Здравствуйте!

Случайные величины

Определение случайной величины

По аналогии с определением случайного события, случайную величину неформально можно определить так: случайная величина это такая величина, которая в результате опыта принимает какое-то значение, но, во-первых, это значение от опыта к опыту, как правило, меняется, и, во-вторых, нельзя заранее предсказать, какое значение она примет.

В дальнейшем, случайные величины как таковые, мы будем обозначать греческими буквами ξ, η, ζ, …, а принимаемые ими значения – латинскими x, y, z, … .

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, где элементарные события ω - это возможные исходы опыта, в результате которого наблюдается какое-то число, следовательно, случайная величина является некоторым правилом, по которому каждому $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие число.

Такое правило в математике называется функцией, поэтому можно сказать, что случайной величиной является функция $\xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая свои значения в пространстве R действительных чисел.

Так же как и в теории случайных событий не всякое множество является случайным событием, в теории случайных величин не всякая функция является случайной величиной.

Функции и отображения

Пусть даны два пространства Ω и R. Функцией f называется правило, которое каждому элементу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие число $r = f(\omega) \in R$.

Пусть A - некоторое подмножество из Ω, тогда множество $B = \{r : r = f(\omega), \omega \in A\} = f(A)$ называется **образом** множества A.

Пусть B - некоторое подмножество из R, тогда множество $A = \{\omega : f(\omega) \in B\} = f^{-1}(B)$ называется **прообразом** множества B, а правило $f^{-1}(B)$ называется **обратным отображением**. Прообраз $\omega = f^{-1}(r), r \in R$ называется **обратной функцией**.

Пусть задан класс F' подмножеств B из R, тогда класс F подмножеств A из Ω

$F = \{A : A = f^{-1}(B), B \in F'\}$ называется прообразом класса F'.

Теорема. Обратное отображение перестановочно со всеми теоретико-множественными операциями, то есть $f^{-1}\left(\bigcup_t B_t\right) = \bigcup_t f^{-1}(B_t)$, $f^{-1}\left(\bigcap_t B_t\right) = \bigcap_t f^{-1}(B_t)$,

$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) / f^{-1}(B_2)$.

Следствие. Прообраз σ - алгебры есть также σ - алгебра.

Борелевская прямая

Рассмотрим множество R действительных чисел. На этой числовой прямой могут быть отрезки четырех типов $[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$. Символом $\langle a,b\rangle$ обозначается любой из этих отрезков, при этом числа a и b могут быть конечными или бесконечными для открытой границы.

Борелевской σ - алгеброй называется класс B множеств из R, которые получены из отрезков $\langle a,b\rangle$ применением к ним конечного или счетного числа теоретико-множественных операций. Пара $\{R,B\}$ называется **борелевской прямой**.

Теорема. Любой из отрезков $\langle a,b\rangle$ может быть получен из отрезков $(-\infty,b)$ применением к ним конечного или счетного числа теоретико-множественных операций.

Доказательство. Действительно,

$$[a,b)=(-\infty,b)\setminus(-\infty,a),\ (a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(-\infty,b)\setminus(-\infty,a+1/n)\},$$

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{(-\infty,b+1/n)\setminus(-\infty,a)\},\ (a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{(-\infty,b+1/n)\setminus(-\infty,a+1/m)\}.$$

Теорема доказана.

Аксиоматическое определение случайных величин, их основные свойства

Пусть заданы вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ и борелевская прямая $\{R, B\}$.

Функция $\xi(\omega)$, отображающая Ω в R, называется **случайной величиной**, если σ-алгебра F является прообразом борелевской σ - алгебры B, то есть для любого борелевского множества $A \in B$ множество $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$ является измеримым. При этом функция $\xi(\omega)$ также называется **измеримой**.

Таким образом, случайная величина $\xi(\omega)$ должна не только отображать Ω в R, но также отображать F в B. Это дополнительное требование и ограничивает класс функций $\xi(\omega)$, которые называются случайными величинами.

Функция $f(x)$ действительной переменной x, отображающая $\{R, B\}$ в $\{R, B\}$, называется **измеримой по Борелю** или **борелевской функцией**.

Теорема (критерий измеримости). Для того, чтобы функция $\xi(\omega)$ была случайной величиной (измеримой функцией), необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех условий для любого действительного x:

1. $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$;
2. $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in F$;
3. $\{\omega : \xi(\omega) > x\} \in F$;
4. $\{\omega : \xi(\omega) \ge x\} \in F$.

Основные свойства случайных величин

1. Функция $\xi(\omega)\equiv c$ является случайной величиной.
2. Если $\xi(\omega)$ - случайная величина, то $\eta(\xi)=a\xi(\omega)+b$ также является случайной величиной.
3. Квадрат случайной величины также является случайной величиной.
4. Модуль случайной величины также является случайной величиной.
5. Сумма случайных величин также является случайной величиной.
6. Разность случайных величин также является случайной величиной.
7. Произведение случайных величин также является случайной величиной.
8. Если $\xi(\omega)$ – случайная величина такая, что $\xi(\omega)\neq 0$, то $1/\xi(\omega)$ также является случайной величиной.
9. Если $\xi_n(\omega), n=1,2,\dots,$ – случайные величины, то $\max\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ и $\min\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$, а также $\sup_n\{\xi_n\}$ и $\inf_n\{\xi_n\}$ тоже является случайными величинами.
10. Верхний и нижний пределы последовательности случайных величин также являются случайными величинами.
11. Предел последовательности случайных величин, если он существует, также является случайной величиной.
12. Борелевская функция от случайной величины также является случайной величиной.

Функция распределения вероятностей значений случайной величины

В природе значения многих случайных величин изменяются непрерывно. Случайная величина называется **непрерывной**, если она может принимать все значения из некоторого промежутка, то все ее значения сплошь заполняют некоторый интервал и поэтому их невозможно занумеровать.

Если случайная величина непрерывна, то невозможно указать вероятность, с которой случайная величина принимает каждое значение. Поэтому вводят другую характеристику случайной величины – находят вероятность события «случайная величина принимает значения из некоторого промежутка».

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ и на нем задана некоторая случайная величина $\xi = \xi(\omega)$. В дальнейшем, как правило, аргумент ω будем опускать и случайную величину $\xi(\omega)$ обозначать ξ.

Для любой случайной величины ξ, согласно критерию измеримости для любого действительного x, множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, поэтому существует функция

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} \equiv P\{\xi < x\},$$ («левее точки x»)

которая называется **функцией распределения вероятностей значений случайной величины** ξ.

Функция распределения является основной и самой полной характеристикой любой случайной величины.

Свойства функции распределения

1. $F_{\xi}(-\infty)=0$.

Действительно, случайное событие $\{\omega:\xi(\omega)<-\infty\}=\varnothing$, то есть является невозможным, поэтому $F_{\xi}(-\infty)=P(\varnothing)=0$.

2. **Условие нормировки** для функции распределения $F_{\xi}(\infty)=1$.

Действительно, случайное событие $\{\omega:\xi(\omega)<\infty\}=\Omega$, то есть является достоверным, поэтому $F_{\xi}(\infty)=P(\Omega)=1$.

3. Функция распределения $F_{\xi}(x)$ является неубывающей функцией своего аргумента x.

Действительно, пусть $x_1<x_2$, тогда $\{\omega:\xi(\omega)<x_1\}\subset\{\omega:\xi(\omega)<x_2\}$ и поэтому

$F_{\xi}(x_1)=P\{\xi<x_1\}\le P\{\xi<x_2\}=F_{\xi}(x_2)$.

4. Функция распределения $F_{\xi}(x)$ является непрерывной слева функцией.

Действительно, пусть $x_n \uparrow x$. Тогда $(-\infty, x_n) \uparrow (-\infty, x)$ и поэтому $\{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \uparrow \{\omega : \xi(\omega) < x\}$, следовательно

$$\lim_{x_n \uparrow x} F_{\xi}(x_n) = \lim_{n \to \infty} P\{\xi(\omega) < x_n\} = P\left\{\lim_{n \to \infty}\{\omega : \xi(\omega) < x_n\}\right\} =$$
$$= P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = F_{\xi}(x).$$

5. $P\{a \le \xi < b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$.

Действительно, так как $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$, то $\{\omega : a \le \xi < b\} = \{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\} = B \setminus A$ и $A \subset B$, тогда по свойствам вероятностей запишем

$$P\{a \le \xi < b\} = P\{B \setminus A\} = P(B) - P(A) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a).$$

Дискретные случайные величины

Если случайная величина принимает конечное или счетное множество значений, то она называется **дискретной** случайной величиной.

Случайная величина определятся не только множеством значений, которые она принимает, но и вероятностями, с которыми эти значения принимаются. Соответствие между значениями дискретной случайной величины и вероятностями, с которыми случайная величина принимает каждое значение, называется ***законом распределения случайной величины***.

Пусть случайная величина ξ принимает свои значения из дискретного (конечного или счетного) набора значений $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то есть $P\{\xi = x_i\} = p_i$.

Дискретную случайную величину можно описать таблицей, состоящей из двух строк, в первой из которых перечислены те значения, которые может принимать случайная величина, в во второй – вероятности, с которыми случайная величина принимает соответствующее значение.

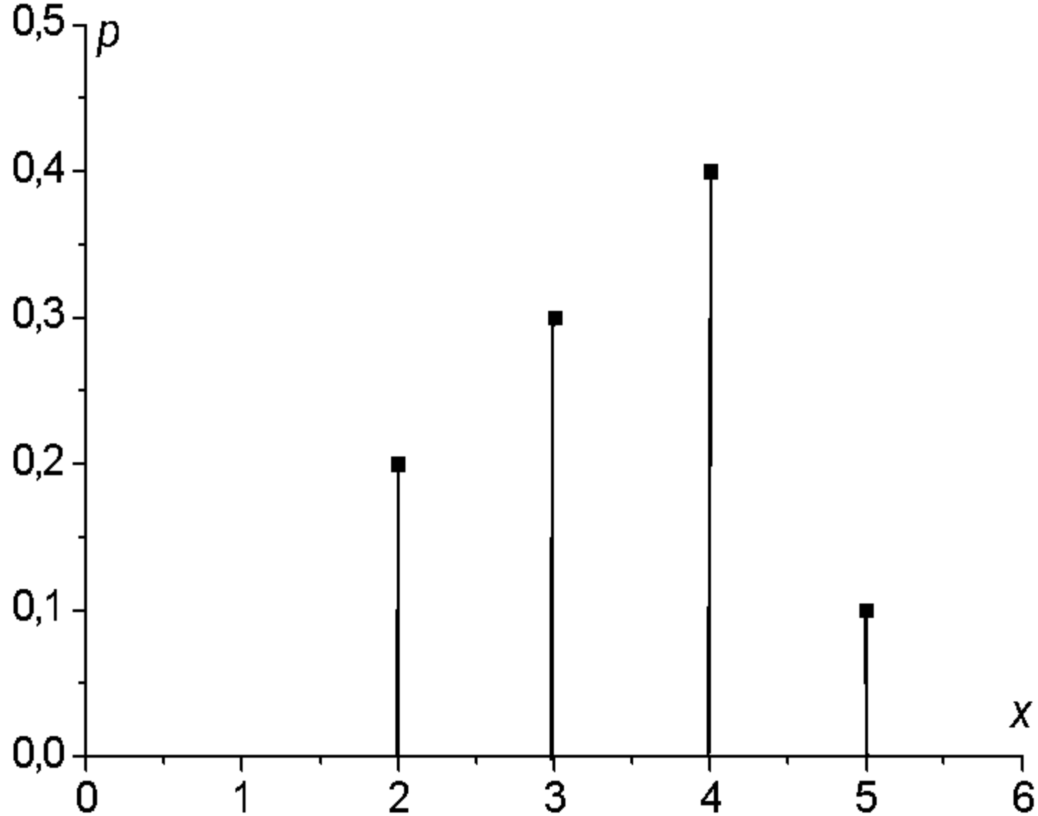
ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	$\ldots$

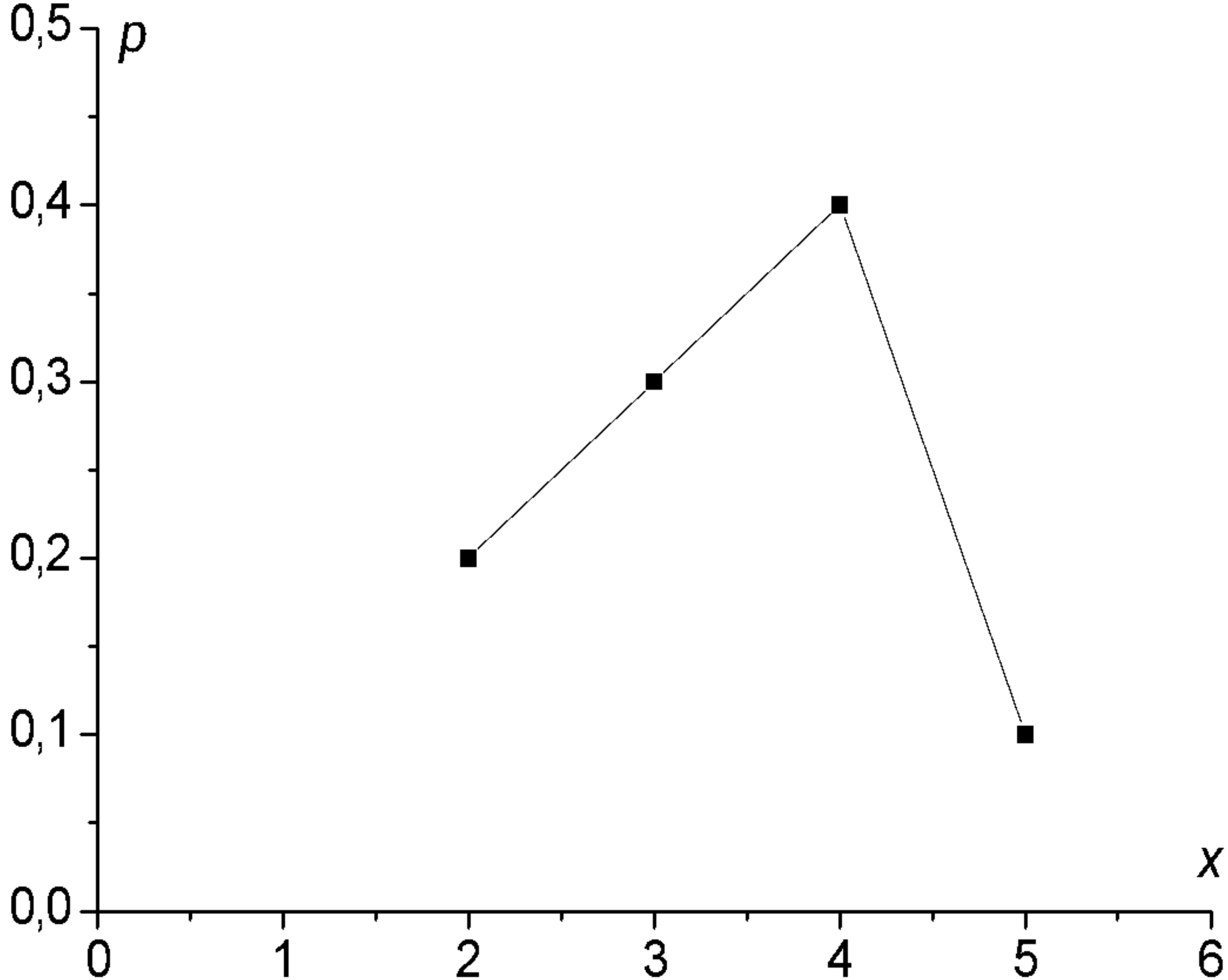
В написанной выше таблице указано, что случайная величина ξ может принимать значения x_1, x_2, x_3, …, x_n, …с вероятностями p_1, p_2, p_3, …, p_n, … соответственно. Такая таблица носит название **ряд распределения**. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Пусть, например, студент может получить на экзамене оценку 2, 3, 4, 5 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,4; и 0,1 соответственно. Тогда ряд распределения его оценки имеет вид

ξ	2	3	4	5
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Графически ряд распределения изображают в одной из следующих форм (на графиках приведено графическое изображение этой таблицы):




p
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
x
0
1
2
3
4
5
6

Примерами дискретных случайных величин являются **биномиальная и пуассоновская** случайные величины $\xi = m$:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0,1,2,...,n$$

$$P(m) = \frac{a^m}{m!}\exp\{-a\}, \; = 0,1,2,...$$

Другими примерами дискретных величин могут служить **равномерно распределенная** дискретная случайная величина ξ, для которой

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \frac{1}{n}, \; i = 0,1,2,...,n,$$

а также случайная величина $\xi = m$, **распределенная по геометрическому закону**, для которой $p_m = P\{\xi = m\} = (1-p)p^m, \; m = 0,1,2,...$

Функция распределения

Любую случайную величину можно описать так называемой **функцией распределения**. По определению

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}.$$

Например, в приведённом выше примере с оценками, имеем

$F_\xi(1{,}5) = P\{\xi<1{,}5\}=0,$

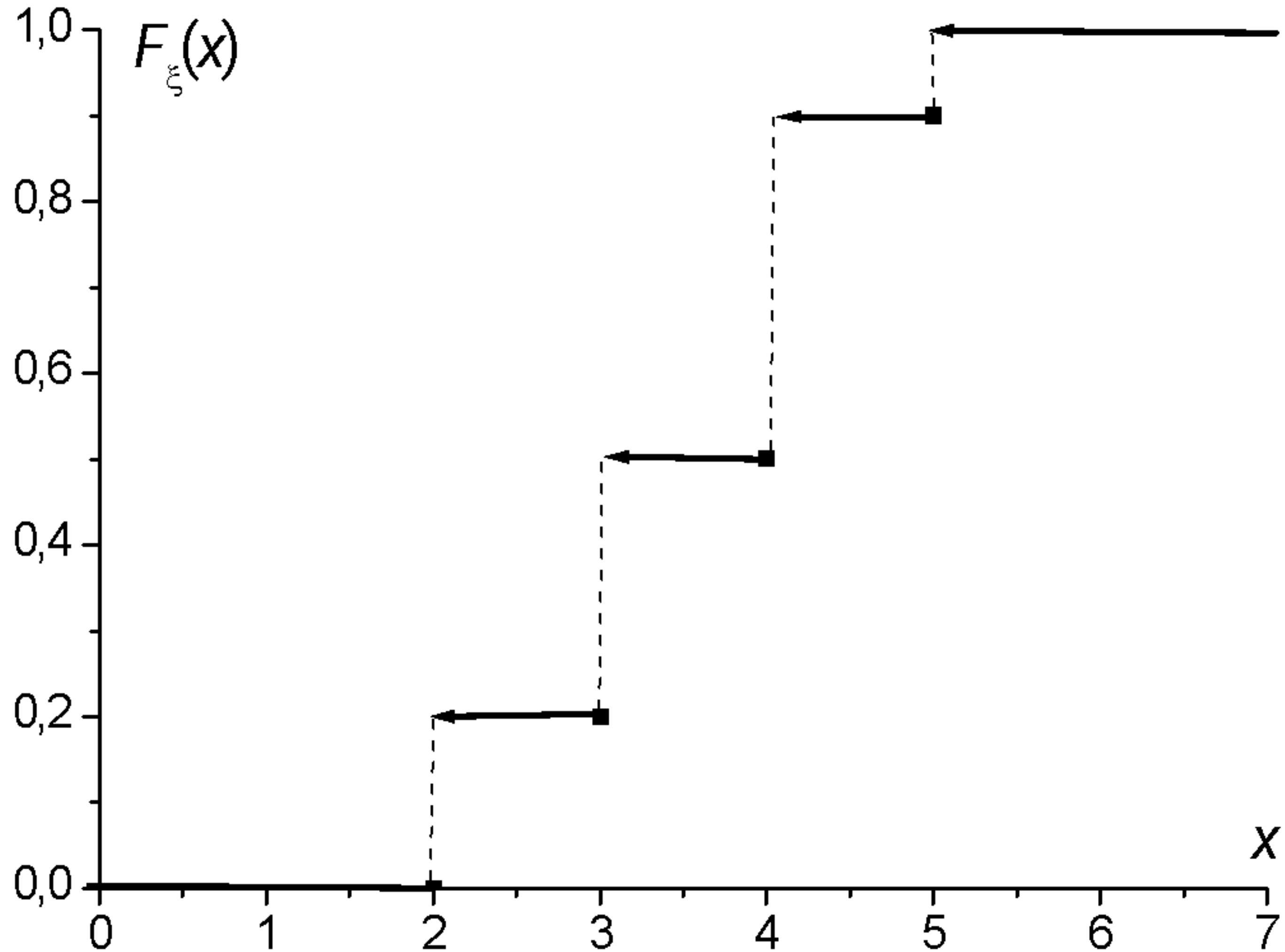
$F_\xi(2) = P\{\xi<2\}=0,$

$F_\xi(2{,}5) = P\{\xi<2{,}5\}=0{,}2,$

$F_\xi(3{,}5) = P\{\xi<3{,}5\}=0{,}2+0{,}3=0{,}5,$

$F_\xi(4{,}5) = P\{\xi<4{,}5\}=0{,}2+0{,}3+0{,}4=0{,}9,$

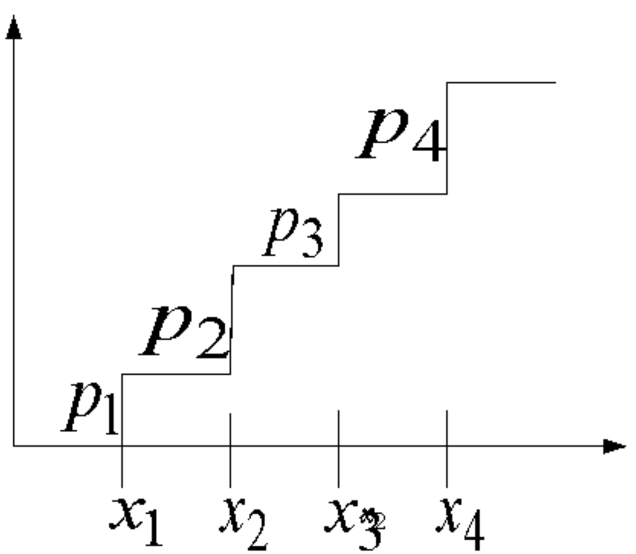
$F_\xi(5{,}5) = P\{\xi<5{,}5\}=0{,}2+0{,}3+0{,}4+0{,}1=1{,}0.$



1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
$F_\xi(x)$
x
0
1
2
3
4
5
6
7

Функция распределения дискретной случайной величины является неубывающей кусочно-постоянной функцией, с величинами скачком p_i в точках x_i. При этом выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, которое называется **условием нормировки**

График функции распределения дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ соответственно имеет вид ступенчатой функции со скачками в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ и величина скачка равна $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ соответственно. При этом выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, которое называется **условием нормировки**.



Задача 1. Опыт состоит в бросании трех монет. Величина X – число выпавших орлов. Постройте ряд распределения случайной величины X.

Задача 2. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появления шестерки.

Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины

Для непрерывных случайных величин достаточно удобной является характеристика, эквивалентная функции распределения – **плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины** ξ:

$$p_{\xi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_{\xi}(x + \Delta x) - F_{\xi}(x)}{\Delta x} = F'_{\xi}(x)$$

В дальнейшем будем опускать символ ξ в обозначениях для плотности и функции распределения.

Свойства плотности распределения

1. $p(x) = F'(x),\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$.
2. $p(x) \geq 0$.

   Это свойство плотности вытекает из того, что функция распределения – неубывающая функция, поэтому ее производная – неотрицательная функция.
3. Для плотности распределения вероятностей выполняется условие нормировки

   $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y)\,dy = 1$, которое следует из свойства 1 для плотности и условия

нормировки для функции распределения для функции распределения, так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y)\,dy = F(\infty) = 1$.

4. $P\{a \leq \xi < b\} = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx$.

   Действительно, в силу свойств функции распределения и свойства 1 для плотности, можно записать

$$P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

1. **Нормально распределенная (гауссовская)** случайная величина с параметрами a и σ^2: $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

Это распределение при $a=0$ и $\sigma^2=1$ называется стандартной нормально распределенной случайной величиной. Ее функция распределения вероятностей имеет вид

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy$ и называется интегралом вероятностей или функцией Лапласа.

Имеются подробные таблицы значений этой функции для значений аргумента $x\in[0,4]$, а для $x>4$ при вычислении значений функции Лапласа применяют конечную сумму асимптотического ряда

$$\Phi(x)=1-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{x^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6}+\dots\right\}.$$

Очевидно, что функция распределения $F_\xi(x)$ нормально распределенной случайной величины ξ с параметрами a и σ^2 выражается через функцию Лапласа

$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

1. **Экспоненциально распределенная** случайная величина с параметром λ:

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}, \qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

Отметим, что функция распределения этой случайной величины в нуле непрерывна, но не дифференцируема, поэтому плотность распределения $p(x)$ в нуле не определена.

2. Непрерывная случайная величина, **равномерно распределенная** в интервале $[a,b]$:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & x>b\end{cases}, \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b\\ 0, & x\ge b\end{cases}$$

Здесь, аналогично предыдущему случаю, функция распределения $F(x)$ в точках
$x=a$ и $x=b$ непрерывна, но не дифференцируема, поэтому плотность распределения $p(x)$ в этих точках не определена.

3. **Распределение Коши**:

$$p(x)=\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}, \; F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,x.$$

<u>Задача</u>. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ при\ x\le 0, \\ x^2,\ при\ 0<x\le 1, \\ 1,\ при\ x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

Решение. Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (0,25; 0,75) равна $F(0{,}75)-F(0{,}25)$, где $F(x)=x^2$.

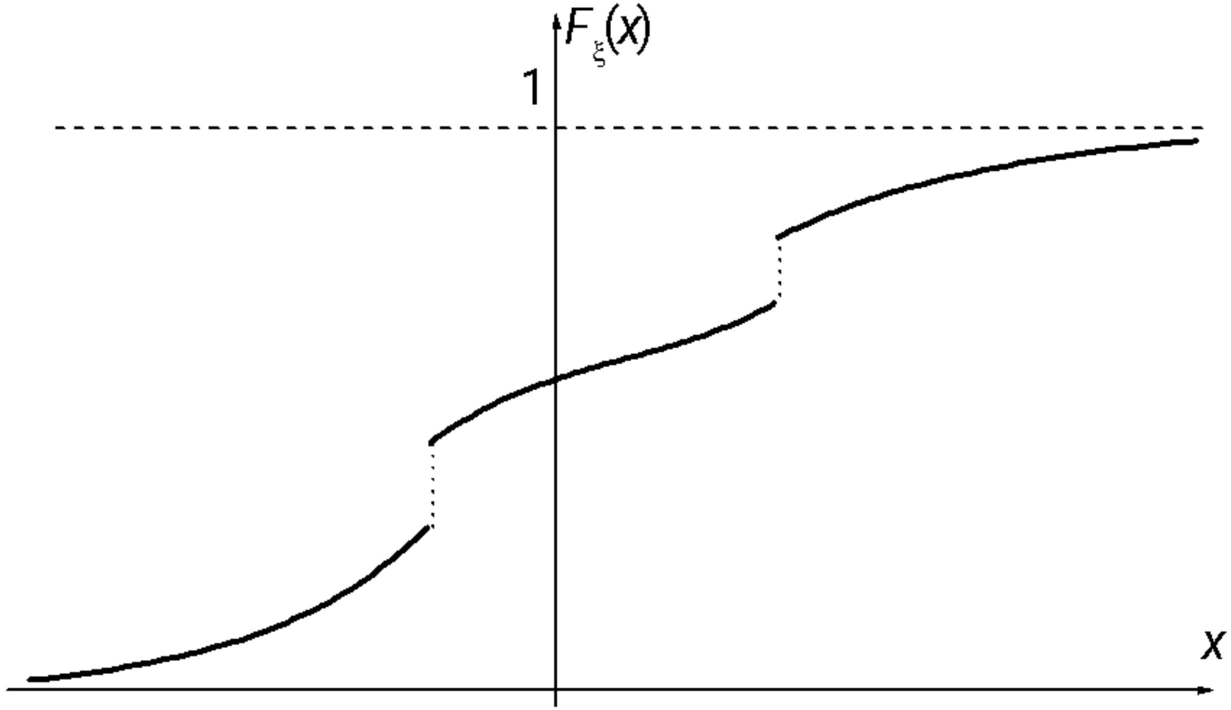
$$P(0{,}25;0{,}75)=(0{,}75)^2-(0{,}25)^2=0{,}5.$$

Тогда вероятность того, что величина X в результате четырех испытаний примет значение в интервале (0,25; 0,75) ровно 3 раза, равна

$$P_4(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=4\cdot(0{,}5)^3\cdot 0{,}5=0{,}25.$$

Смешанные случайные величины

Если график функции распределения случайной величины имеет такой вид



то соответствующая случайная величина называется **смешанной**.

Многомерные случайные величины

Выше была рассмотрена ситуация, когда результатом опыта была всего лишь **одна** величина. Однако часто в результате опыта измеряются сразу n значений. В таком случае говорят об n-мерной случайной величине или об n-мерном случайном векторе $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. По сути дела, n-мерная случайная величина это совокупность n случайных величин.

Рассмотрим случай $n = 2$, когда в результате опыта измеряются две случайных величины ξ и η. Таким образом, мы будем иметь дело с двумерной случайной величиной (ξ, η). Их значения будем обозначать (x, y).

Аналогично тому, как это делалось выше, функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ определяется как

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}.$$

Её свойства:

1. $F_{\xi\eta}(-\infty, y) = P\{\xi < -\infty, \eta < y\} = 0,$

$$F_{\xi\eta}(x, -\infty) = P\{\xi < x, \eta < -\infty\} = 0,$$

так как значений, меньших $-\infty$, в жизни не бывает.

2. $F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = P\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\} = 1.$

3. $F_{\xi\eta}(x, y)$ монотонно возрастает (точнее, не убывает) по каждому из своих аргументов, то есть

если $x_1 < x_2$, то $F_{\xi\eta}(x_1, y) \le F_{\xi\eta}(x_2, y)$,

если $y_1 < y_2$, то $F_{\xi\eta}(x, y_1) \le F_{\xi\eta}(x, y_2)$.

Для непрерывных случайных величин (ξ, η) вводят совместную плотность вероятностей как

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\{x\le\xi<x+\Delta x,\, y\le\eta<y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}.$$

Выпишем основные формулы, касающиеся плотности вероятностей.

1. $$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x\partial y},$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}p_{\xi\eta}(u,v)dv.$$

2. $p_{\xi\eta}(x,y)\geq 0$. Это следует из того, что все величины, входящие в определение $p_{\xi\eta}(x,y)$, неотрицательны.

3. Так как $F_{\xi\eta}(+\infty,+\infty)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi\eta}(u,v)dv$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi\eta}(u,v)dv=1.$

Это условие носит название **условия нормировки**.

4. Если рассмотреть бесконечно малый прямоугольник $G=[x,x+dx;y,y+dy]$, то

$$P\{(\xi,\eta)\in G\}=p_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Отсюда следует, что для произвольной области D

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint\limits_{(D)}p_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Рассмотрим случай, когда результатом опыта являются n чисел, то есть

$$\forall \omega \in \Omega \rightarrow \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

Такую совокупность функций $\xi(\omega) = \{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)\}$ будем называть n**–мерной случайной величиной или случайным вектором**, если рассматриваемая n-мерная функция измерима.

В n-мерном пространстве R^n, аналогично 1-мерному пространству R, определим борелевскую σ-алгебру B. Пусть n-мерная функция ξ отображает вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$ в борелевское n-мерное пространство $\{R^n, B\}$ таким образом, что σ-алгебра F является прообразом борелевской σ–алгебры B, тогда эта n-мерная функция измерима и называется **случайным вектором**.

Для случайного вектора функция распределения определяется равенством

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

Эта функция является основной характеристикой случайного вектора. Все, что можно сказать о случайном векторе, заключено в его функции распределения.

Свойства функции распределения случайного вектора

1. Функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ случайного вектора ξ является неубывающей по каждому из своих аргументов.

Действительно, пусть, например, $x_1' < x_1''$, тогда

$\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1', \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \subset \{\omega : \xi_1(\omega) < x_1'', \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\}$

Поэтому

$$F(x_1', x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1', \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} \le$$

$$\le P\{\xi_1 < x_1'', \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} = F(x_1'', x_2, \dots, x_n)$$

2. $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \lim\limits_{x_i \to \infty} F(x_1, x_2, \dots x_i, \dots, x_n) = 0$

Действительно, случайное событие $\{\omega : \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots \xi_i < -\infty, \dots, \xi_n < x_n\} = \varnothing$, то есть является невозможным, поэтому $F(x_1, x_2, \dots -\infty, \dots, x_n) = P(\varnothing) = 0$.

3. Условие нормировки для функции распределения случайного вектора

$$F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1.$$

Действительно, случайное событие $\{\omega : \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < \infty\} = \Omega$, т.е. является достоверным, поэтому $F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = P(\Omega) = 1$.

4. Свойство согласованности; маргинальные распределения.

Распределение любой группы компонент $\xi' = \{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m}\}$ случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ согласовано таким образом, что $F_{\xi'}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) = F_\xi(\infty, x_{i_1}, \infty, x_{i_2}, \ldots, \infty, x_{i_m}, \infty)$, т.е «лишние» аргументы x_i функции распределения $F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектора ξ необходимо положить равными бесконечности.

Действительно, пусть $\xi' = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}\}$, тогда

$$F_{\xi'}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_{n-1} < x_{n-1}\} =$$

$$= P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_{n-1} < x_{n-1}, \xi < \infty\} = F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty)$$

Распределение любой группы ξ' компонент вектора ξ, полученного из распределения этого вектора, называется **маргинальным распределением**.

Таким образом, зная функцию распределения n -мерного случайного вектора, можно найти функцию распределения вектора меньшей размерности, составленного из каких-либо компонент исходного n -мерного вектора.

Примером распределения N -мерного вектора дискретных случайных величин $\xi = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ может служить **полиномиальное распределение**:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_N) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_N!} p_1^{m_1} \, p_2^{m_2} \dots p_N^{m_N}$$

Среди многомерных случайных величин особенно часто на практике встречаются непрерывные случайные величины, которые главным образом, характеризуются своей плотностью распределения вероятностей.

В пространстве R^n выделим некоторую ограниченную область A, содержащую точку $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Непрерывная многомерная случайная величина ξ характеризуется тем, что для нее существует функция $p(x_1,x_2,...,x_n)=\lim\limits_{A\to x}\dfrac{P\{\xi\in A\}}{mes(A)}$, где область A стягивается в точку $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Функция $p(x_1,x_2,...,x_n)$ называется **плотностью распределения вероятностей значений непрерывной многомерной случайной величины** $\xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$.

Непрерывные многомерные случайные величины, прежде всего, характеризуются своей плотностью распределения.

Свойства плотности распределения непрерывных многомерных случайных величин

1. $p(x_1,x_2,...,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1\,\partial x_2...\partial x_n}$, $F(x_1,x_2,...,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}d\,y_1\int\limits_{-\infty}^{x_2}d\,y_2...\int\limits_{-\infty}^{x_n}d\,y_n\,p(y_1,y_2,...,y_n)$

2. $p(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$.

3. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,y_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,y_2...\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,y_n\,p(y_1,y_2,...,y_n)=1$.

4. $P\{\xi\in A\}=\iint...\int p(x_1,x_2,...,x_n)\,d\,x_1 d\,x_2...d\,x_n$.

5. Условие согласованности

$$p_{\xi'}(x_1,x_2,...,x_{n-1})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi}(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)\,d\,x_n\ ,$$

т.е., чтобы найти плотность распределения вектора ξ', составленного из каких-либо компонент вектора ξ, необходимо плотность распределения вектора ξ проинтегрировать по «лишним» аргументам, в рассмотренном случае – по аргументу x_n.