ФГУП ГосНИИ
Авиационных систем

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
и
АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Визильтер Юрий Валентинович

viz@gosniias.ru

Что такое морфология?

НАУКА

СПОСОБЫ - эвристики, эксперименты

МЕТОДЫ - математические модели
- формализованные критерии
- решения, обладающие доказанными свойствами
- оптимальность

МАШИННОЕ ЗРЕНИЕ - весь комплекс проблем, связанных с получением пространственой инфорамции, включая сенсоры, вычислители и алгоритмы

КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ - математические и алгоритмические аспекты машинного зрения

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЗРЕНИЕ

ФОТОГРАММЕТРИЯ
(геометрия простр.распред. данных)

МОРФОЛОГИЯ
(модели данных и процедур)

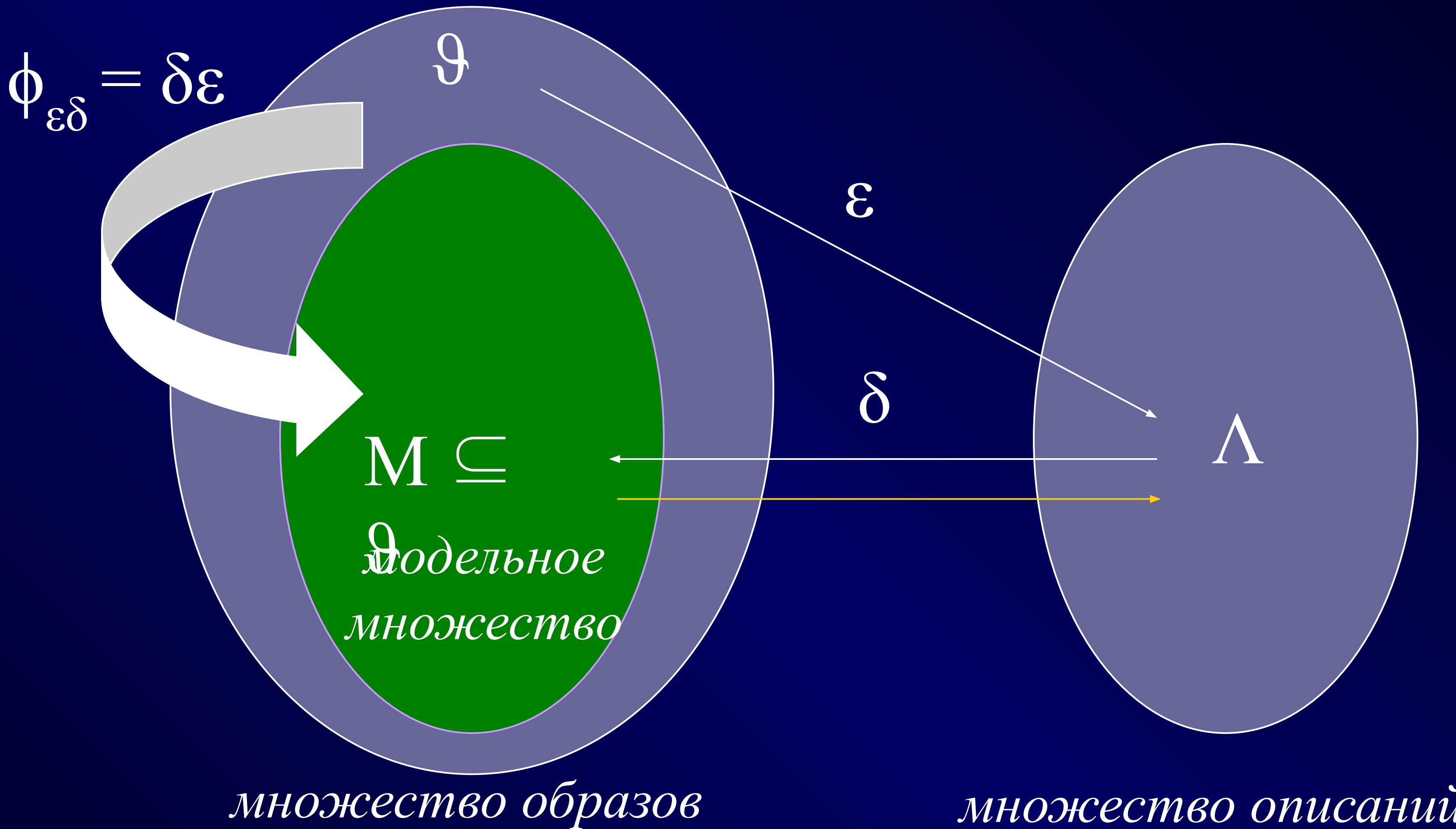
Что такое морфология?

Термин: **Морфология** – (1) «наука о форме»;
(2) методы анализа изображений, основанные на содержательных яркостно-геометрических моделях и критериях.
Источники: **Морфология Серра, Морфология Пытьева.**

Обобщение 1: ***Морфологический анализ*** – схема анализа данных, которая в качестве обязательного этапа предполагает **обоснованное** (в некотором смысле оптимальное) построение **модельного описания** гипотетического (скрытого) **прообраза** наблюдаемых **данных** (*сегментация + реконструкция*).

Обобщение 2: "**Морфология**" или "**морфологическая система**"- это такой формализм анализа данных (изображений), в котором любые образы (изображения) рассматриваются как элементы некоторого пространства (алгебры), любые задачи формулируются в терминах этого пространства, и операции осуществляются над элементами этого пространства (целыми изображениями), а не над отдельными пикселями.

Формальная морфология



*Морфологическая **сегментация*** $\varepsilon: \ \vartheta \rightarrow \Lambda$

*Морфологическая **реконструкция*** $\delta: \Lambda \rightarrow \vartheta$

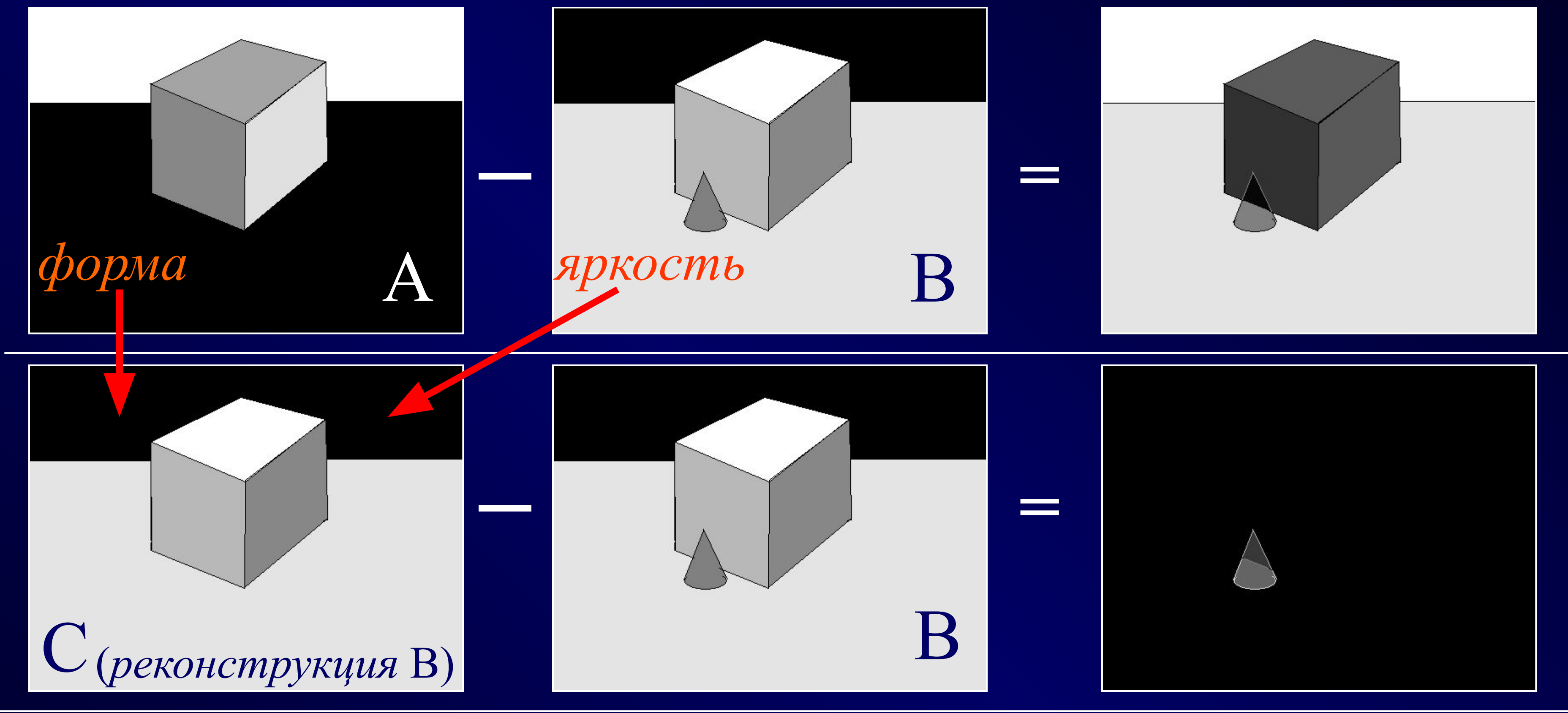
*Морфологический **фильтр*** $\phi_{\varepsilon\delta}(E)=\delta(\varepsilon(E)): \vartheta\rightarrow\Lambda\rightarrow\vartheta$

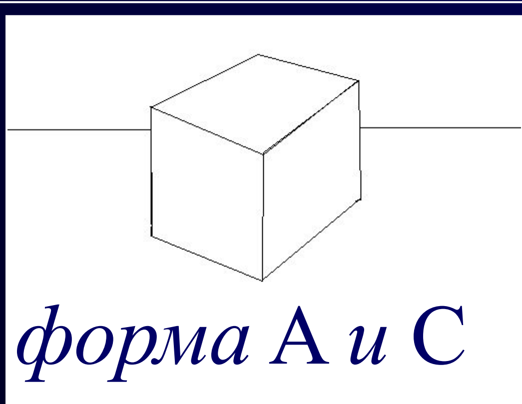
Сегментация + Реконструкция

	множество образов	*множество описаний*
Искусственный ***изоморфизм***	$568=5\times 10^2+6\times 10^1+8\times 1^0$ $40=1\times 2^5+1\times 2^3$ *Позиционные системы счисления*	$<5,6,8>$ $<1,0,1,0,0>$
Естественный ***изоморфизм***	$28=2^2\times 7^1$ *Разложение на простые множители*	$<2,0,0,1,0,\ldots>$
Естественный ***гомоморфизм***	$f(x)$ $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ *Аппроксимация полиномами*	$<a_4, a_3, a_2, a_1, a_0>$

Пример 1. Морфологический анализ Пытьева

Сравнение по форме, выделение отличий



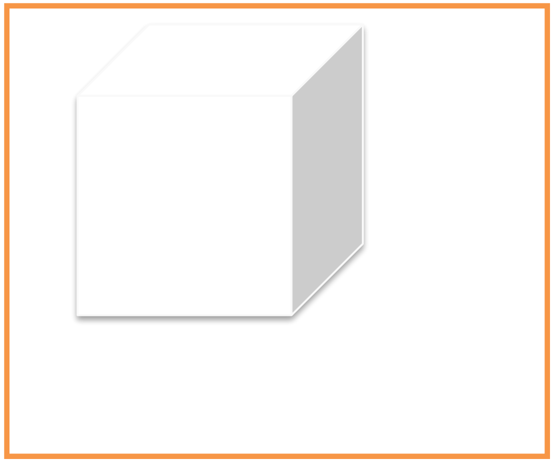


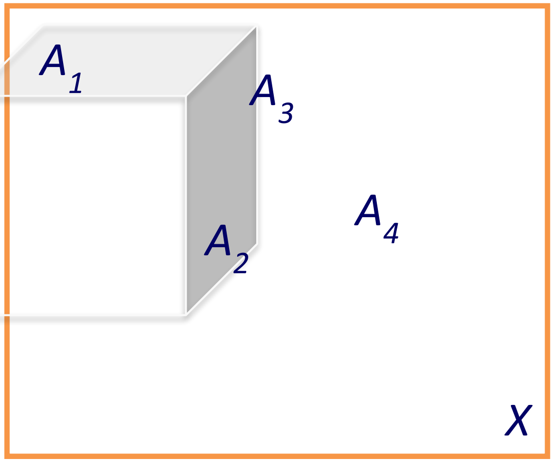
Алгоритм сравнения изображений по форме:

- Выделить связные области на изображении A.
- Вычислить среднюю яркость по областям A на B.
- Сформировать C *по форме* A *с яркостями* из B.
- Найти разность C и B.

Морфологический анализ Пытьева

Модель изображения - кусочно-постоянная функция





Индикаторная функция множества A_i

$$\boxed{\chi_i(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in A_i\\0,(x,y)\notin A_i\end{cases}}\quad(1)$$

Значение яркости(интенсивности) пикселя с координатами (x, y) (функция изображения)

$$f(x,y)=\begin{cases}c_1,(x,y)\in A_1\\c_2,(x,y)\in A_2\\c_3,(x,y)\in A_3\\c_4,(x,y)\in A_4\end{cases}\quad(2)$$

$c_1,\dots,c_4$ – яркости областе
$A_1,\dots,A_4$ фона
и граней куба

X – поле зрения

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{i=1}^{4}c_i\,\chi_i(x,y),}\quad(x,y)\in X\quad(3)$$

Морфологический анализ Пытьева

Проекция изображения на форму

Изображение , определенное на поле *X*

$$g(x,y),\ (x,y)\in X$$

Форма изображения *V(f)* в виде множества

$$V(f)=\left\{\begin{array}{l}\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{N}c_i\,\chi_{A_i}(x,y)\\ (x,y)\in X,\quad -\infty<c_i<\infty,\quad i=1,\ \dots\ ,N\end{array}\right\}$$

Проекция вектора *g* на плоскость *V(f)*

$$P_f g\in V(f)\Rightarrow P_f g=\sum_{i=1}^{N}c_i^{*}\chi_{A_i}$$

Определение коэффициентов

$$\rho_2(g,V(f))=\min\left\{\rho_2^2\Bigl(g,\sum_{i=1}^{N}c_i\,\chi_{A_i}(x,y)\Bigr)\,\Big|\,c_i,-\infty<c_i<+\infty,i=1,\ \dots\ ,N\right\}$$

c_i^*

Дифференцируя $\rho_2^2\Bigl(g,\sum_{i=1}^{N}c_i\,\chi_{A_i}(x,y)\Bigr)$ по c_i, получим решение задачи в виде

$$c_i^{*}=\frac{\int_X \chi_{A_i}(x,y)\ g(x,y)\ dx\ dy}{\int_X \chi_{A_i}(x,y)\ dx\ dy}=\frac{(\chi_{A_i},g)}{\|\chi_{A_i}\|^2}\chi$$

$$(20)\quad P_f g=\sum_{i=1}^{N}\frac{(\chi_{A_i},g)}{\|\chi_{A_i}\|^2}\chi_{A_i}(x,y)$$

(χ_{A_i},g) - интеграл яркостей по области A_i

$\|\chi_{A_i}\|^2$ - площадь области A_i

Морфологический анализ Пытьева

Описание формы

Нормированный коэффициент корреляции

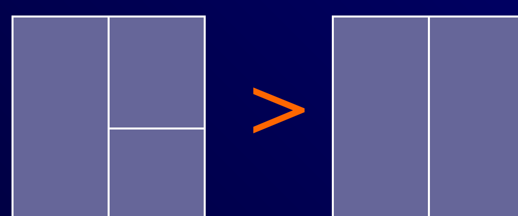
$$k_u = \frac{(f,\vartheta)}{\|f\|\|\vartheta\|}$$

Морфологический коэффициент корреляции:

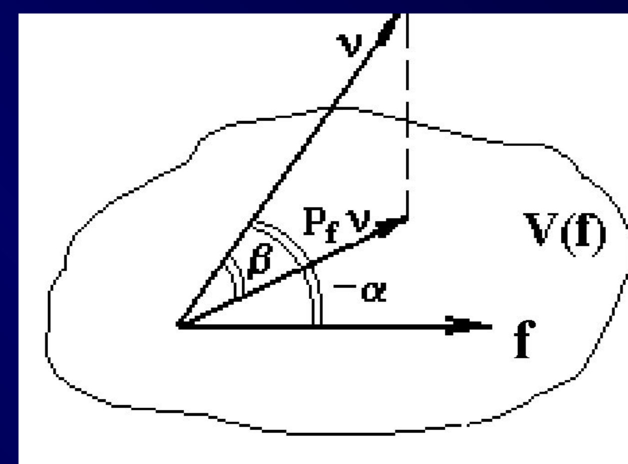
$$k_m = \frac{\|P_f\vartheta\|}{\|\vartheta\|}$$

1. $0 \le k_m \le 1$
2. K_m не зависит от преобразования яркости F(f(x,y)).

Сравнение форм:



Морфологический проектор



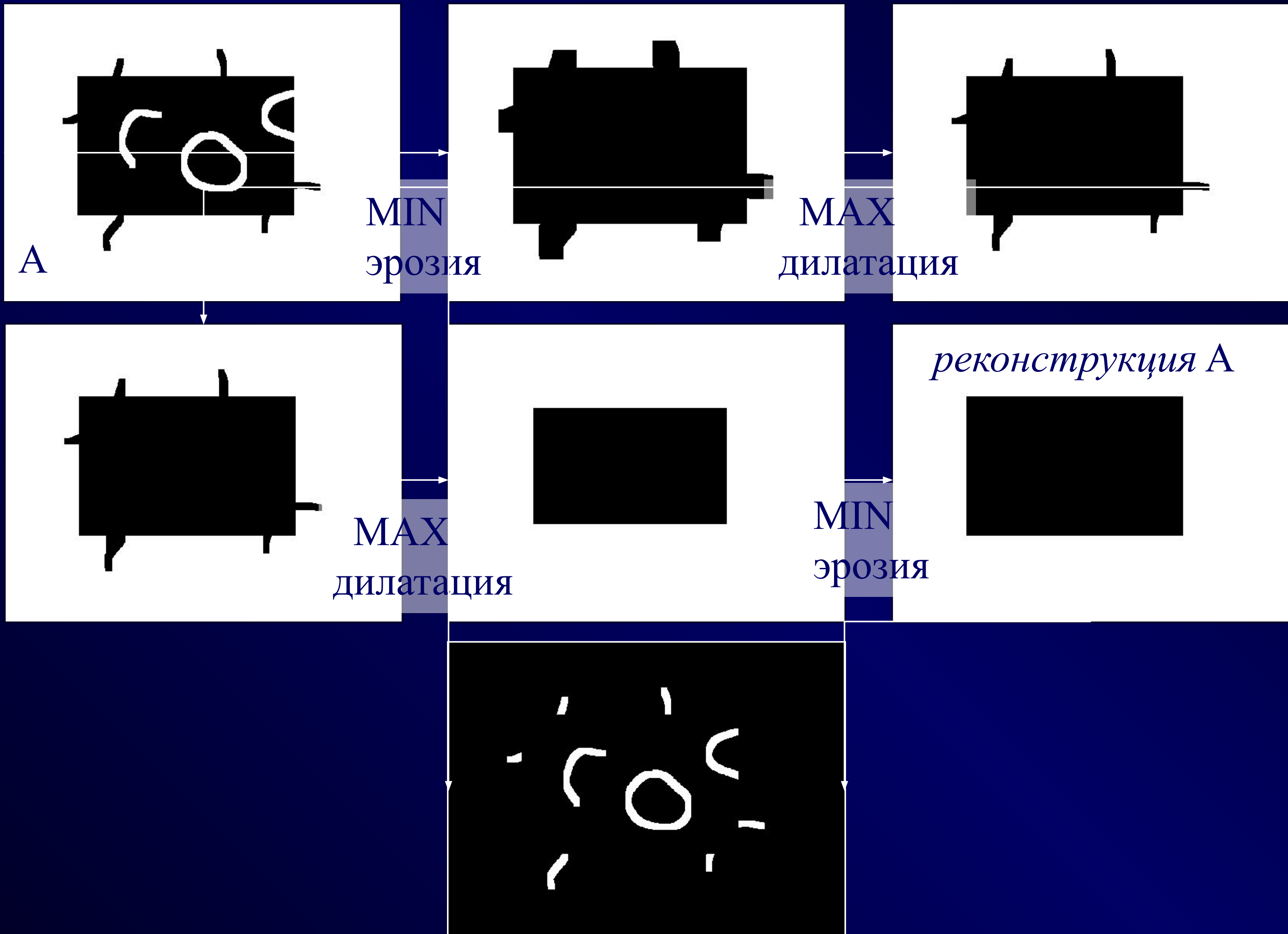
$\alpha = \arccos k_u$, $\beta = \arccos k_m$

Морфологический анализ Пытьева

Группа методов	**Морфологический анализ Ю.П.Пытьева**
Базовый математический формализм	Функциональный анализ, Топологии разбиений
Вид модели	$\mathbf{Pr(f(x,y),\{\chi_i(x,y)\}) = \sum_i f_i{*}\chi_i(x,y)}$ где $\{\chi_i(x,y)\}$ – набор характеристических функций {0,1}, описывающих разбиение изображения на области постоянного значения яркости; f_i – соответствующие средние значения яркости.
Образы	*Изображения как двумерные функции*
Описания	*Векторы коэффициентов разложения изображения по базису характеристических функций областей "формы"*

Пример 2. Математическая морфология Серра

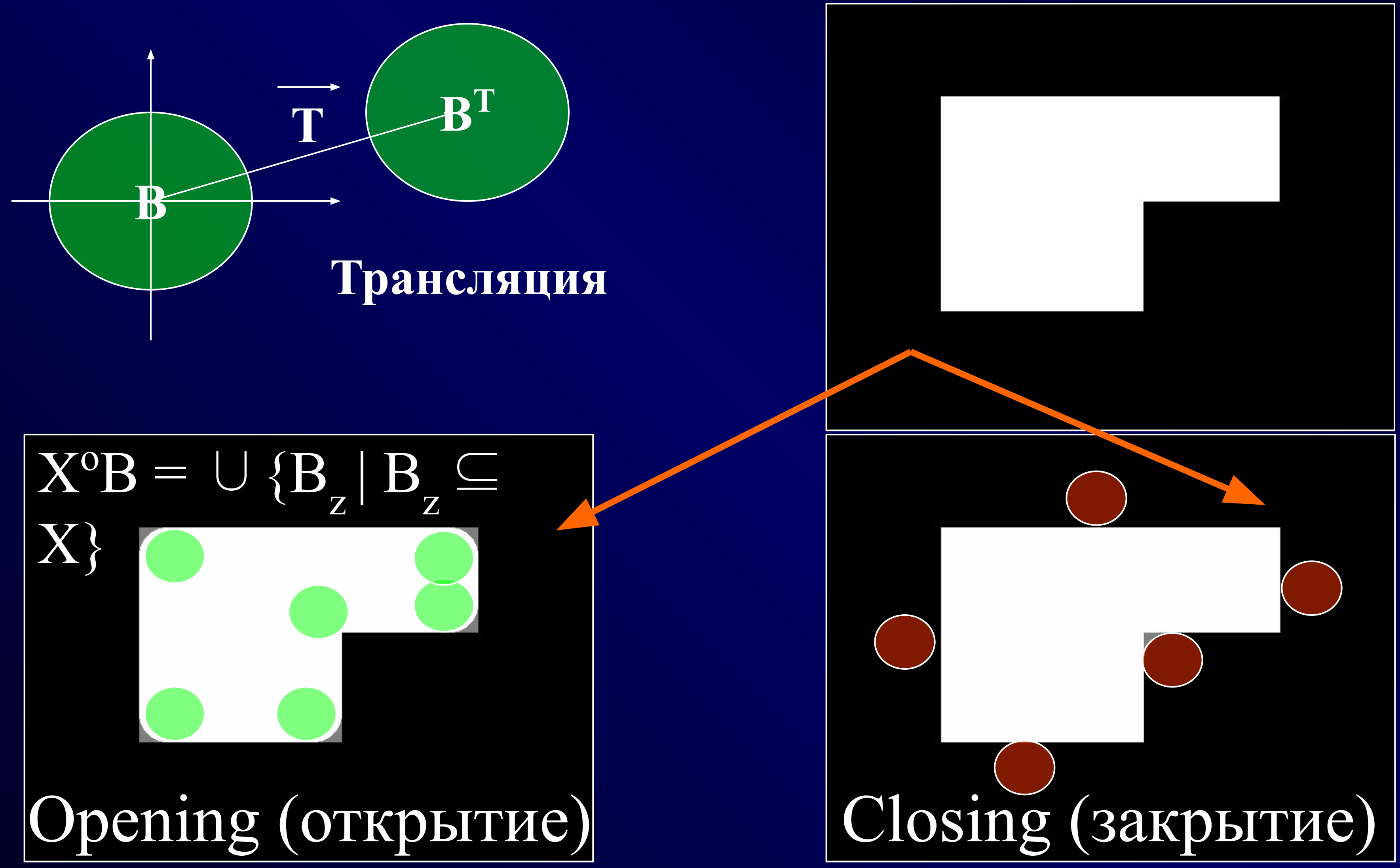
Обработка с учетом формы, выделение деталей



Математическая морфология Серра

Структурирующий элемент

Исходный образ



Математическая морфология Серра

Трансляция A по z:

A_z = {y| a∈A, y=a=z}.

Сложение Минковского (дилатация):

A⊕B = {a=b| a∈A, b∈B} =

= U{B_a} = U{A_b}

Вычитание Минковского (эрозия):

A□B = {z| B_z ⊆ A} = U{A_z}

Оператор, ***сохраняющий включение***:

X⊆Y ⇒ Ψ(X) ⊆ Ψ(Y)

Экстенсивный оператор: Ψ(X) ⊇X

Антиэкстенсивный оператор: Ψ(X)⊆X

Усиливающий оператор (Ψ(Ψ(X))⊇Ψ(X))

Ослабляющий оператор (Ψ(Ψ(X))⊆Ψ(X))

Открытие X по B:

X°B = (X□B)⊕B = U{B_z| B_z ⊆ X}.

Закрытие X по B:

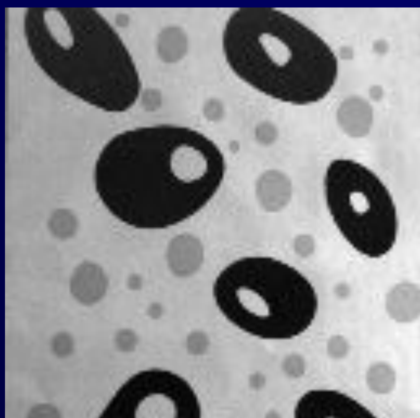
X·B = (X⊕B)□B

Проективный оператор (Ψ(Ψ(X))=Ψ(X))

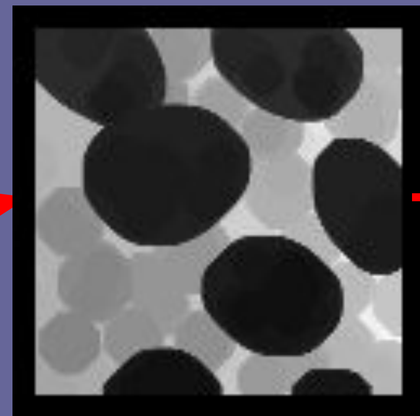
Морфологическими фильтрами Серра называется множество операторов, являющихся одновременно *проективными* и *сохраняющими включение.*

Математическая морфология Серра

ММ-фильтрация



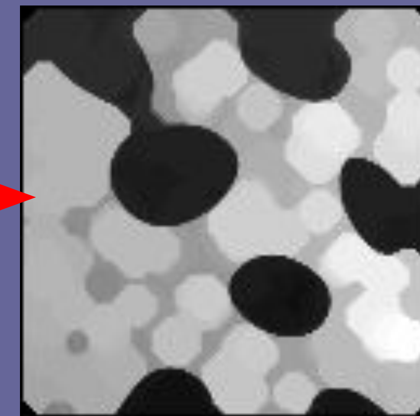
ММ-операторы:



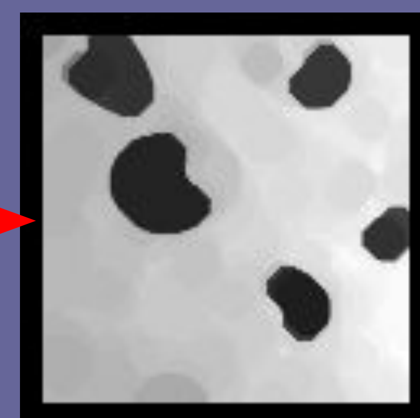
Эрозия (сжатие)

Дилатация (расширение)

ММ-проекторы:

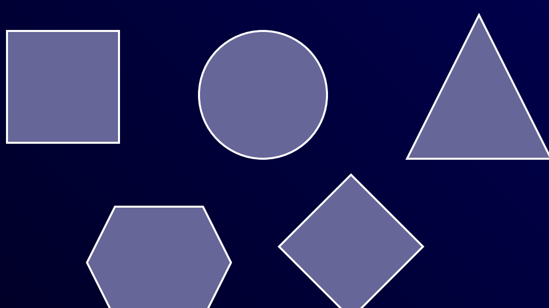


ММ-открытие

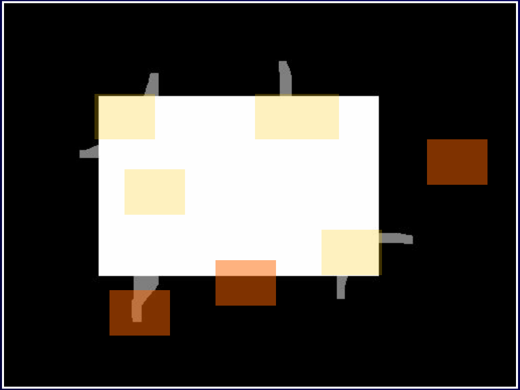


ММ-закрытие

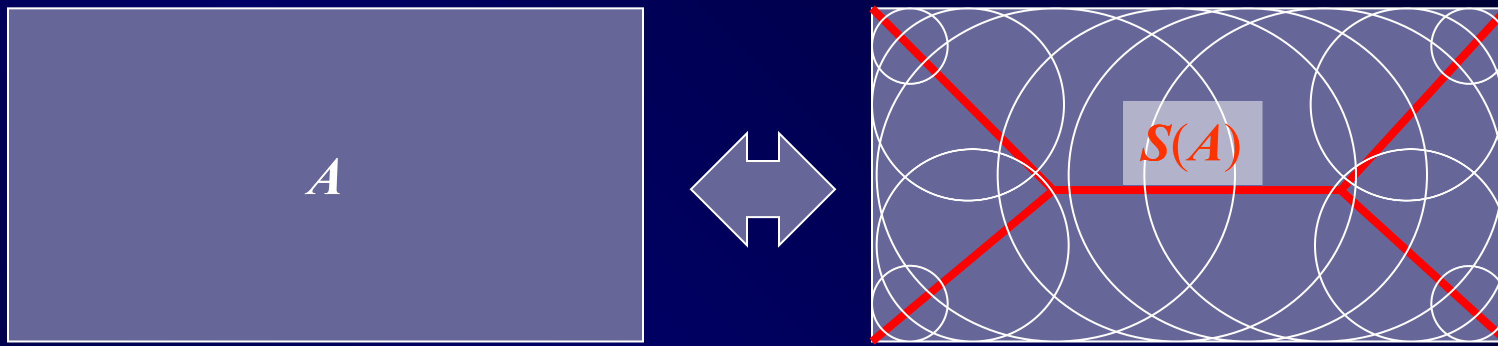
Учет формы путем выбора структурирующих элементов:



Математическая морфология Серра

Группа методов	**Математическая морфология Серра**
Базовый математический формализм	Теория множеств, теория решеток, топологии соседств и покрытий
Вид модели 	В теоретико-множественной форме: $\mathbf{A^{o}\{B_i\} = \cup_i \{B_i : B_i \subseteq A\}}$ где $\{B_i\}$ – система структурирующих элементов. В функциональной форме: $\mathbf{f(x,y)\circ\{g_i(x,y)\} = Max_i \{g_i(x,y) : g_i(x,y) \leq f(x,y)\}}$ где $\{g_i(x,y)\}$ – система структурирующих элементов.
Образы	*Фигуры как множества точек*
Описания	*Множества центров структурирующих элементов*

Пример 3. Бинарная морфология на базе скелетов



Ф*игурой* называется связная замкнутая область плоскости, ограниченная конечным числом непересекающихся жордановых кривых.

Пусть $\boldsymbol{P}$ – евклидова плоскость, $\mathbf{D}(\boldsymbol{p},r)$ – *открытый круг* радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{p}$.

Пустым или *вписанным кругом* фигуры $\boldsymbol{A}$ называется круг $\mathbf{D}(\boldsymbol{p},r)\subseteq \boldsymbol{A}$.

Максимальным пустым кругом называется пустой круг, который не содержится целиком ни в одном другом пустом круге данной фигуры.

Скелетом $\boldsymbol{S}(A)$ фигуры $\boldsymbol{A}$ называется множество центров всех ее максимальных пустых кругов.

Радиальной или *дистанционной функцией* $r_A(\boldsymbol{p})$ точки $\boldsymbol{p}\in \boldsymbol{P}$ для фигуры $\boldsymbol{A}$ называется максимальная величина радиуса пустого круга с центром в данной точке.

Бинарная морфология на базе скелетов

Группа методов	**Математическая морфология Серра**
Базовый математический формализм	Геометрия, теория графов
Вид модели	$$A = \cup_{p \in S(A)} \{ D(p, r_A(p)) \}$$ где $D(p,r)$ – *открытый круг* радиуса r с центром в точке p, $S(A)$ - *скелет* фигуры A; $r_A(p)$ - *дистанционная функция* точки p для фигуры A.
Образы	*Множества точек, ограниченные конечным множеством жордановых кривых*
Описания	*Скелеты + радиальные функции*

ПРОЕКТИВНОСТЬ

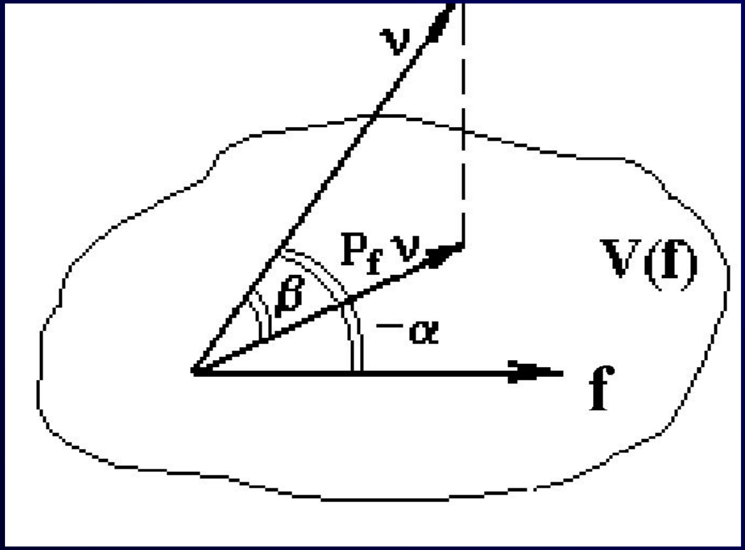
Проекторы как распознающие операторы (М. Павель)

Структурный ***фильтр**:* процедура преобразования образа к виду, соответствующему *заданному классу структур*.

Алгебраический проектор:

$$F(X)=F(F(X))$$

Геометрическая интерпретация:

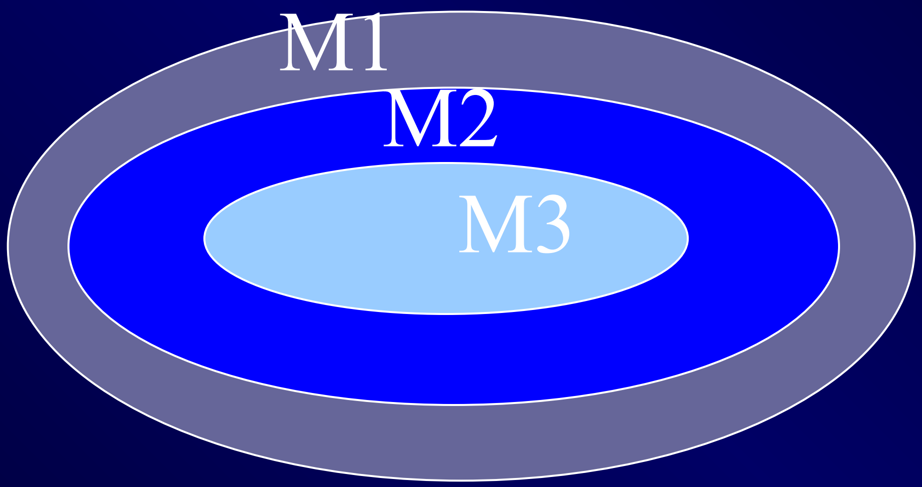


Два способа описания класса:

Проектор – оператор, ставящий в соответствие любому образу образ из модельного множества.

Модель (модельное множество) – множество стабильных элементов проектора.

Сравнение форм по сложности (Пытьев)



$$M3 \subseteq M2 \subseteq M1$$

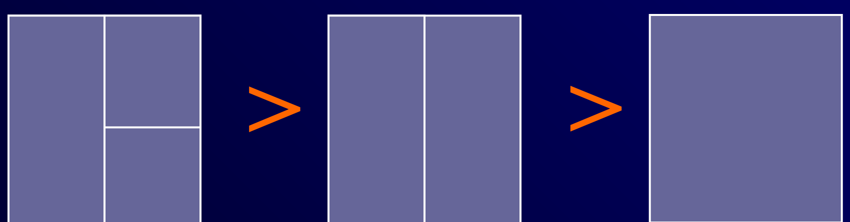
Морфологическая сложность:

Если одно модельное множество целиком принадлежит другому, то соответствующая форма изображения *не сложнее* (проще).

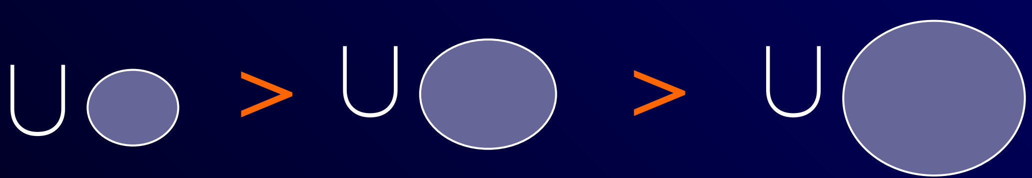
Структурная сложность:

Чем больше элементов в модели, тем сложнее описание.

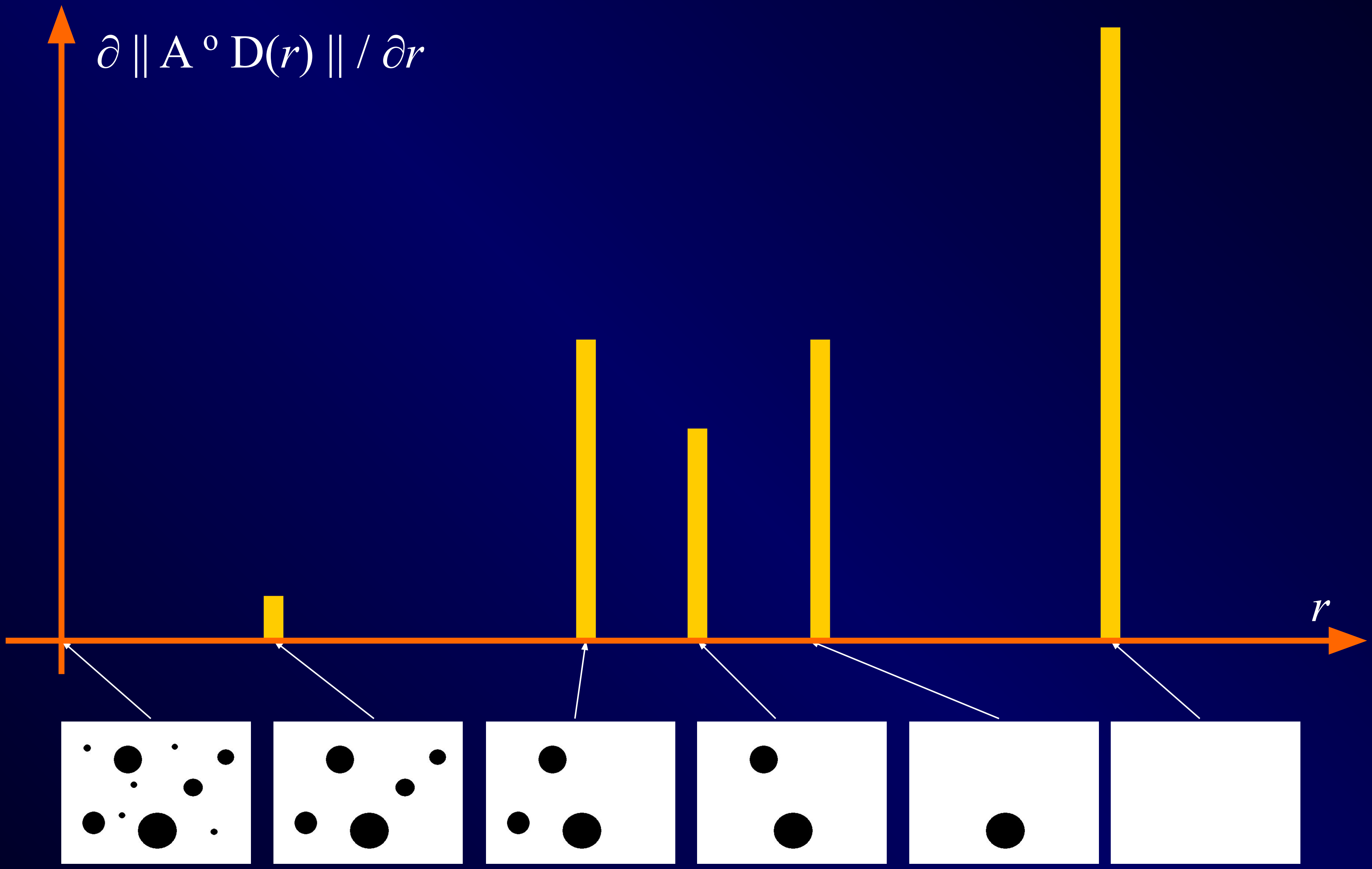
Морфология Пытьева



Морфология Серра

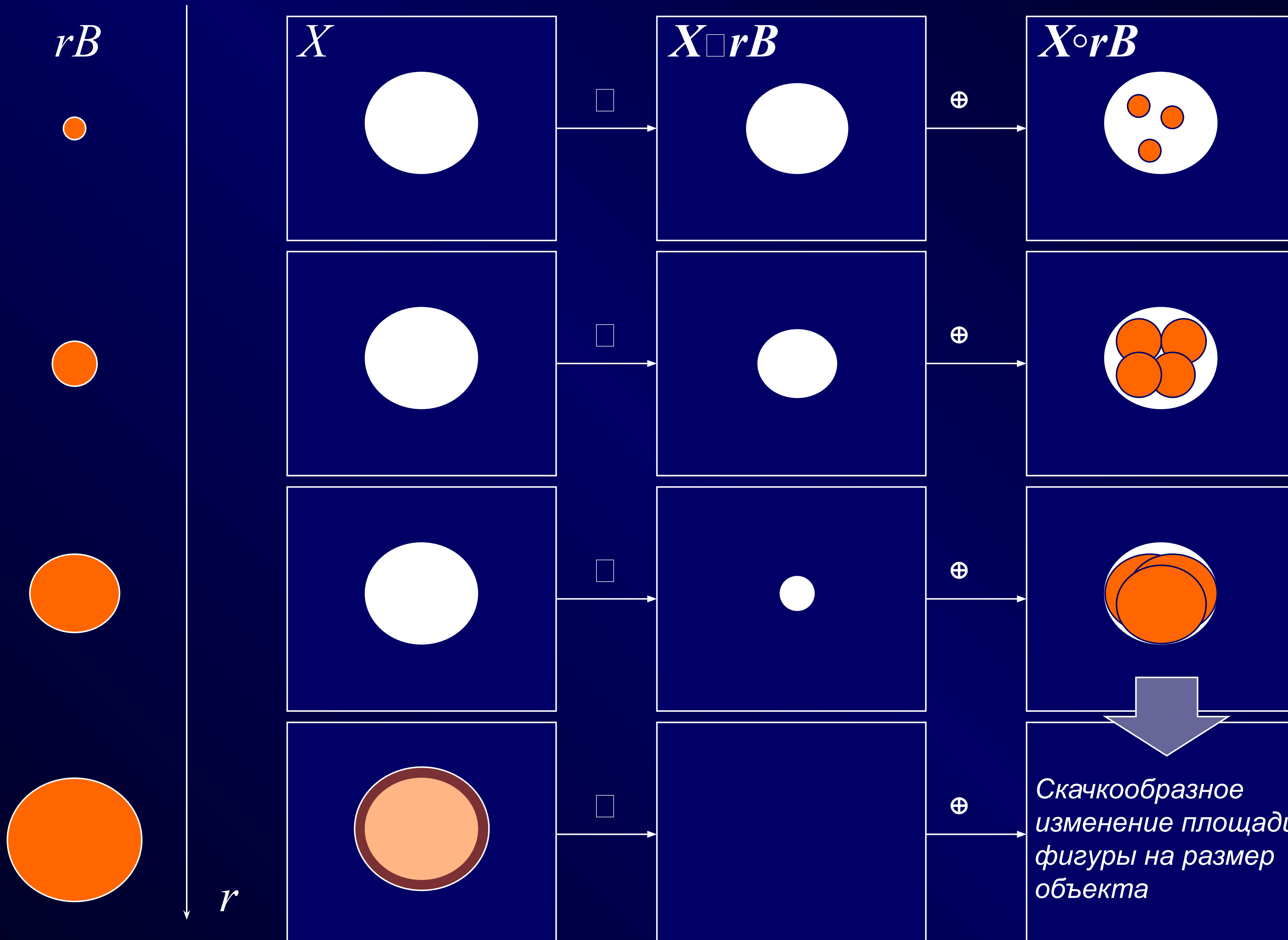


Морфологический спектр (Maragos)



монотонное убывание сложности

Вложенные классы форм и идея морфологического спектра

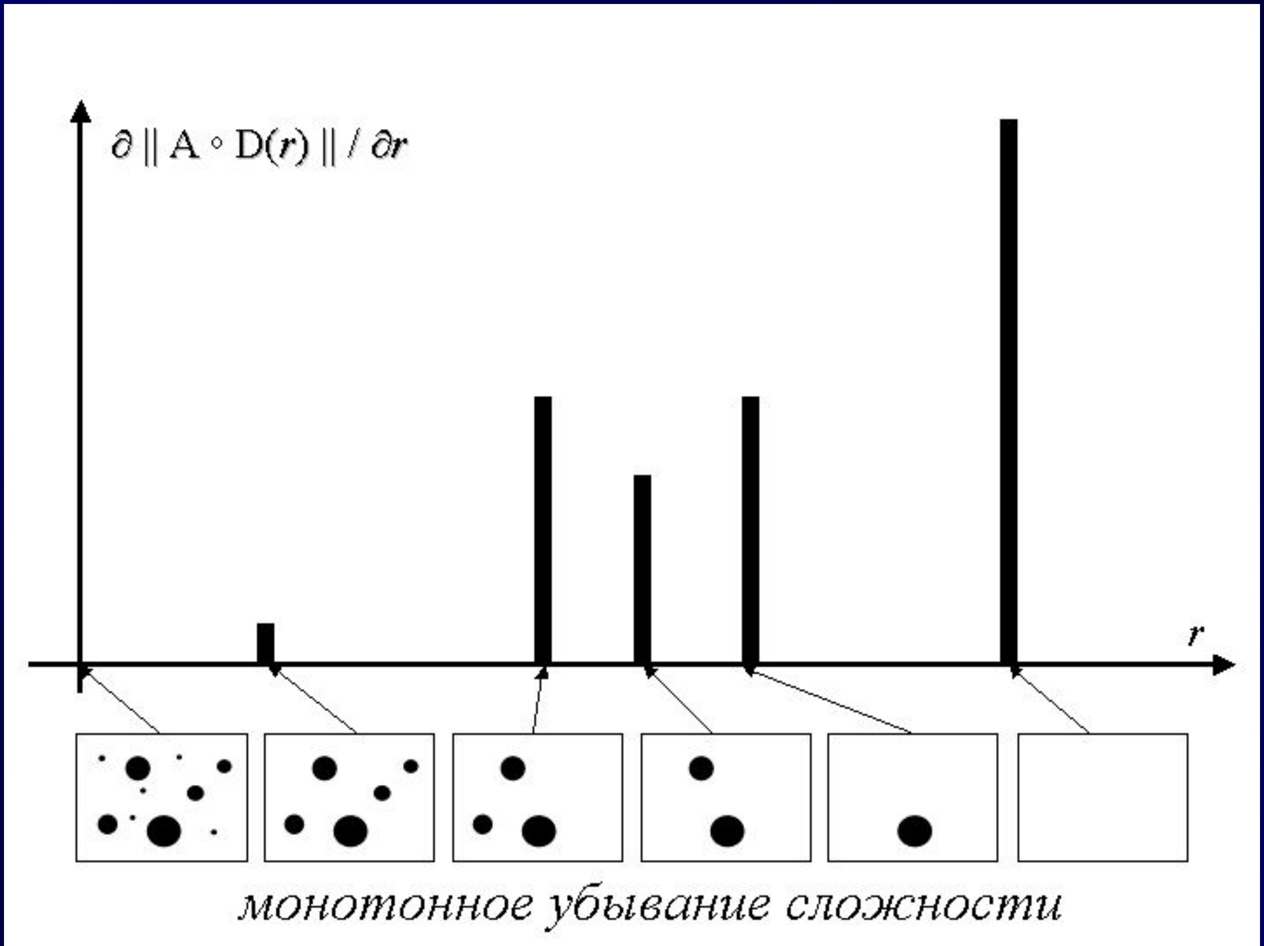


Формальное определение морфологического спектра

$$PS_X(r,B) = -\,\partial S(X \circ rB)/\partial r,\ r \geq 0, \qquad (1)$$

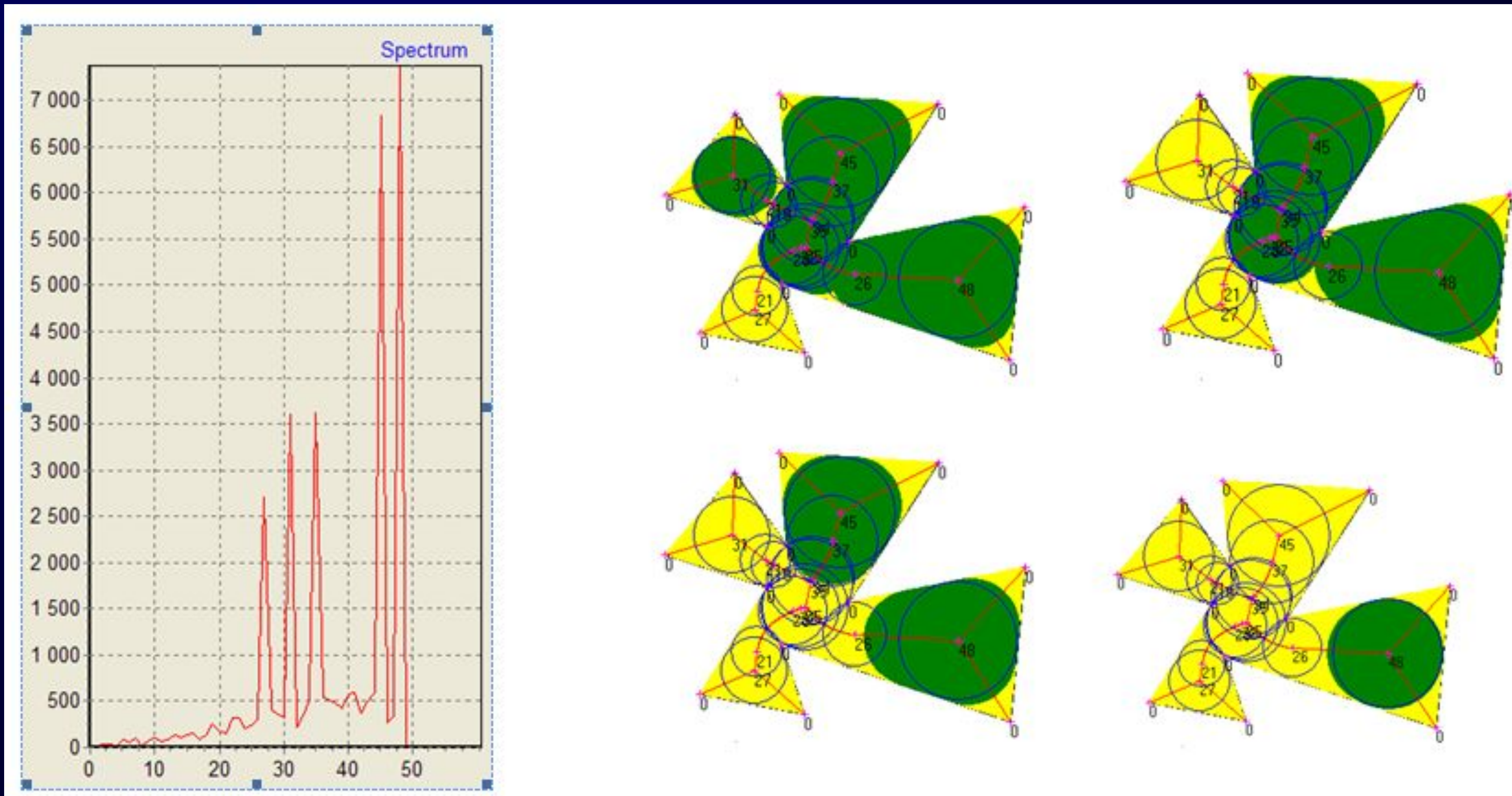
$$PS_X(-r,B) = \partial S(X \bullet rB)/\partial r,\ r > 0, \qquad (2)$$

где $S(X \circ B)$ – площадь открытия образа X элементом B

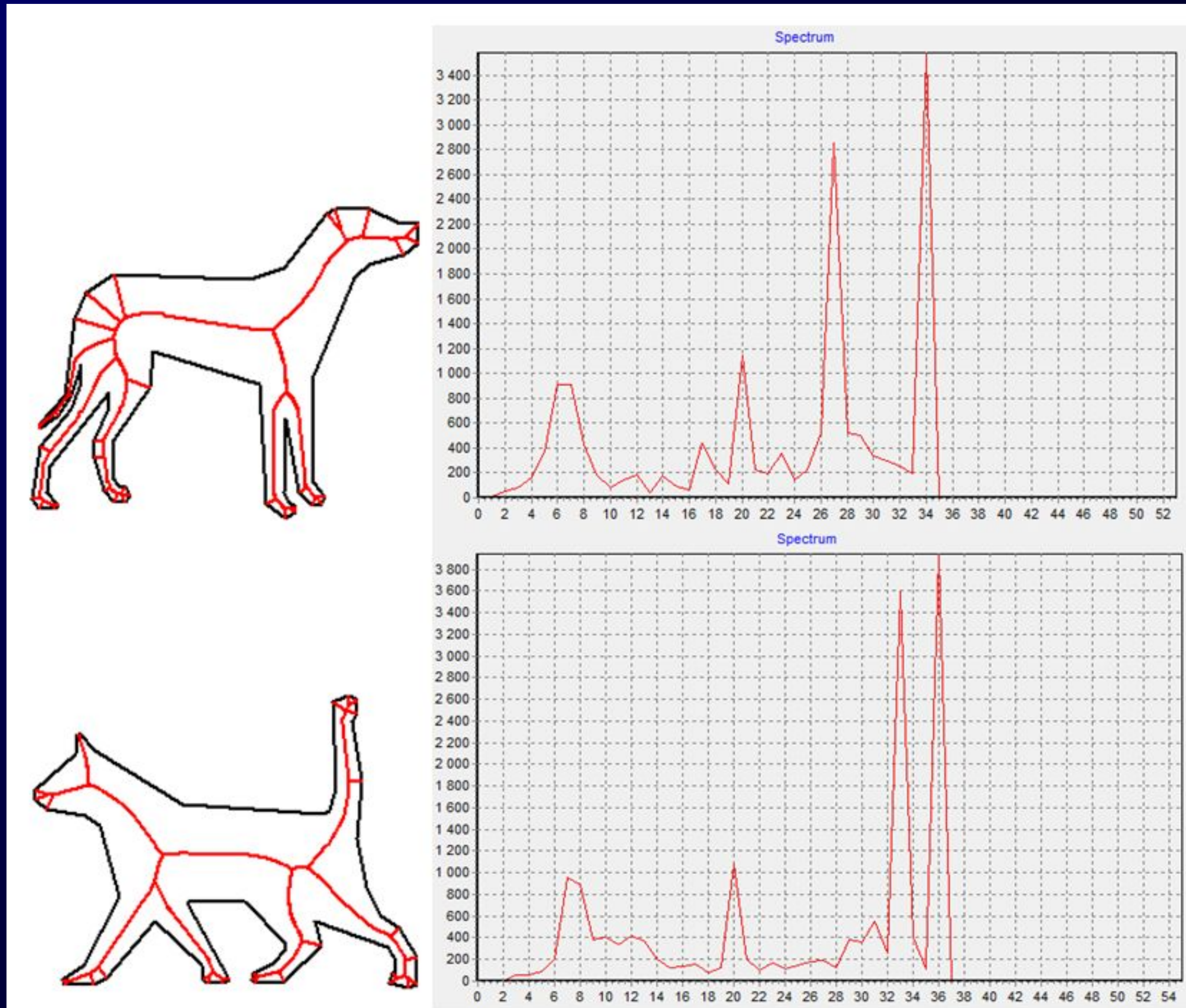


Maragos P. Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation. IEEE Trans.on pattern analysis, machine intelligence, Vol, II, No 7, July 1989.

Построение морфологического спектра в непрерывной бинарной морфологии



Дискретно-непрерывный морфологический спектр и пиковые составляющие формы фигуры (Визильтер, Сидякин, 2010)



Дискретно-непрерывный морфологический спектр силуэтов животных с реальных изображений (Визильтер, Сидякин, 2010)

МОДУЛЬНОСТЬ

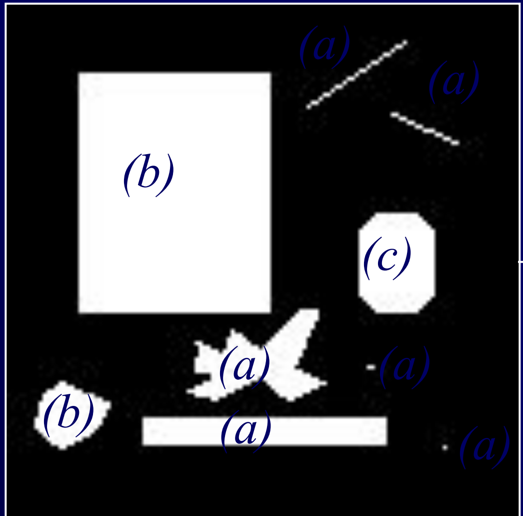
(комбинирование процедур)

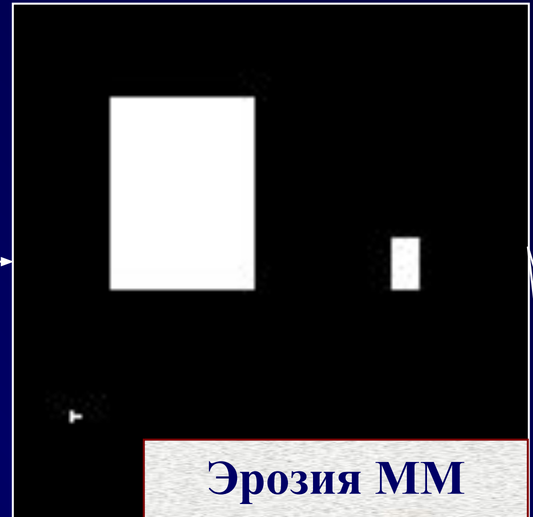
Альтернативные модульные морфологии

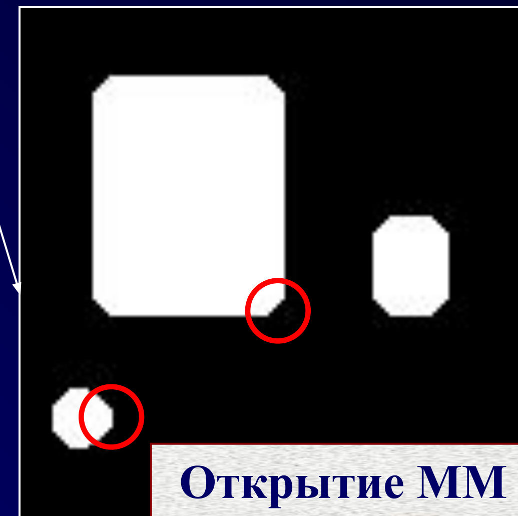
Идея: Построение различных модульных морфологических операторов путем комбинирования разных операторов сегментации с разными операторами реконструкции.

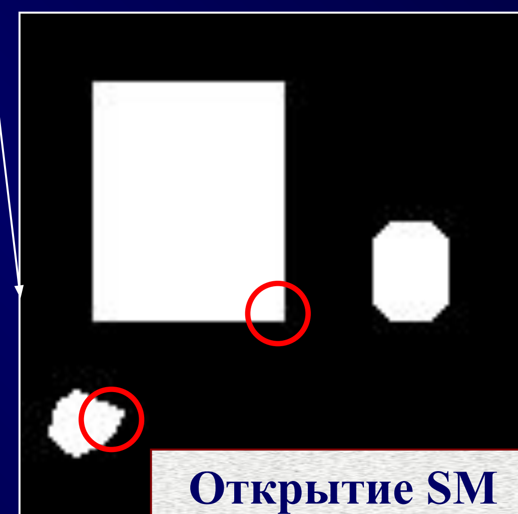
Пример: *селективные морфологии* на базе операторов ММ Серра

Селективные морфологии









Стандартная ММ

$$O(Object)=\begin{cases} \varnothing,\ if\ E(Object)=\varnothing & (a) \\ Object' \subseteq Object,\ if\ E(Object)=\varnothing & (b) \\ Object,\ if\ \exists Im: O(Im)=Object & (c) \end{cases}$$

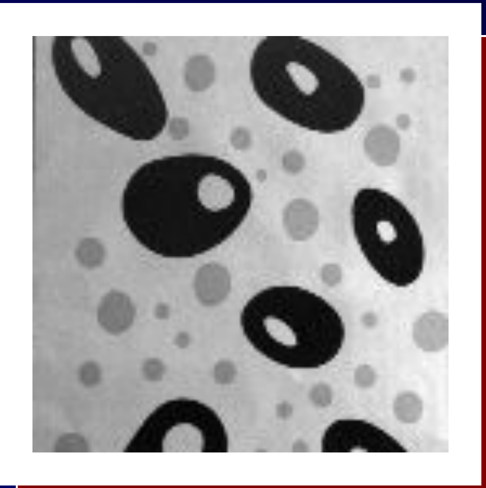
Селективная ММ

$$SO(Object)=\begin{cases} \varnothing,\ if\ E(Object)=\varnothing & (a) \\ Object,\ if\ E(Object)\neq\varnothing & (b) \end{cases}$$

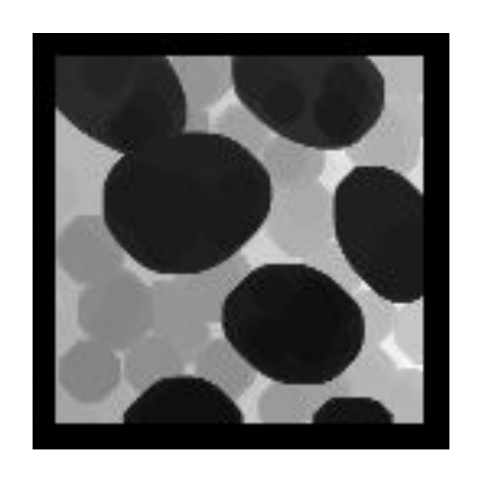
Селективные морфологии

Полутоновое ММ-открытие

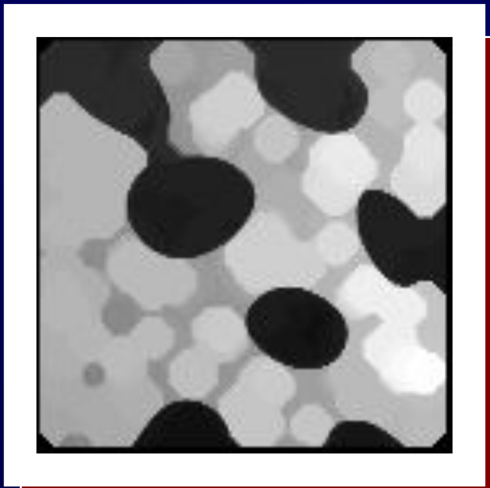
Im



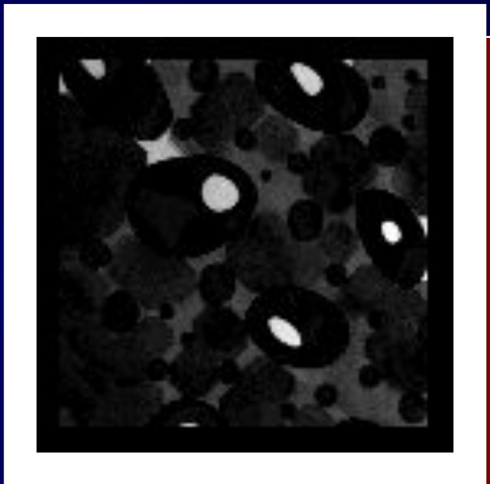
E(Im)



O(Im)



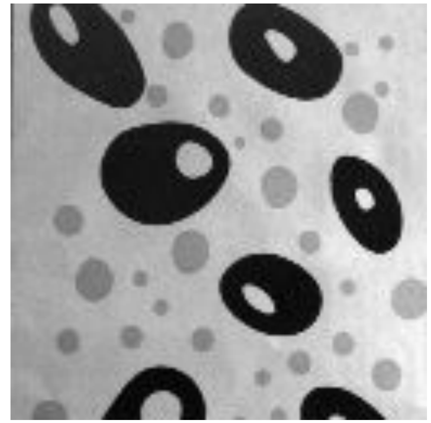
Im-O(Im)



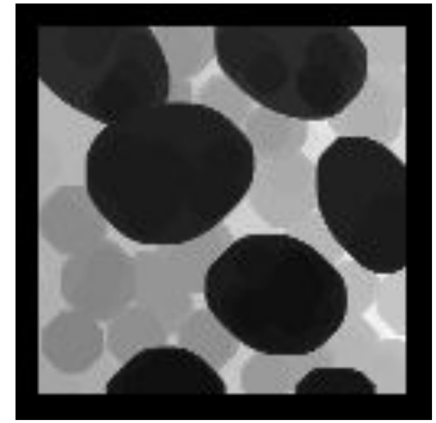
Селективные морфологии

Полутоновое SM-открытие

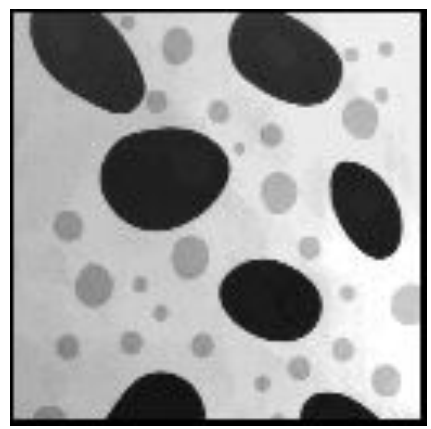
Im



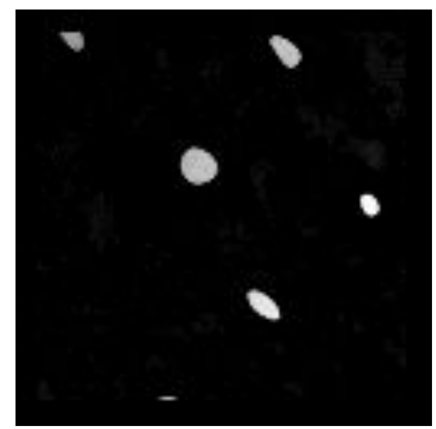
E(Im)



SO(Im)



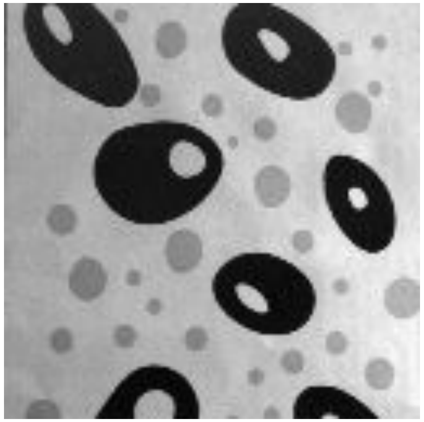
Im-SO(Im)



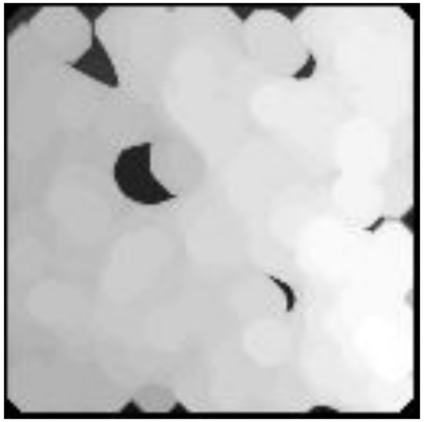
Селективные морфологии

Полутоновое ММ-закрытие

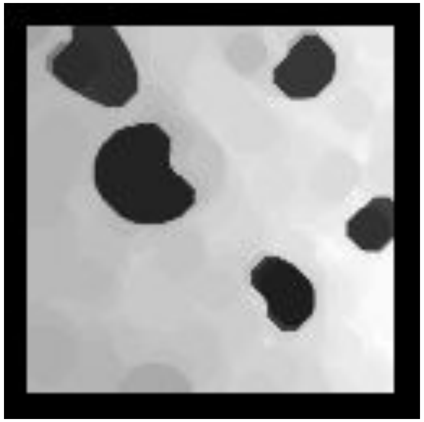
Im



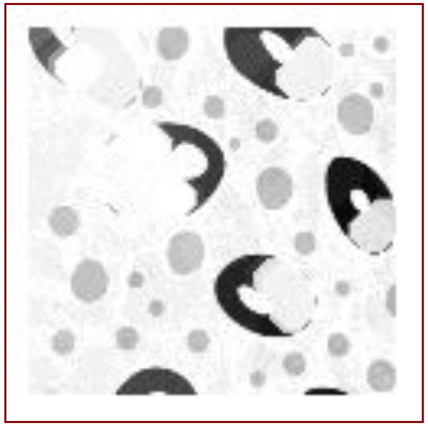
D(Im)



C(Im)



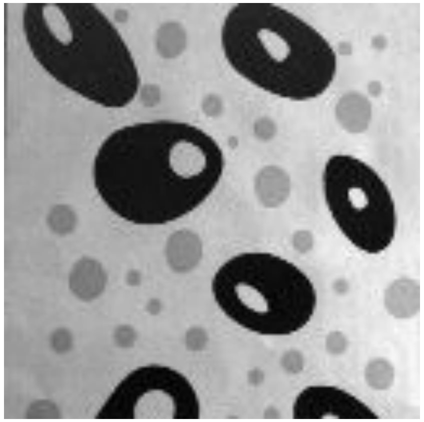
Im-C(Im)



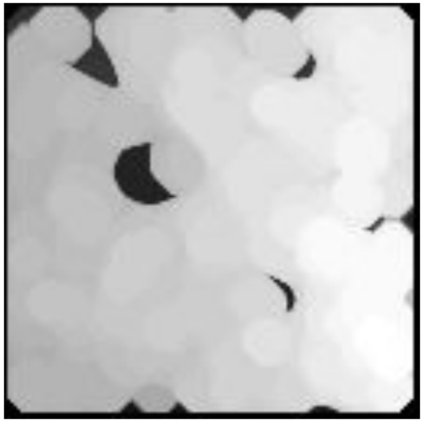
Селективные морфологии

Полутоновое SM-закрытие

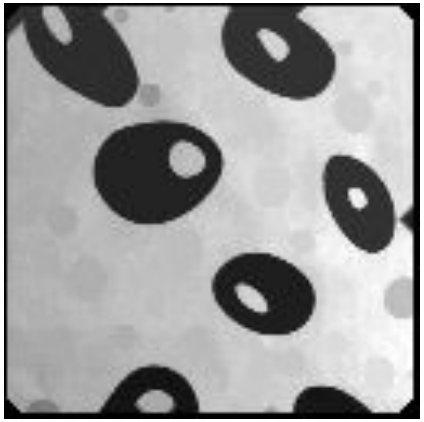
Im



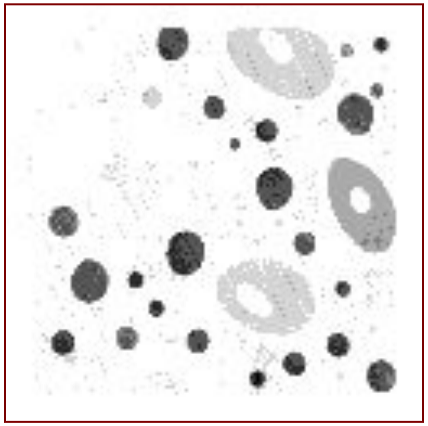
D(Im)



SC(Im)



Im-SC(Im)



Селективные морфологии

Полутоновое ММ-открытие

Im

E(Im)

O(Im)

Im-O(Im)

Селективные морфологии

Полутоновое SM-открытие

Im

E(Im)

SO(Im)

Im-SO(Im)

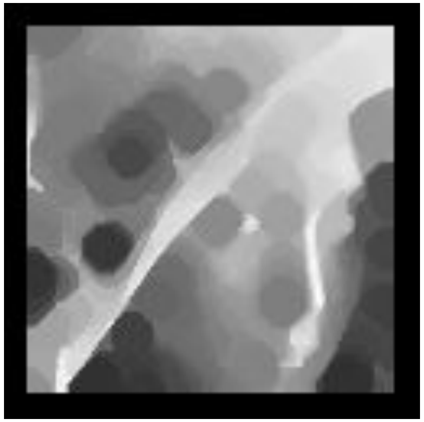
Селективные морфологии

Полутоновое ММ-закрытие

Im

D(Im)

C(Im)



Im-C(Im)

Селективные морфологии

Im

D(Im)

Полутоновое SM-закрытие

SC(Im)

Im-SC(Im)

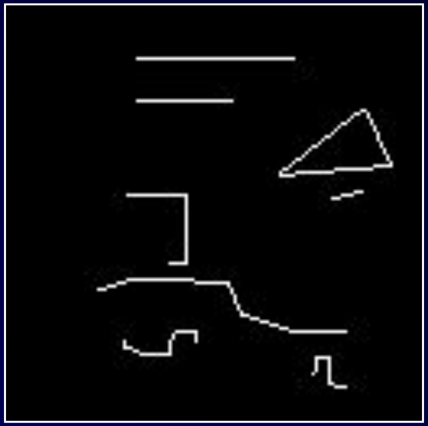
Селективные морфологии

Контурная селективная морфология

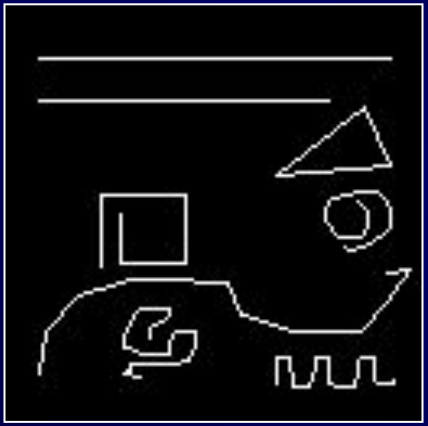
(на базе оператора удаления заданного числа концевых точек)

Im

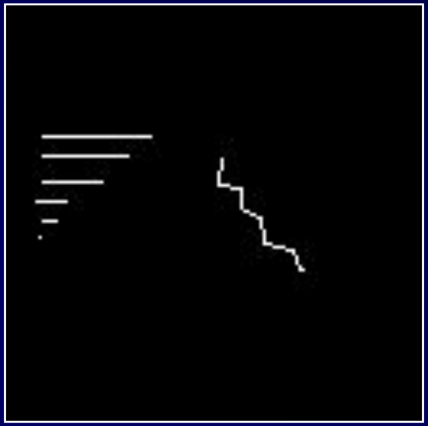
$E_{1D}(Im)$



$SO_{1D}(Im)$



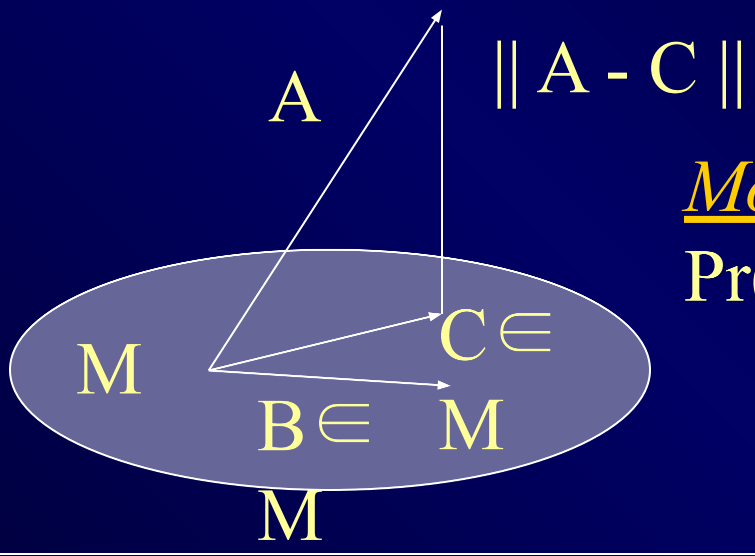
$Im\text{-}SO_{1D}(Im)$



МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ КРИТЕРИЕВ

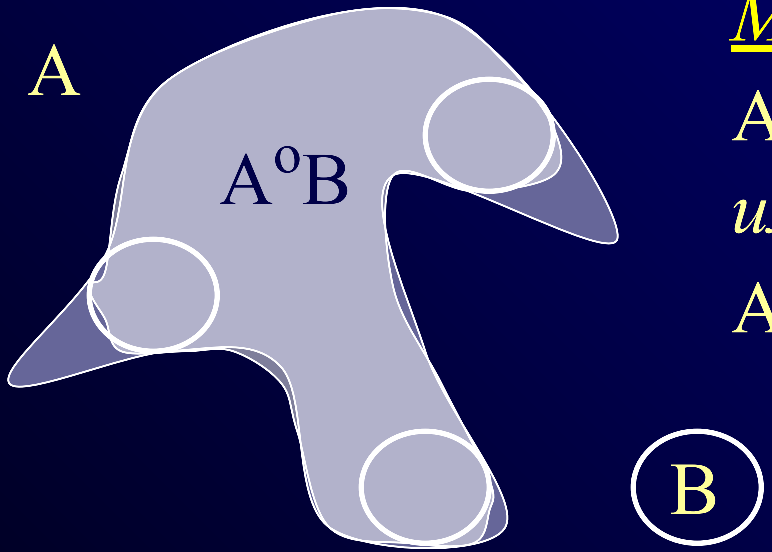
(сегментация с регуляризацией)

Критерии в классических морфологиях



Морфология Пытьева:

$$Pr(A,M(B)) = \text{argmin}_{C \in M(B)} \| A - C \|$$



Морфология Серра:

$$A^{o}B = \text{argmin}_{C \in M(B)} \{\| A - C \|: C \subseteq A$$

или

$$A^{o}B = \text{argmax}_{C \in M(B)} \{\|C\|: C \subseteq A\}$$

Морфологический подход к анализу данных

<u>Критериальная морфология:</u>

Модель: $M(\lambda): \Lambda\to[0,1] \Leftrightarrow M(L):\vartheta\to[0,1]$

Критерий соответствия:

$K(E,\lambda): \vartheta\times\Lambda\to[0,1] \Leftrightarrow K(E,L): \vartheta\times\vartheta\to[0,1]$

Критериальный морфологический фильтр ϕ_Φ на базе (ε,δ):

$$\varepsilon_\Phi(E)=\lambda,\ \phi_\Phi(E)=\delta(\lambda):\ \mathbf{\Phi(E,\lambda)=K(E,\delta(\lambda))\times M(\lambda)}\to\max(\lambda\in\Lambda)$$

$\Im(\Re)=\{\vartheta,\Lambda,\delta,K,M\}\Leftrightarrow\Im'(\Re)=\{\vartheta,\Lambda,\varepsilon_\Phi,\delta\}$ – $\Im$-*морфология.*

<u>Проективные критериальные морфологии</u>: $\boldsymbol{\phi_\Phi(E)=\phi_\Phi(\phi_\Phi(E))}$.

Морфологический подход к анализу данных

Морфологическое решение задач анализа данных:

1. Фильтрация $\phi_\Phi(E)=\delta(\lambda)$:

2. Сегментация $\varepsilon_\Phi(E)=\lambda$:

$\Phi(E,\lambda)=K(E,\delta(\lambda))\times M(\lambda)\to \max(\lambda\in\Lambda)$

3. Распознавание $c_\Phi(E)=H$:

$\Phi(E,\lambda,H)=K(E,\delta(\lambda))\times M(\lambda,H)\times M(H)\to \max(\lambda\in\Lambda,H\in\Theta)$

4. Обнаружение/локализация $\varepsilon_{\pi\Phi}(E)=\lambda$:

Параметрическая выборка $\pi(E,\lambda)$: $\vartheta\times\Lambda\to\vartheta$,

$\Phi_\pi(E,\lambda,H)=K(\pi(E,\lambda),\delta(\lambda))\times M(\lambda,H)\times M(H)\to \max(\lambda\in\Lambda,H\in\Theta)$

селективный морфологический фильтр

$\phi_\pi(E)=\pi(E,\varepsilon_{\pi\Phi}(E))$: $\vartheta\times\Lambda\to\vartheta$.

Вывод: морфологический подход позволяет **единым унифицированным способом** решать **все** основные задачи обработки и анализа данных.

Форма и семантический смысл критериев

Нечеткие модели: [0,1]

Максимум достоверности:

$\Phi(A,L)=K(A,L)\times M(L)\rightarrow \max(L\in\Omega)$

Вероятностные модели: [0,1]

Максимум апостериорной вероятности

$\psi(A)=L$: $P(A,L)=P(A/L)\times P(L)\rightarrow \max(L\in\Omega)$.

Четкие или *логические* модели: $[0,1] \rightarrow \{0,1\}$.

Морфологическая проекция на модельное множество:

$\psi(A,\mathbf{M})$: $K(A,L)\rightarrow \max(L\in\mathbf{M})$, $\mathbf{M} = \{B\in\Omega: M(B)=1\}$.

Теоретико-информационные критерии: $[0,1] \rightarrow [0,+\infty)$

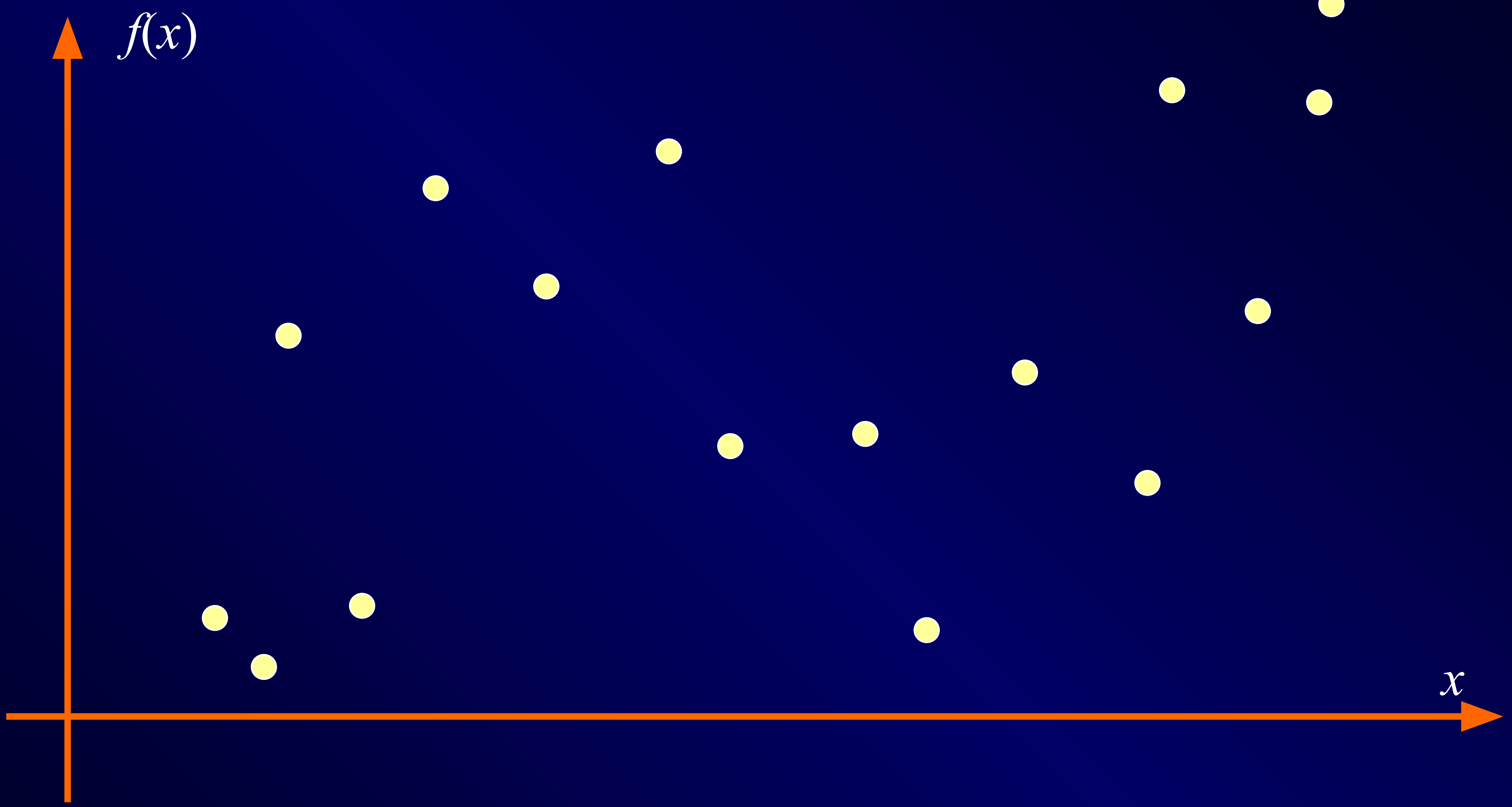
Максимум энтропии (минимум информации):

$\Phi(A,L)=J(A,L)+\alpha\times Q(L)\rightarrow \min(L\in\Omega) \Leftrightarrow K(A,L)\times M(L)^{\alpha}\rightarrow \max(L\in\Omega)$.

$J(A,L) = -\log(P(A/L))$; $Q(L) = -\log(P(L))$; α - модельный параметр

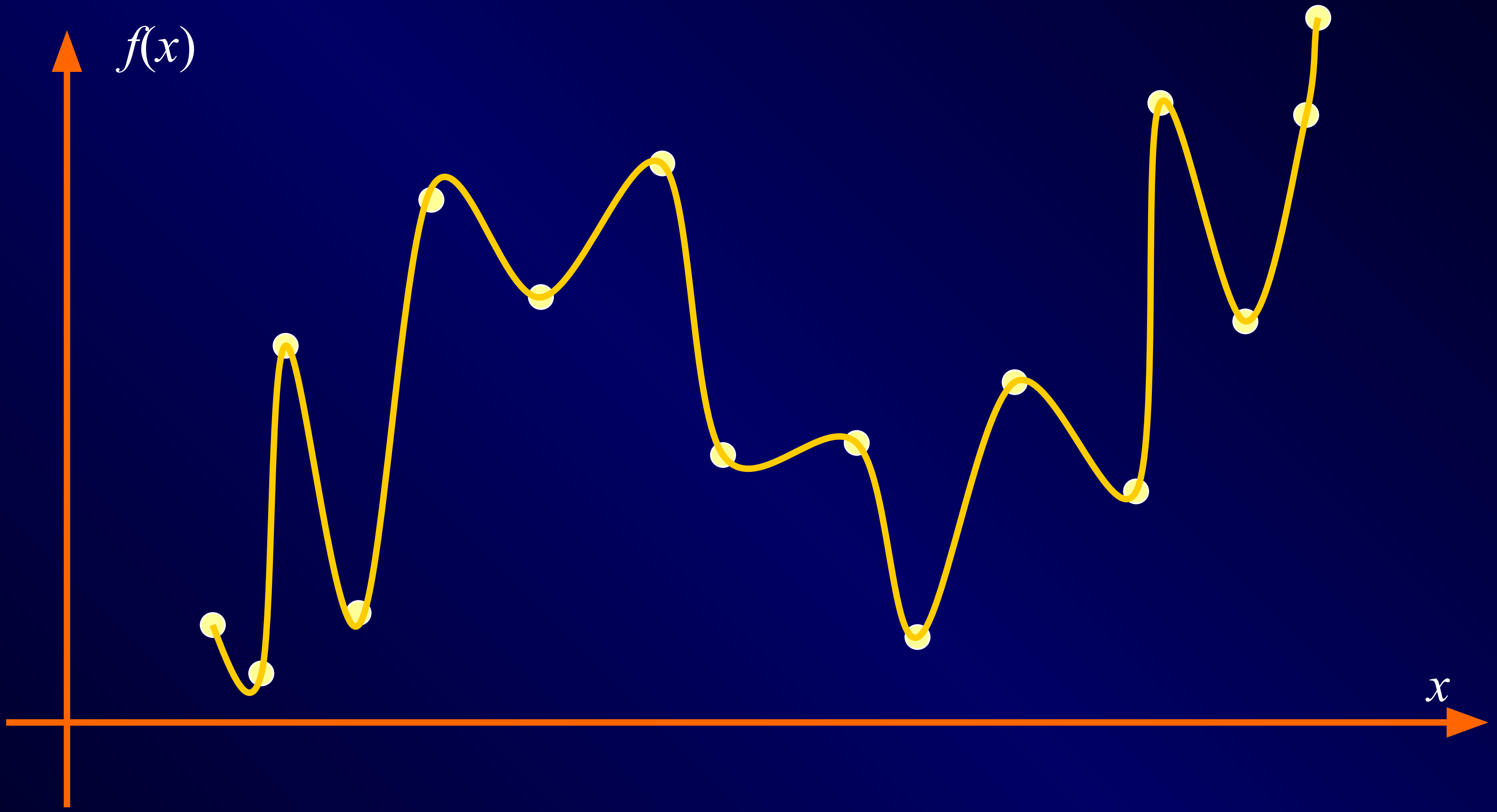
Интерпретация: *регуляризация задачи сегментации по Тихонову*

Регуляризация



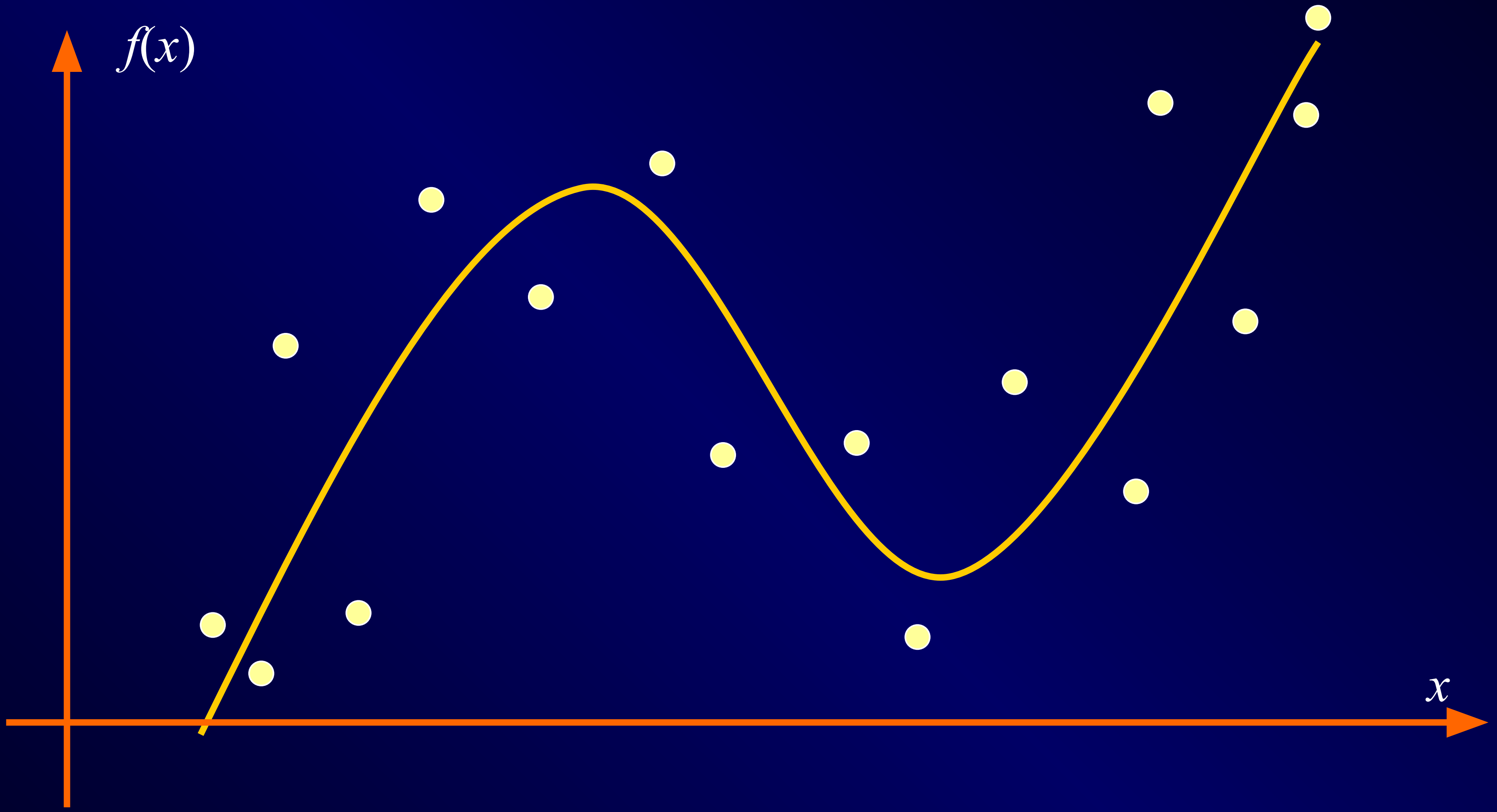
$\Phi(A,L) = J(A,L) \rightarrow$ $min(L \in F(x))$

Регуляризация



$$\Phi(A,L) = J(A,L) \rightarrow min(L \in F(x))$$

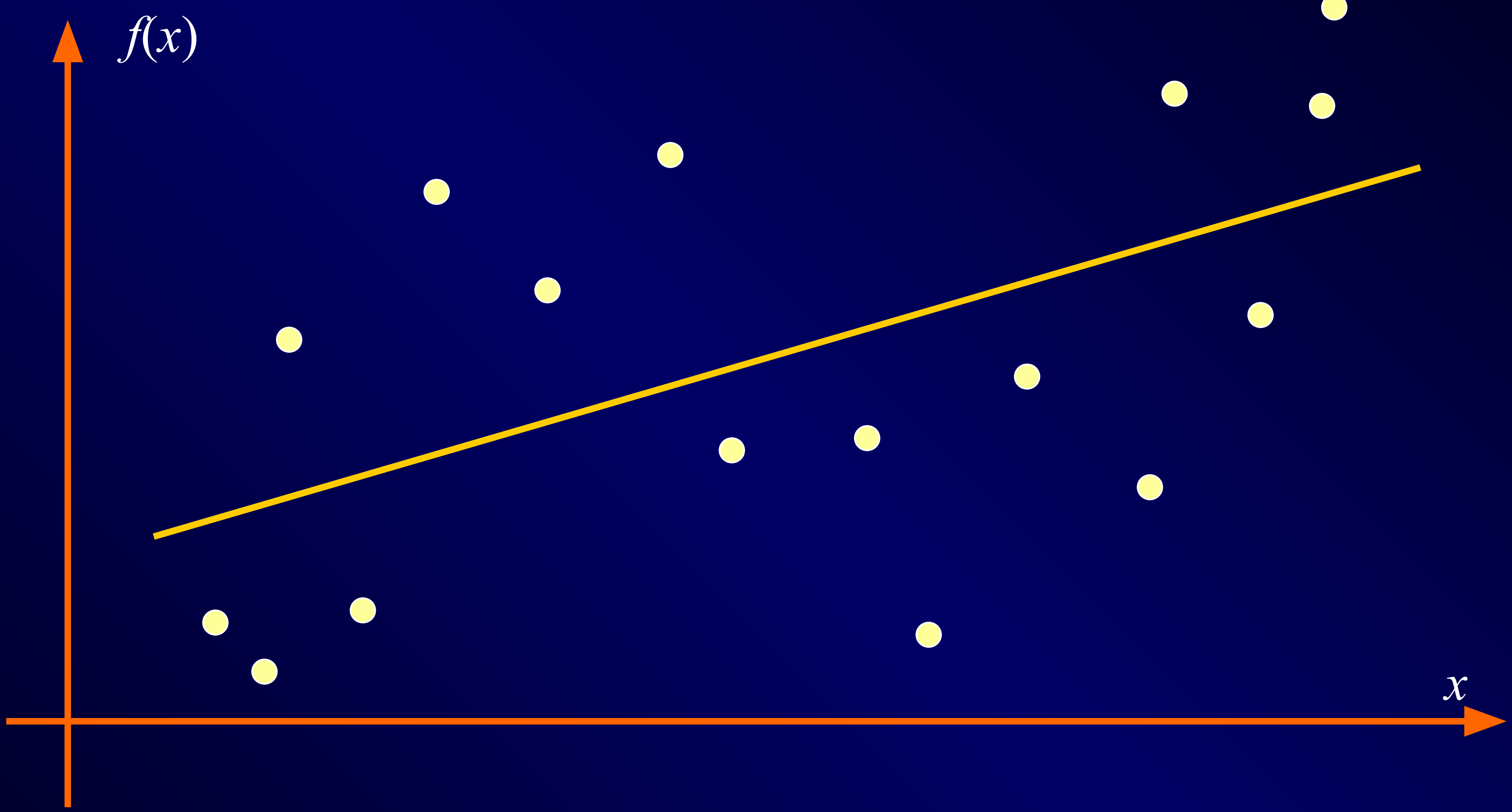
Регуляризация



$$\Phi(A,L)=J(A,L)+\alpha\times Q(L)$$

$$\rightarrow min(L \in F(x))$$

Регуляризация ⇒ сегментация с потерями

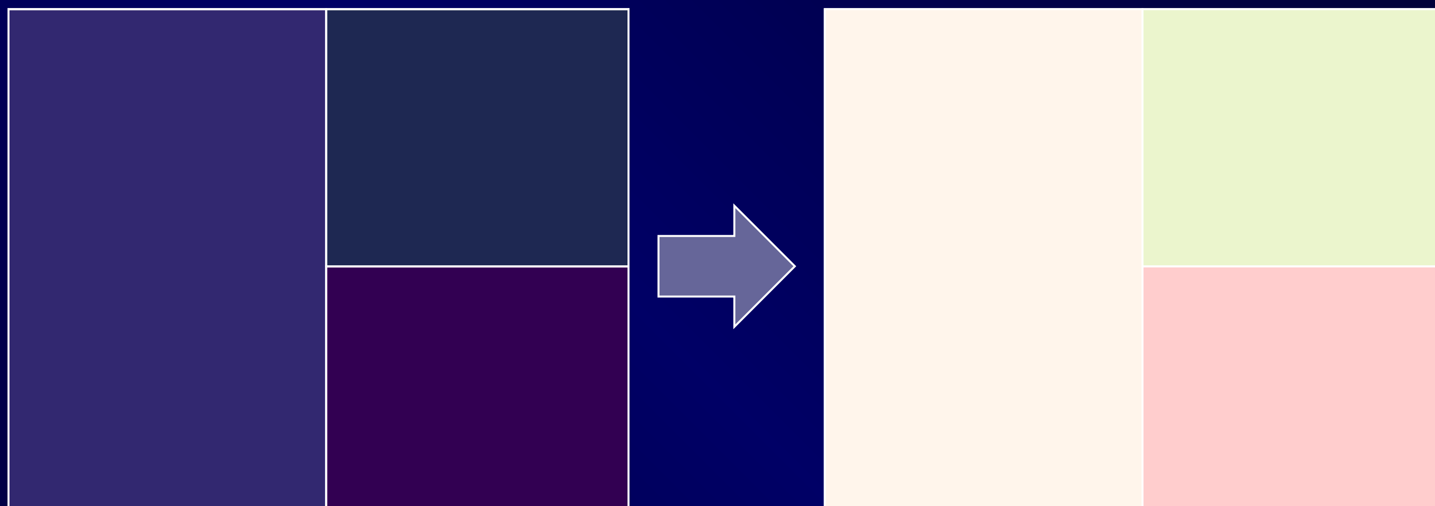


$$\Phi(A,L)=J(A,L)+\alpha\times Q(L)$$

$$\rightarrow min(L\in F(x))$$

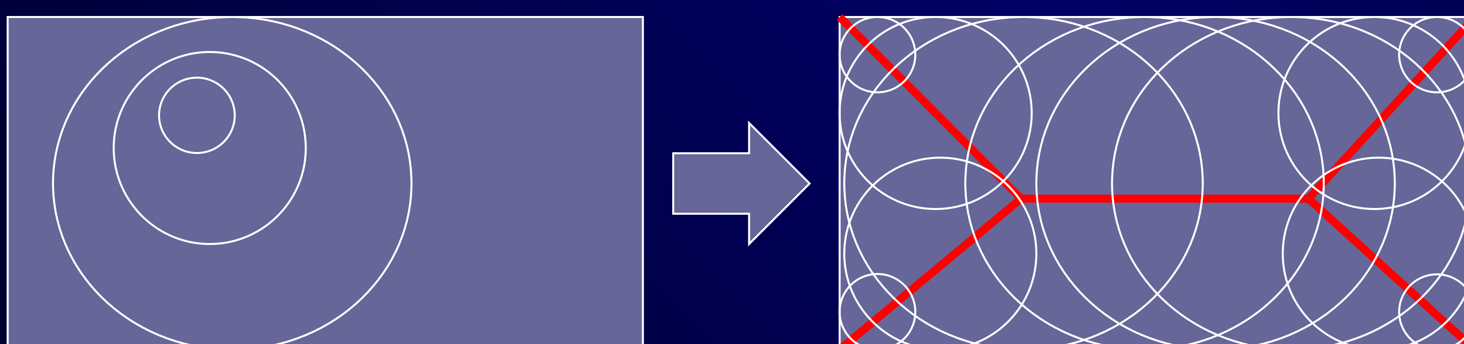
Проективная сегментация без потерь

Морфология Пытьева *«форма» Пытьева*



Полное писксельное разбиение   Минимальное число областей

Морфология Серра *морфологический скелет*



Полное дисковое представление   Минимальное число дисков

Критериальные проективные морфологии

Пусть имеется множество *образов* Ω, на котором определена операция *сложения* (‘+’), задающая на Ω группу с «нулевым образом» ∅. Кроме этого, на множестве образов определена Ω – *норма* μ(A)=||A||: Ω→R, ||∅||=0, причем норма разности обладает свойствами *расстояния*. На множестве пар образов задана

Функция-критерий (критерий штрафа)

$\Phi(A,B): \Omega\times\Omega\to R$

***Морфологический проектор на базе критерия*:**

$Pr(A,\Phi)=B: \Phi(A,B)\to\min(B\in\Omega)$, $Pr(A)=Pr(Pr(A))$, $Pr(\varnothing)=\varnothing$.

***Критериальная морфологическая модель* -**

$M = \{A\in\Omega: Pr(A,\Phi)=A\}$

множество *собственных* (стабильных) элементов проектора. Модель M_2 по отношению к M_1 является *более сложной*, если $M_2 \subseteq M_1$.

***Морфологический коэффициент корреляции*:**

$K_M(A,Pr)=K_M(A,M)=exp(- ||A-Pr(A,M)||/||Pr(A,M)||)$,

$0\le K_M(A,M)\le 1$; $K_M(A,M)=1 \Leftrightarrow A\in M$; $Pr(A,M)=\varnothing \Leftrightarrow K_M(A,M)=0$.

Конкретные морфологии определяются конкретным видом критерия.

Критериальные проективные морфологии

<u>Стандартный критерий штрафа</u>

$$\Phi(A,B) = J(A,B) + \chi(A,B) + \alpha \times Q(B)$$

где J(A,B) – *критерий соответствия* проекции и образа, причем

$$\forall A \in \Omega,\ B \in V(A,\Phi):\ J(A,A) \le J(A,B),$$

χ(A,B) – *критерий (предикат) допустимости* решения, определяющий ОДЗ

$$\chi(A,B) = \{0:\ B \in V(A,\Phi);\ +\infty:\ B \notin V(A,\Phi)\},$$

Q(B) – *критерий качества* проекции, характеризующий ее принадлежность модели M;

$\alpha \ge 0$ – *структурирующий параметр*, обеспечивающий компромисс между требованиями соответствия и качества.

Утверждение. С *увеличением* значения структурирующего параметра α сложность модели, которую определяет проектор, монотонно *убывает*.

⇒ α - *параметр морфологической сложности модели*.

<u>Морфологический спектр:</u>

$$Sp(A,\alpha) = \partial \,\|\, Pr(A,J,\chi,\alpha,Q) \,\|\, / \,\partial\alpha$$

***Коэффициент максимальной морфологической сложности*:**

$$\alpha_{max}(A) = \max\{\alpha \ge 0:\ A = Pr(A,J,\chi,\alpha,Q)\}.$$

Критериальные проективные морфологии

Достаточные условия построения проективных операторов

$\Phi(A,B) = J(A,B) + \chi(A,B) + \alpha\times Q(B)$

1. Критерий *минимального расстояния*:	$\forall A,B,C\in\Omega$: $J(A,B)\geq 0$, $J(A,A)=0$, $J(A,B)=J(B,A)$, $J(A,B)+J(B,C) \geq J(A,C)$. **Утверждение 1.** *Монотонные по ОДЗ критерии минимального расстояния* определяют морфологический проектор.
2. Критерий *максимума обобщенной нормы проекции*:	$\Phi(A,B) = -J(B) + \chi(A,B) + \alpha\times Q(B)$, $\forall A\in\Omega$, $B\in \mathbf{V}(A,\Phi)$: $\mathbf{V}(B,\Phi)\subset \mathbf{V}(A,\Phi)$, $\forall A\in\Omega$, $B\in \mathbf{V}(A,\Phi)$: $J(A)\geq J(B)$. **Утверждение 2.** *Монотонный по ОДЗ критерий максимума обобщенной нормы* определяет морфологический проектор. **Утверждение 3.** Любой образ, полученный в результате применения проектора *минимума нормы разности*, при последующем применении к нему проектора *максимума нормы проекции* с теми же параметрами более не изменяется.
3. Квазимонотонный критерий *максимума обобщенной нормы*	*Эффективное подмножество* ОДЗ: $\mathbf{U}(A,\Phi)\subseteq \mathbf{V}(A,\Phi)$, $\forall B\in \mathbf{V}(A,\Phi)$, $B\notin \mathbf{U}(A,\Phi)$: $\exists C\in \mathbf{U}(A,\Phi)$, $\Phi(A,C)<\Phi(A,B)$. *Условие квазимонотонности ОДЗ*: $\forall A\in\Omega$, $\forall B\in \mathbf{V}(A,\Phi)$: $\mathbf{U}(B,\Phi)\subseteq \mathbf{V}(A,\Phi)$. **Утверждение 4.** Квазимонотонные по ОДЗ критерии максимума обобщенной нормы определяют морфологический проектор
4. Выпуклый критерий, модель задана *предикатом*	**Утверждение 5**. Если критерий качества задан *штрафным предикатом* $Q(B)\in\{0,+\infty\}$, а критерий $J(A,B)$ является *хорошо определенной функцией соответствия* $\forall A,B\in\Omega$, $A\neq B \Rightarrow J(A,A)<J(A,B)$, морфологический фильтр является *проектором*
5. Критерий и модель *заданы предикатами*	$\Phi(A,B) = \chi(A,B) + Q(B) \in\{0,+\infty\}$ *Модель проекции:* $\mathbf{M}(Q) = \{B\in\Omega: Q(B)<+\infty\}$ *Модель соответствия:* $\mathbf{M}(A,\chi) = \{B\in\Omega: \chi(A,B)<+\infty\}$. **Утверждение 6.** Критерий на базе предикатов задает морфологический проектор, *в том и только в том случае*, когда для любого A область $\mathbf{V}(A,\Phi) = \mathbf{M}(Q) \cap \mathbf{M}(A,\chi)$ ОДЗ содержит ровно один образ, удовлетворяющий одновременно предикату $\chi(A,B)$ и предикату $Q(B)$
6. Критерий *на базе признаковых описаний и параметрических моделей*	*Набор признаков:* $\mathbf{f}(A)=\langle f_1(A),\ldots,f_n(A)\rangle\in\Psi^n$, *Параметризованная модель:* $\mathbf{B}\subseteq\Omega$: $\mathbf{B}\leftrightarrow\Psi^n$. $\Phi(A,B) = \chi(A,B) + Q(B) \in\{0,+\infty\}$ Предикат *модели проекции:* $Q(B) = \{0: B\in\mathbf{B}: +\infty: B\notin\mathbf{B}\}$ Предикат *модели соответствия:* $\chi(A,B) = \{0: \mathbf{f}(A)=\mathbf{f}(B); +\infty: \mathbf{f}(A)\neq\mathbf{f}(B)\}$. Согласно **утверждению 6** такой выбор предикатов определяет проектор $Pr(A,\chi,Q)$. Соответствующую морфологию можно назвать *морфологией на базе признаковых описаний*. Морфологиями на базе признаковых описаний являются, в частности, все *проективные морфологические разложения*.

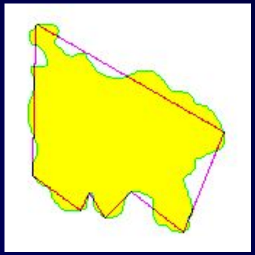
Критериальные проективные морфологии

Морфология на базе оптимальной кусочно-линейной интерполяции двумерных кривых (контуров бинарных изображений)

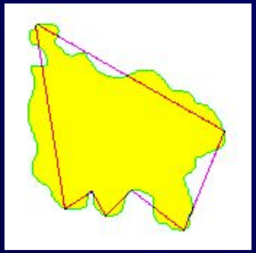
α=0

α=200

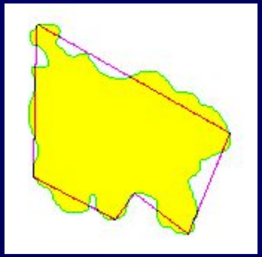
α=400



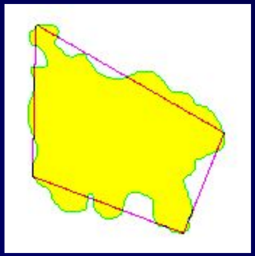
α=600



α=800



α=900



α=1000

Пример критериальной морфологической интерполяции контура двумерного бинарного образа.