Здравствуйте!

Маргинальные распределение и плотность вероятностей

Рассмотрим теперь две задачи, аналогов которых нет в одномерных случайных величинах.

Пусть нам задана двумерная случайная величина (ξ, η) с функцией распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ и плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x, y)$. Теперь представим себе, что величина η нас совершенно не интересует, а интересует лишь величина ξ, и мы хотели бы знать $F_{\xi}(x)$ и $p_{\xi}(x)$. Эти функции и называются маргинальными или одномерными функцией распределения и плотностью вероятностей величины ξ.

Задача решается элементарно. Так как величина η нас совершенно не интересует, то можно записать

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi < x, \eta < +\infty\} = F_{\xi\eta}(x, +\infty),$$

и мы имеем

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi\eta}(x, +\infty).$$

Аналогично, если бы нас интересовала только величина η, то

$$F_{\eta}(y) = F_{\xi\eta}(+\infty, y).$$

Найдём теперь маргинальную плотность вероятностей. Так как

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi\eta}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} du \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(u, v) dv \right),$$

то

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, v) dv.$$

Аналогично,

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(u, y) du.$$

Таким образом, чтобы «избавиться» от не интересующей нас случайной величины, надо совместную плотность вероятностей проинтегрировать по соответствующему аргументу в пределах (–∞, +∞).

Рассмотрим **смешанные** многомерные случайные величины, часть компонент которых являются дискретными, а остальные – непрерывными случайными величинами.

Например, рассмотрим двумерную случайную величину $\{\xi,\eta\}$, компонента ξ которой принимает свои значения из дискретного множества $\{x_1,x_2,...\}$, а компонента η является непрерывной случайной величиной. Распределение вероятностей такой двумерной смешанной случайной величины удобно определять в виде функции

$$F(n,y)=P\{\xi=x_n,\eta<y\},$$

которая по дискретному аргументу n имеет смысл ряда распределения вероятностей, а по непрерывному аргументу y – смысл функции распределения.

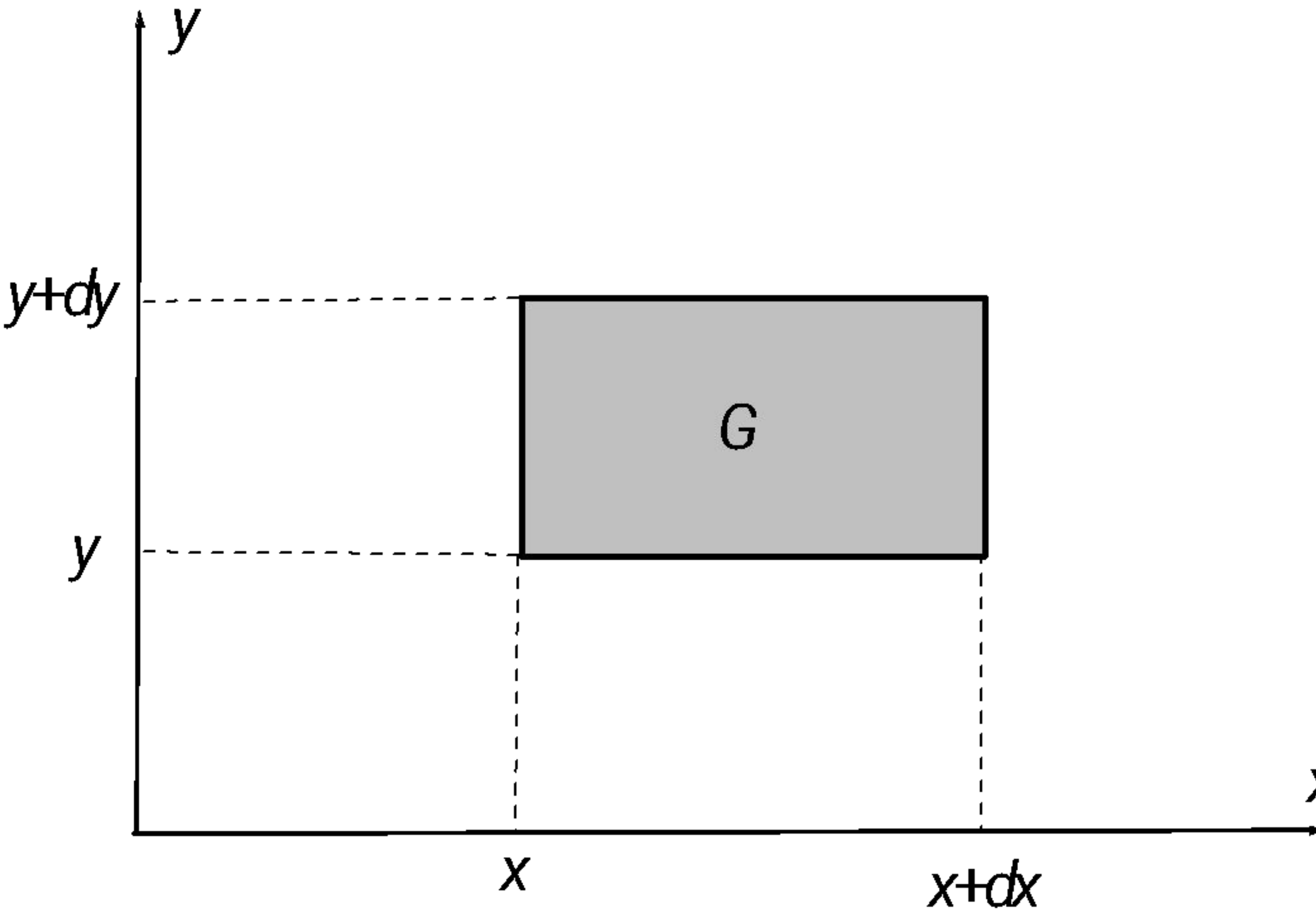
Функцию $f(n,y)=\dfrac{\partial F(n,y)}{\partial y}$ также будем называть распределением вероятностей двумерной смешанной случайной величины $\{\xi,\eta\}$, но эта функция по аргументу y имеет смысл плотности распределения вероятностей.

Маргинальное распределение вероятностей $F(n,y)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(n,y)\,dy$ компоненты ξ является рядом распределения вероятностей ее значений, а маргинальные распределения $\sum_n F(n,y)$ и $\sum_n f(n,y)$ являются соответственно функцией и плотностью распределения вероятностей значений непрерывной компоненты η.

Условные плотности вероятностей

Как и в случае двух случайных событий, между величинами ξ и η возможна зависимость. Например, чем выше человек, тем больше он весит. Но эта зависимость не является детерминированной, так как рост человека не определяет его вес однозначно; это – новый тип зависимости, так называемая вероятностная или стохастическая зависимость. Как же описать её?

Для её описания используют так называемые условные плотности вероятностей. Так $p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)$ есть плотность вероятностей величины ξ **при условии**, что мы знаем, что $\eta = y$. Аналогично, $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)$ есть плотность вероятностей величины η **при условии**, что мы знаем, что $\xi = x$. Именно эти две условные плотности вероятностей и описывают вероятностную зависимость. Найдем их.


y
y+dy
G
y
x
x
x+dx

Возьмём на плоскости XOY бесконечно малый прямоугольник $[x, x+dx; y, y+dy]$, который мы обозначим через G, и найдём $P\{(\xi, \eta) \in G\}$. Это можно сделать двумя путями.

Во-первых, как уже говорилось выше,

$$P\{(\xi, \eta) \in G\} = p_{\xi\eta}(x, y)dxdy.$$

С другой стороны, процесс попадания в G можно разделить на два этапа.

1. Величина η должна попасть в интервал $[y, y+dy]$. Вероятность этого равна $p_{\eta}(y)dy$.

2. **Зная**, что η попало в интервал $[y, y+dy]$, мы должны найти вероятность попадания ξ в интервал $[x, x+dx]$. Вероятность этого равна $p_{\xi|\eta}(x \mid y)dx$. Тогда

$$P\{(\xi, \eta) \in G\} = p_{\eta}(y)dy \cdot p_{\xi|\eta}(x \mid y)dx.$$

Приравнивая друг другу эти выражения, получим

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)\,p_{\eta}(y),$$

Откуда $p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \dfrac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)}$. (1)

Вспоминая выражение для $p_{\eta}(y)$, получим окончательно

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dx}.$$

Аналогично, $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = \dfrac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\xi}(x)} = \dfrac{p_{\xi\eta}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dy}$. (2)

Эти формулы можно представить в другом виде

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\eta|\xi}\left(y\,|\,x\right)p_{\xi}(x) = p_{\xi|\eta}\left(x\,|\,y\right)p_{\eta}(y), \qquad (3)$$

что аналогично **теореме умножения** вероятностей.

Независимость случайных величин

Аналогично тому, как это делалось в случайных событиях, говорят, что ξ не зависит от η, если

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = p_{\xi}(x),$$

и η не зависит от ξ, если

$$p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = p_{\eta}(y).$$

Пусть ξ не зависит от η, то есть $p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = p_{\xi}(x)$.

Если ξ не зависит от η, то вторую часть равенства (3) можно записать так

$$p_{\xi}(x)p_{\eta}(y) = p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)p_{\xi}(x),$$

откуда следует, что $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = p_{\eta}(y)$, то есть если ξ не зависит от η, то и η не зависит от ξ.

Таким образом, независимость случайных величин **есть свойство взаимное**. Поэтому фразы типа «ξ не зависит от η» и «η не зависит от ξ» не говорят, а говорят, что **«ξ и η независимы»**.

Возвращаясь к формулам (1)и (2), для независимых случайных величин их можно записать так

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y),$$

то есть для независимых случайных величин совместная плотность вероятностей равна произведению маргинальных плотностей вероятностей.

В общем случае компоненты случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ называются **независимыми**, если для его функции распределения выполняется равенство $F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_\xi(x_i)$,

для непрерывных случайных величин также выполняется равенство для плотности распределения вероятностей $p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_\xi(x_i)$.

Предельные условные законы распределения для одномерных случайных величин

Для случайной величины ξ запишем следующую условную функцию распределения

$$P\{\xi < x | a \le \xi \le b\} = \frac{P\{\xi < x, a \le \xi \le b\}}{P\{a \le \xi \le b\}} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{P\{a \le \xi \le x\}}{P\{a \le \xi \le b\}}, & a \le x \le b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Пусть ξ является нормально распределенной случайной величиной с параметрами m и σ^2, а переменная $x \in [a, b]$, тогда

$$\frac{P\{a \le \xi \le x\}}{P\{a \le \xi \le b\}} = \frac{\int_a^x \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}{\int_a^b \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}.$$

Рассмотрим предел этого выражения при $\sigma \to \infty$. Получим, что выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{P\{a \le \xi \le x\}}{P\{a \le \xi \le b\}} = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{\int_a^x \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy}{\int_a^b \exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dy} = \frac{\int_a^x dy}{\int_a^b dy} = \frac{x-a}{b-a},$$

т.е предельное условное распределение в этом случае является **равномерным**.

Пусть $a=0$, а $b=\infty$, тогда условное распределение можно записать в виде

$$P\left\{\xi<x \mid \xi\geq 0\right\}=\frac{P\left\{\xi<x,\xi\geq 0\right\}}{P\left\{\xi\geq 0\right\}}=\begin{cases} 0, \ x\leq 0 \\ \dfrac{P\left\{0\leq\xi<x\right\}}{P\left\{\xi\geq 0\right\}}, \ x\geq 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$$\frac{P\left\{0\leq\xi<x\right\}}{P\left\{\xi\geq 0\right\}}=\frac{\int\limits_0^x \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}{\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}.$$

Рассмотрим предел этого выражения при выполнении предельных условий $m\to-\infty$, а $\sigma\to\infty$ таким образом, что $m/\sigma^2\to-\lambda$. В этих условиях выполняется равенство

$$\lim_{\substack{m\to-\infty \\ \sigma\to\infty \\ m/\sigma^2\to-\lambda}} \frac{\int\limits_0^x \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}{\int\limits_{-\infty}^0 \exp\left\{-\dfrac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dy}=1-\exp\left\{-\lambda x\right\}, \text{ то есть предельное}$$

условное распределение в этом случае является **экспоненциальным**.

Условные законы распределения для двумерных случайных величин

Рассмотрим двумерную случайную величину $\{\xi,\eta\}$ с функцией распределения $F_{\xi\eta}(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\}$.

Условную функцию распределения случайной величины ξ при условии, что известно то значение y, которое приняла случайная величина η, обозначим следующим образом:

$$F_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=P\{\xi<x|\eta=y\}.$$

Найдем явное выражение для этой функции. Особенностью рассматриваемой условной вероятности является то, что вероятность события $\{\omega:\eta(\omega)=y\}$, наступление которого требуется условием, равна нулю для непрерывной случайной величины η, поэтому поступим следующим образом.

Условную функцию распределения $F_{\xi|\eta}(x|y)=P\{\xi<x|\eta=y\}$ найдем как предел вида

$$F_{\xi|\eta}(x|y)=P\{\xi<x|\eta=y\}=\lim_{\Delta y\to 0}P\{\xi<x|y\le\eta<y+\Delta y\}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P\{\xi<x,y\le\eta<y+\Delta y\}}{P\{y\le\eta<y+\Delta y\}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F_{\xi\eta}(x,y+\Delta y)-F_{\xi\eta}(x,y)}{F_{\eta}(y+\Delta y)-F_{\eta}(y)}.$$

Деля числитель и знаменатель дроби на Δy и выполнив предельный переход при $\Delta y\to\infty$, получим равенство

$$F_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{\partial F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial y}\Bigg/\frac{\partial F_{\eta}(y)}{\partial y}=\frac{1}{p_{\eta}(y)}\frac{\partial F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial y}.$$

Таким образом, явное выражение для условной функции распределения $F_{\xi|\eta}(x|y)$ имеет вид $F_{\xi|\eta}(x|y)=\dfrac{1}{p_{\eta}(y)}\dfrac{\partial F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial y}$.

Понятие условной плотности распределения вероятностей значений случайной величины ξ при условии выполнения равенства $\eta=y$ мы уже вывели.

Преобразование случайных величин

Общая постановка задачи следующая.

Пусть задан случайный вектор $\xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ с функцией распределения $F_\xi(x_1,x_2,...,x_n)$.

Рассмотрим случайные величины

$$\eta_1=f_1(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),$$
$$\eta_2=f_2(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_m=f_m(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),$$

где $f_1,f_2,...,f_m$ - заданные борелевские функции.

Требуется найти распределение вероятностей значений случайного вектора $\eta=\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_m\}$.

Для краткости будем называть случайные величины ξ_i «старыми», а величины η_j - «новыми».

Преобразование одномерной случайной величины.

Рассмотрение общей задачи начнём с одномерного случая, когда имеется одномерная случайная величина ξ с функцией распределения $F_{\xi}(x)$ и рассматривается случайная величина $\eta = f(\xi)$. Требуется найти её функцию распределения и плотность вероятностей.

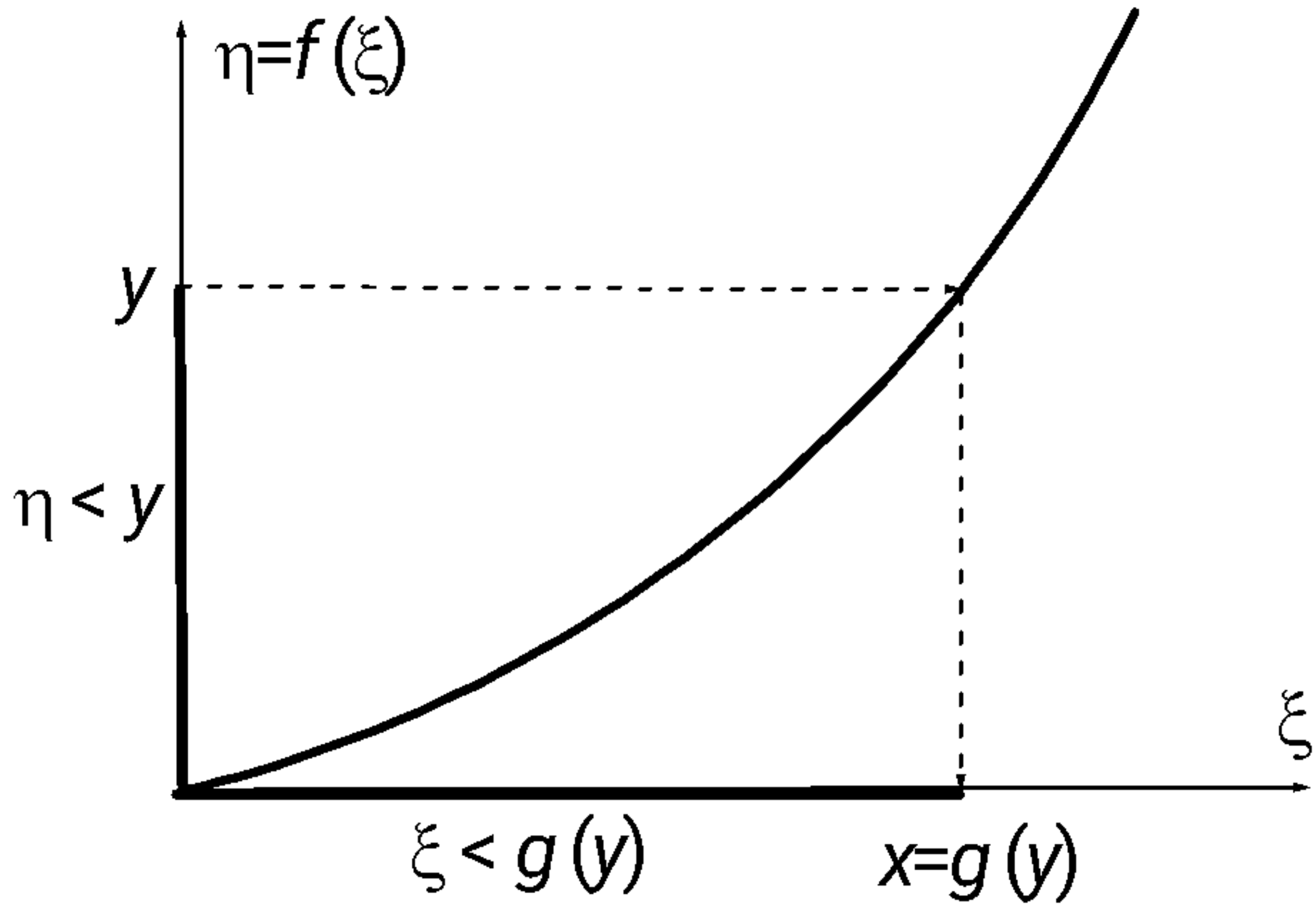
Для функции распределения величины η запишем

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta < y\} = P\{f(\xi) < y\}.$$

Рассмотрим варианты.

А. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая функция. Тогда уравнение $y = f(x)$ можно разрешить относительно x и записать обратную функцию $x = g(y)$, которая также является монотонно возрастающей.

Тогда, как видно из рис., мы имеем

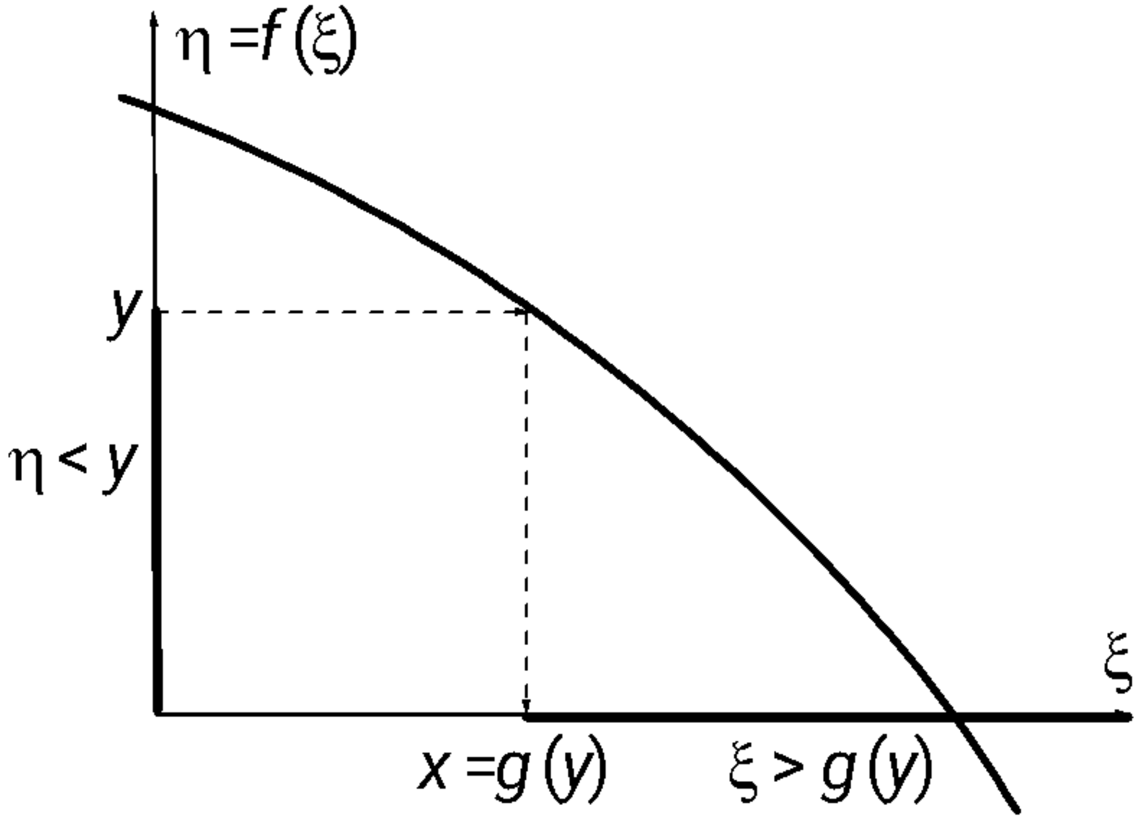


.

Дифференцируя это соотношение, получим вид плотности вероятностей величины η

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}\big(g(y)\big)g'(y).$$

Б. Пусть $f(x)$ – монотонно убывающая функция, тогда обратная функция $g(y)$ также монотонно убывающая. Тогда, как видно из рис., мы имеем



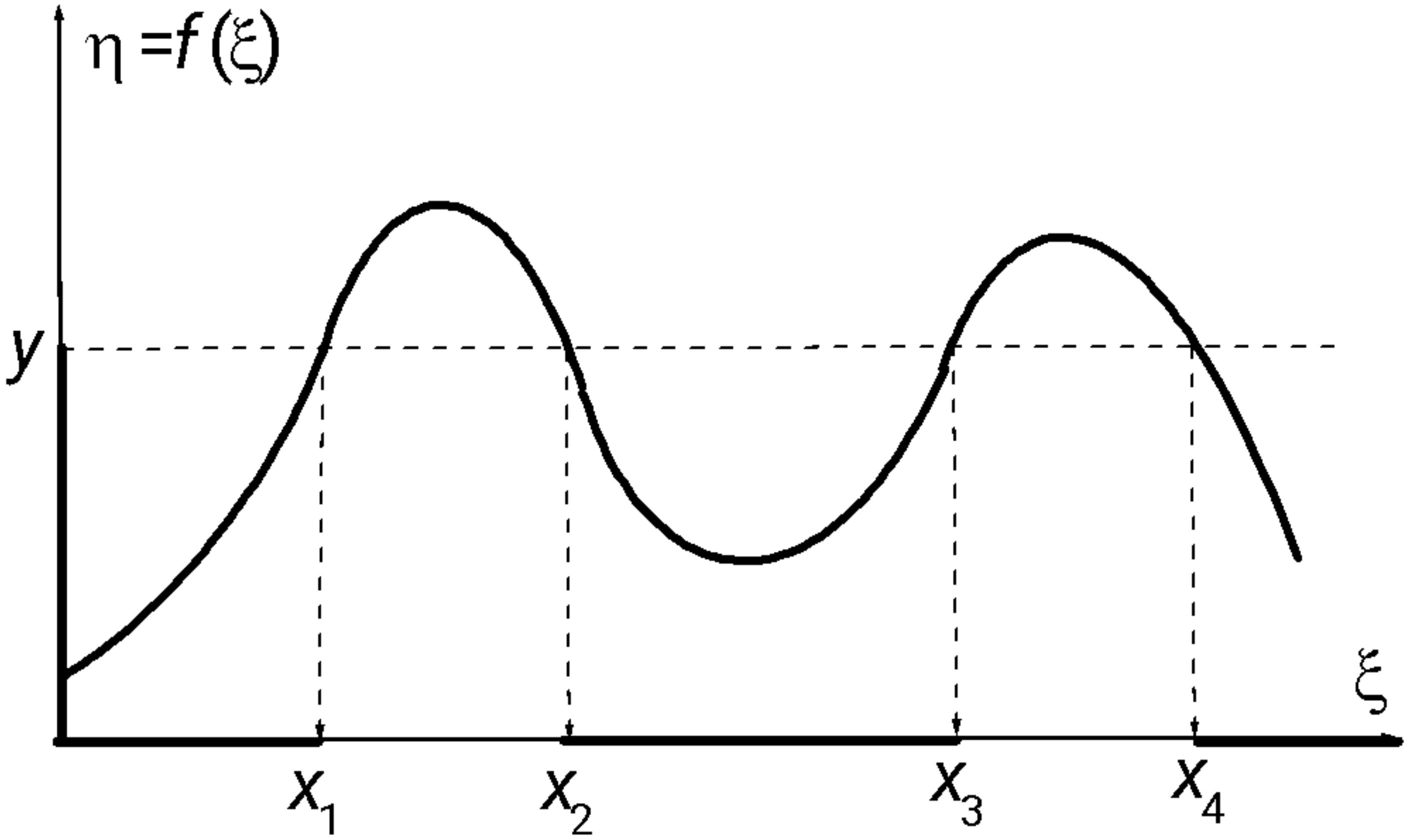
Дифференцируя это соотношение, получим вид плотности вероятностей величины η

$$p_{\eta}(y) = -p_{\xi}\big(g(y)\big)g'(y).$$

Объединяя варианты А и Б, запишем

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}\big(g(y)\big)\left|g'(y)\right|.$$

В. Пусть теперь $y = f(x)$ – произвольная функция. Тогда, при фиксированном y, уравнение $y = f(x)$ может иметь несколько корней, которые обозначим (см. рис.)



При этом будем полагать, что $f(x) < y$ на интервалах $(-\infty, x_1)$, (x_2, x_3) и т.д. Тогда можно записать

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi < g_1(y)\} + P\{g_2(y) < \xi < g_3(y)\} + \ldots,$$

и

$$F_\eta(y) = F_\xi(g_1(y)) - F_\xi(g_2(y)) + F_\xi(g_3(y)) \pm \ldots,$$

то есть

$$F_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} \left(\pm F_\xi(g_i(y))\right).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$p_\eta(y) = \sum_{j=1}^{k} p_\xi\left(g_j(y)\right)\left(\pm g_j'(y)\right) = \sum_{j=1}^{k} p_\xi\left(g_j(y)\right) | g_j'(y) |,$$

что и решает поставленную задачу.

Преобразование многомерных случайных величин при $m = n$.

Пусть при $m = n$ функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ формируют взаимно однозначное отображение векторов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в векторы $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Тогда существует однозначное обратное отображение

$$x_i = g_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

поэтому компоненты вектора ξ можно записать в виде

$$\xi_i = g_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

В пространстве векторов y выберем некоторую точку $y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ и бесконечно малую окрестность S_y этой точки. В силу взаимной однозначности рассматриваемых отображений, точке y будет соответствовать точка x, а окрестности S_y будет соответствовать окрестность S_x в пространстве векторов x, тогда

$$\left\{(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in S_y\right\} = \left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in S_x\right\},$$

поэтому

$$P\left\{\eta \in S_y\right\} = p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,\mathrm{mes}(S_y) = P\left\{\xi \in S_x\right\} =$$

$$= p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{mes}(S_x) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \ldots, g_n(y))\,\mathrm{mes}(S_x)$$

Отсюда получаем

$$p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \ldots, g_n(y)) \frac{\mathrm{mes}(S_x)}{\mathrm{mes}(S_y)}.$$

Известно, что отношение объёмов бесконечно малых областей при взаимно однозначном отображении определяется якобианом этого преобразования

$$\frac{\mathrm{mes}(S_x)}{\mathrm{mes}(S_y)} = \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right|$$

и поэтому получаем окончательную формулу

$$p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_\xi(g_1(y), g_2(y), \ldots, g_n(y)) \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right|$$

для плотности распределения вероятностей значений вектора η.

Преобразование случайных величин при $m < n$

Пусть количество новых случайных величин η_i меньше числа старых случайных величин, то есть

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_m = f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

где $m < n$, тогда введем дополнительные случайные величины

$$\eta_{m+1} = f_{m+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\eta_n = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

таким образом, чтобы составленное отображение было взаимно-однозначным.

Далее, применив процедуру предыдущего случая, найдем плотность распределения n -мерного вектора $\eta' = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots, \eta_n\}$, в котором $n - m$ последних компонент являются дополнительными.

В силу условия согласованности плотность распределения вероятностей m -мерного вектора η имеет вид

$$p_\eta(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta'}(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots y_n) d\, y_{m+1} \ldots d\, y_n$$

Рассмотрим применение этой процедуры для определении плотности распределения вероятностей суммы и частного компонент двумерного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ с заданной плотностью $p_\xi(x_1, x_2)$, а также его модуля.

Распределение суммы случайных величин

Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$.

Определим дополнительную случайную величину $\eta_2 = \xi_2$.

Следовательно, получено отображение

$$y_1 = x_1 + x_2 = f_1(x_1, x_2),$$
$$y_2 = x_2 = f_2(x_1, x_2),$$

обратное для которого имеет вид

$$x_1 = y_2 - y_1 = g_1(y_1, y_2),$$
$$x_2 = y_2 = g_2(y_1, y_2),$$

и поэтому якобиан преобразования составляет

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(g_1)}{\partial(y_1)} & \dfrac{\partial(g_2)}{\partial(y_1)} \\ \dfrac{\partial(g_1)}{\partial(y_2)} & \dfrac{\partial(g_2)}{\partial(y_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

так что $p_{\eta'}(y_1, y_2) = p_{\xi}(y_1 - y_2, y_2)$.

Избавляясь от не интересующей нас дополнительной переменной η_2, применяя условие согласованности, найдем плотность вероятностей суммы двух случайных величин

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y_1-y_2,y_2)dy_2$$

Заметим, что составленный интеграл называется **сверткой функции** $p_{\xi}(y_1,y_2)$.

Если компоненты ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность распределения суммы выглядит следующим образом.

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y_1-y_2)p_{\xi_2}(y_2)dy_2$$

Этот интеграл также называется **сверткой функций** $p_{\xi1}(y_1)$ и $p_{\xi_2}(y_2)$.

Распределение частного случайных величин

Пусть $\eta_1 = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$.

Определим дополнительную случайную величину $\eta_2 = \xi_2$.

Следовательно, получено отображение

$$y_1 = x_1 / x_2 = f_1(x_1, x_2),$$
$$y_2 = x_2 = f_2(x_1, x_2),$$

обратное для которого имеет вид

$$x_1 = y_1 y_2 = g_1(y_1, y_2),$$
$$x_2 = y_2 = g_2(y_1, y_2).$$

И поэтому якобиан преобразования составляет

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} y_2 & 0 \\ y_1 & 1 \end{bmatrix} = y_2,$$

так что $p_{\eta'}(y_1, y_2) = p_\xi(y_1 y_2, y_2)|y_2|$.

Применяя условие согласованности, найдем плотность распределения частного двух случайных величин

$$p_{\xi_1/\xi_2}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1 y_2, y_2)\,|y_2|\,d\,y_2.$$

Распределение модуля случайного вектора

Пусть $\eta_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Дополнительную случайную величину определим таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\xi_1 = \eta_1 \cos\eta_2 = g_1(\eta_1, \eta_2),$$
$$\xi_2 = \eta_1 \sin\eta_2 = g_2(\eta_1, \eta_2).$$

Здесь без определения прямого преобразования сразу записано обратное преобразование старых случайных величин ξ_1, ξ_2 через новые η_1, η_2, поэтому якобиан преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -y_1 \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{bmatrix} = y_1 \left\{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2\right\} = y_1,$$

следовательно, $p_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(y_1, y_2) = p_\xi(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2)|y_1|$.

Так как $y_1 \ge 0$, а $0 \le y_2 \le 2\pi$, то

$$p_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(y_1) = y_1 \int_0^{2\pi} p_\xi(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2) dy_2 , \quad y_1 \ge 0 .$$

Заметим еще, что плотность вероятностей величины η_2, которую называют **аргументом** или **фазой** случайного вектора (ξ_1, ξ_2), имеет вид

$$p_{\eta_2}(y_2) = \int_0^{\infty} y_1 p_\xi(y_1 \cos y_2, y_1 \sin y_2) dy_1 .$$

Интеграл Лебега от случайной величины по вероятностной мере

Для дальнейшего изложения материала необходимо уточнить теорию интегралов Лебега от случайных величин по вероятностной мере.

Известно, что определенным интегралом Римана называется предел интегральной суммы, в которой выполняется разбиение области определения подынтегральной функции (области интегрирования).

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, определенная на нем случайная величина $\xi(\omega)$ и некоторое случайное событие $A \in F$.

Пусть n – некоторое целое число, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Определим случайные события $A_m = \left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\}$.

Составим следующую сумму:

$$S_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} P\{A_m \cap A\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} P\left\{\omega : \frac{m}{n} \le \xi(\omega) < \frac{m+1}{n}\right\},$$

которую будем называть **интегральной суммой Лебега**.

Если при $n \to \infty$ существует предел последовательности интегральных сумм S_n, то значение этого предела будем называть **интегралом Лебега от случайной величины** ξ **на случайном событии** A **по вероятностной мере** P**:**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{n}P\left\{\omega : \frac{m}{n}\le\xi(\omega)<\frac{m+1}{n}\right\}\right\} = \int_A \xi(\omega)\,dP(\omega).$$

Если $A=\Omega$, то соответствующий интеграл будем называть **интегралом Лебега от случайной величины по вероятностной мере.**

Все <u>свойства интеграла Лебега</u> вытекают из свойств сумм и пределов. В частности:

1. Если k – неслучайная величина, то $\int\limits_A k\cdot\xi(\omega)\,dP(\omega)=k\int\limits_A \xi(\omega)\,dP(\omega)$.
2. Интеграл суммы равен сумме интегралов:
$$\int\limits_A \{\xi(\omega)+\eta(\omega)\}\,dP(\omega)=\int\limits_A \xi(\omega)\,dP(\omega)+\int\limits_A \eta(\omega)\,dP(\omega).$$
3. Если $\xi(\omega)\le\eta(\omega)$, то $\int\limits_A \xi(\omega)\,dP(\omega)\le\int\limits_A \eta(\omega)\,dP(\omega)$.

   В частности, если $m\le\xi(\omega)\le M$, то $m\cdot P(A)\le\int\limits_A \xi(\omega)\,dP(\omega)\le M\cdot P(A)$.
4. Для модулей выполняется неравенство $\left|\int\limits_A \xi(\omega)\,dP(\omega)\right|\le\int\limits_A |\xi(\omega)|\,dP(\omega)$.

Интеграл Стилтьеса

Пусть на интервале $\left[a,b\right]$ определены

1. Непрерывная функция $f\left(x\right)$.

2. Монотонно неубывающая, положительная и ограниченная сверху функция $F\left(x\right)$, например, функция распределения некоторой случайной величины.

Разделим отрезок $\left[a,b\right]$ на части точками $a=x_0<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ и на каждом отрезке $\left[x_i,x_{i+1}\right)$ произвольным образом выберем точку $\xi_i\in\left[x_i,x_{i+1}\right)$. Составим интегральную сумму $S\left(\Delta\right)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i\right)\left[F\left(x_{i+1}\right)-F\left(x_i\right)\right]$ и пусть $\Delta=\max\limits_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$.

Если при $\Delta\to0$ существует предел интегральной суммы $S=S\left(\Delta\right)$ и этот предел не зависит от способа разбиения отрезка на части и выбора точек ξ_i, то такой предел называется **интегралом Стилтьеса от функции** $f\left(x\right)$ **по функции** $F\left(x\right)$ **на интервале** $\left[a,b\right]$ и обозначается $\lim\limits_{\Delta\to0}S\left(\Delta\right)=\int\limits_a^b f\left(x\right)dF\left(x\right)$.

Очевидно, что свойства интеграла Стилтьеса аналогичны свойствам интеграла Римана и вытекают из свойств сумм и пределов.

Вычисление интеграла Стилтьеса

Аналогично функциям распределения функции $F(x)$ будем рассматривать либо разрывные, кусочно-постоянные, либо непрерывные и дифференцируемые.

А. Пусть у функции $F(x)$ существует производная $F'(x)$, тогда по формуле Лагранжа приращение функции можно записать в виде

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\overline{\xi_i})\Delta x_i, \text{ где } \overline{\xi_i} \in [x_i, x_{i+1}).$$

Так как предел интегральной суммы не зависит от выбора точки ξ_i, то можно полагать, что $\xi_i = \overline{\xi_i}$, поэтому интегральная сумма имеет вид $S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{\xi_i}) F'(\overline{\xi_i}) \Delta x_i$ и, следовательно, выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{\xi_i}) F'(\overline{\xi_i}) \Delta x_i \right\} = \int_a^b f(x) F'(x)\,dx.$$

То есть интеграл Стилтьеса в этом случае можно находить, применяя интеграл Римана.

Б. Пусть функция $F(x)$ постоянна на интервалах $\left[x_j^*, x_{j+1}^*\right)$, где $x_j^* - x_{j+1}^* \geq c > 0$, а в точках x_j^* имеет разрывы величиной p_j. Тогда интегральная сумма, при достаточно малом значении $\Delta < c$, примет вид

$$S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right] = \sum_j f\left(x_j^*\right) p_j$$

Так как $F(x_{i+1}) - F(x_i) = \begin{cases} 0, \forall j, x_j^* \notin [x_i, x_{i+1}), \\ p_j, \exists j, x_j^* \in [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ то интеграл Стилтьеса определяется равенством $\int_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_j f\left(x_j^*\right) p_j$.

То есть интеграл Стилтьеса в этом случае можно находить, применяя суммирование конечного числа слагаемых.

Теорема. Если существует интеграл Лебега $\int_\Omega \xi(\omega)\,dP(\omega)$ и интеграл Стилтьеса $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x)$, где $F_\xi(x)$ - функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$, то выполняется равенство этих интегралов $\int_\Omega \xi(\omega)\,dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x)$.

<u>Доказательство</u>. Действительно

$$\int_{\Omega}\xi(\omega)\,dP(\omega)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{n}P\left\{\omega:\frac{m}{n}\le\xi(\omega)<\frac{m+1}{n}\right\}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m}{n}\left[F_{\xi}\left(\frac{m+1}{n}\right)-F_{\xi}\left(\frac{m}{n}\right)\right]\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF_{\xi}(x)$$

Теорема доказана.

Без доказательства и более общая теорема.

Теорема. Если для борелевской функции $f(x)$, случайной величины $\xi(\omega)$, ее функции распределения $F_{\xi}(x)$ и вероятностной меры $P(\omega)$ существуют интегралы

$\int_{\Omega}f(\xi(\omega))\,dP(\omega)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dF_{\xi}(x)$, то выполняется равенство этих интегралов, то есть $\int_{\Omega}f(\xi(\omega))\,dP(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dF_{\xi}(x)$.