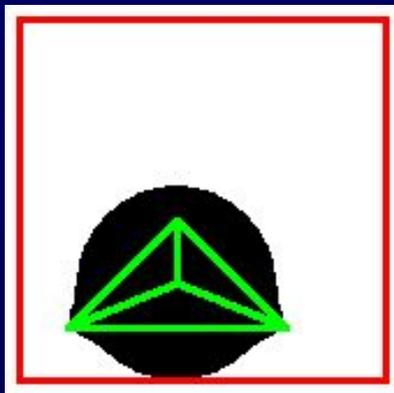
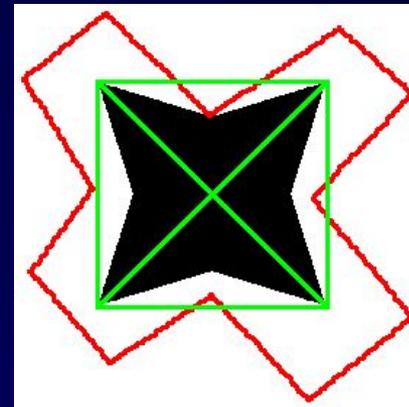
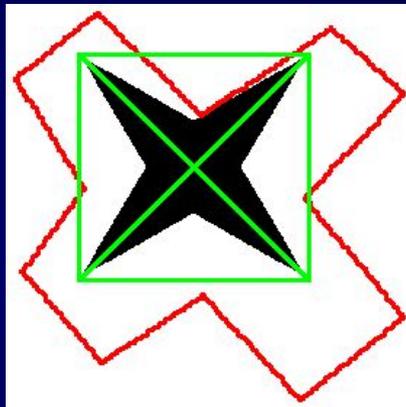
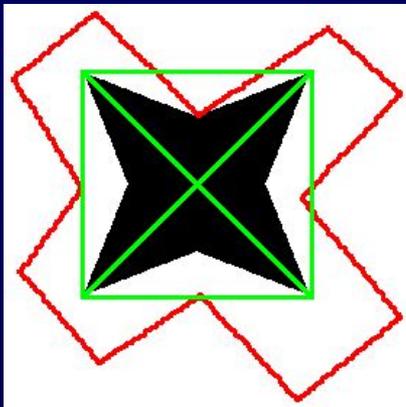


Проекция на класс форм «расширение/сжатие»

$$\text{Pr}(B, M(A, b)) = A \oplus b_B,$$

$$b_B = \arg \max_{b \in R} \{ \|A \oplus b\| : (A \oplus b) \subseteq B \}.$$

Морфологическое сравнение бинарных изображений
на базе их скелетных представлений

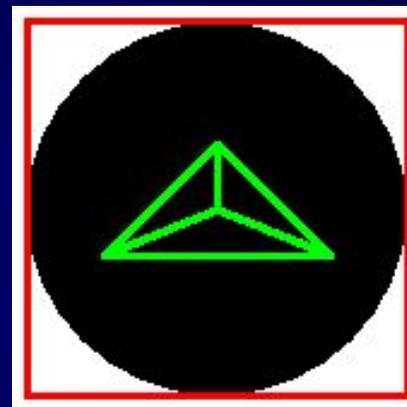
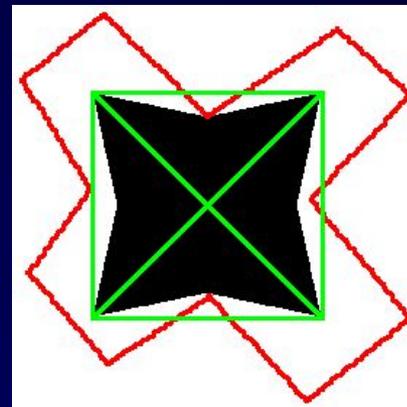
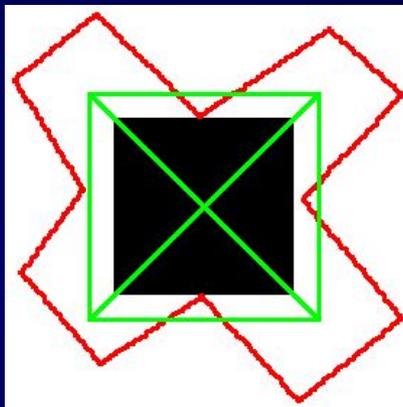
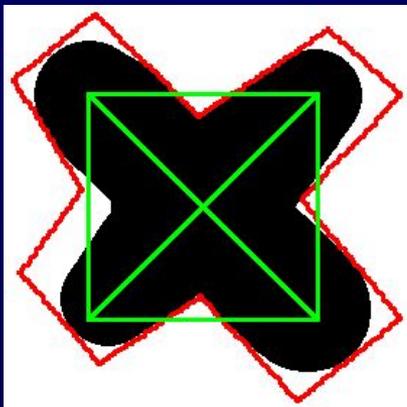


Проекция на класс форм «утончение/утолщение»

$$\text{Pr}(B, M(A, a)) = A \otimes a_B,$$

$$a_B = \arg \max_{a \in R} \{ \|A \otimes a\| : (A \otimes a) \subseteq B \}.$$

Морфологическое сравнение бинарных изображений на базе их скелетных представлений



Инвариантные проекции на разные классы форм

Максимальный по норме вписанный образ в заданном модельном классе:

$$PR(B, M(A, \Sigma)) = \operatorname{argmax}_{p \in P} \|Pr(B, M(A(p), \Sigma))\|$$

Спасибо за внимание!

Основные идеи

- Проективность
- Модульность
- Алгебры изображений
- Пространства разложений
- Критерии проецирования
- Морфологическая сложность моделей и образов

Основные инструменты

Фильтрация: - Морфологические фильтры

Обнаружение: - Морфологическая корреляция

- Морфологическая нормализация фона

- Морфологический анализ свидетельств

Сегментация и распознавание: - Морфологические разложения

- Морфологические спектры

- Морфологические скелеты