Здравствуйте !

Производящая функция

Для целочисленной дискретной случайной величины ξ, принимающей значения $\xi = 0, 1, 2, ...$, **производящей функцией** называется функция аргумента z, определяемая равенством

$$g(z) = M\{z^{\xi}\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k .$$

В частности, для пуассоновской случайной величины получим

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!} \exp\{-a\} = \exp\{-a\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z a)^k}{k!} = \exp\{(z-1)a\}.$$

А для геометрически распределенной случайной величины

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-\rho)\rho^k = \frac{1-\rho}{1-z\rho}.$$

Свойства производящих функций:

1. Для производящей функции имеют место равенства

$$g(1)=1,$$

$$g'(z)\big|_{z=1}=M\,\xi=m_1,$$

$$g''(z)\big|_{z=1}=M\,\{\xi(\xi-1)\}=M\,\xi^2-M\,\xi=m_2-m_1,$$

$$g'''(z)\big|_{z=1}=M\,\{\xi(\xi-1)(\xi-2)\}=M\,\xi^3-3M\,\xi^2+2M\,\xi=m_3-3m_2+2m_1,$$

....

Факториальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина

$$\nu_k=M\,\{\xi(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-(k-1))\}=g^{(k)}(z)\big|_{z=1}.$$

2. Производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их производящих функций:

$$g_{\xi+\eta}(z)=g_\xi(z)g_\eta(z).$$

Действительно,

$$g_{\xi+\eta}(z)=M\,\{z^{\xi+\eta}\}=M\,\{z^\xi\cdot z^\eta\}=M\,\{z^\xi\}\cdot M\,\{z^\eta\}=g_\xi(z)g_\eta(z).$$

Характеристическая функция

Разберём теперь один чисто математический приём, который очень часто используется при исследованиях, связанных с теорией вероятностей.

Пусть дана случайная величина ξ. **Характеристической функцией** $g_\xi(\omega)$ этой случайной величины называется

$$g_\xi(\omega) = \mathrm{M}\{e^{i\omega\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF_\xi(x),$$

где $i = \sqrt{-1}$.

В явном виде характеристическую функцию можно записать так

$$g_\xi(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{i\omega x_k} p_k & \text{для дискретной случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p_\xi(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

В математике $g_\xi(\omega)$ называют **преобразованием Фурье** от функции $p_\xi(x)$.

Самым важным является то, что $g_\xi(\omega)$ и $p_\xi(x)$ определяют друг друга **взаимно однозначно.** Соответствующие формулы имеют вид

$$g_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p_\xi(x) dx, \quad p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g_\xi(\omega) d\omega,$$

и поэтому знание $g_\xi(\omega)$ эквивалентно знанию плотности вероятностей $p_\xi(x)$

Функция $\psi_\xi(\omega) = \ln g_\xi(\omega)$ называется **кумулянтной функцией**.

Некоторые характеристики легче вычисляются через неё.

Разберем теперь некоторые свойства характеристической функции, нужные нам в дальнейшем.

1. Пусть $\eta = a\xi + b$. Тогда

$$g_\eta(\omega) = e^{i\omega b} g_\xi(a\omega), \quad \psi_\eta(\omega) = i\omega b + \psi_\xi(a\omega).$$

Действительно, имеем

$$g_\eta(\omega) = \mathrm{M}\{e^{i\omega\eta}\} = \mathrm{M}\{e^{i\omega(a\xi+b)}\} = \mathrm{M}\{e^{i\omega b} \cdot e^{i(\omega a)}\} =$$
$$= e^{i\omega b} \cdot \mathrm{M}\{e^{i(\omega a)}\} = e^{i\omega b} g_\xi(a\omega)$$

Логарифмируя это выражение, получим формулу для кумулянтной функции.

2. Пусть ξ и η есть независимые случайные величины и $\zeta = \xi + \eta$. тогда

$$g_\zeta(\omega) = g_\xi(\omega) \cdot g_\eta(\omega), \quad \psi_\zeta(\omega) = \psi_\xi(\omega) + \psi_\eta(\omega).$$

Действительно, имеем

$$g_\zeta(\omega) = \mathrm{M}\{e^{i\omega\zeta}\} = \mathrm{M}\{e^{i\omega(\xi+\eta)}\} = \mathrm{M}\{e^{i\omega\xi} \cdot e^{i\omega\eta}\} =$$

$$= \mathrm{M}\{e^{i\omega\xi}\} \cdot \mathrm{M}\{e^{i\omega\eta}\} = g_\xi(\omega) \cdot g_\eta(\omega).$$

Логарифмируя это выражение, получим

$$\psi_\zeta(\omega) = \psi_\xi(\omega) + \psi_\eta(\omega).$$

3. Выведем теперь формулу, дающую связь начальных моментов с характеристической функцией. Она имеет вид

$$m_k = \frac{1}{i^k} g_\xi^{(k)}(0).$$

Действительно, имеем

$$g_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p_\xi(x)dx, \qquad g_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1;$$

$$g_\xi'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{i\omega x} p_\xi(x)dx, \qquad g_\xi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} ixp_\xi(x)dx = im_1;$$

$$g_\xi''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^2 e^{i\omega x} p_\xi(x)dx, \qquad g_\xi''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^2 p_\xi(x)dx = i^2 m_2$$

Так как при каждом дифференцировании сомножителя $e^{i\omega x}$ по ω «выскакивает» сомножитель ix, то

$$g_\xi^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{i\omega x} p_\xi(x)dx, \qquad g_\xi^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k p_\xi(x)dx = i^k m_k.$$

Отсюда мы и получаем общую формулу

$$g_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k, \qquad m_k = \frac{1}{i^k} g_\xi^{(k)}(0).$$

Выведем еще две полезные формулы. Так как $\psi_\xi(\omega) = \ln g_\xi(\omega)$,

то $\psi'_\xi(\omega) = \dfrac{g'_\xi(\omega)}{g_\xi(\omega)}$, и поэтому

$$\psi'_\xi(0) = \frac{g'_\xi(0)}{g_\xi(0)} = \frac{im_1}{1} = im_1, \quad m_1 = \mathrm{M}\{\xi\} = \frac{1}{i}\psi'_\xi(0) .$$

Далее, $\psi''_\xi(\omega) = \dfrac{g''_\xi(\omega) g_\xi(\omega) - [g'_\xi(\omega)]^2}{g^2_\xi(\omega)}$,

и поэтому

$$\psi''_\xi(0) = \frac{g''_\xi(0) g_\xi(0) - [g'_\xi(0)]^2}{g^2_\xi(0)} = \frac{i^2 m_2 - (im_1)^2}{1} =$$

$$= i^2(m_2 - m_1^2) = -\left(\mathrm{M}\{\xi^2\} - \mathrm{M}^2\{\xi\}\right) = -\mathrm{D}\{\xi\},$$

так что $\mathrm{D}\{\xi\} = -\psi''_\xi(0)$.

Теорема. Пусть последовательность функций распределения $F_n(x)$ сходится к функции распределения $F(x)$ в каждой точке её непрерывности. Тогда последовательность соответствующих характеристических функций $g_n(\omega)$ сходится к характеристической функции $g(\omega)$, которая соответствует функции распределения $F(x)$.

Наоборот, если последовательность характеристических функций $g_n(\omega)$ сходится к характеристической функции $g(\omega)$, тогда последовательность соответствующих функций распределения $F_n(x)$ сходится к функции распределения $F(x)$, соответствующей характеристической функции $g(\omega)$.

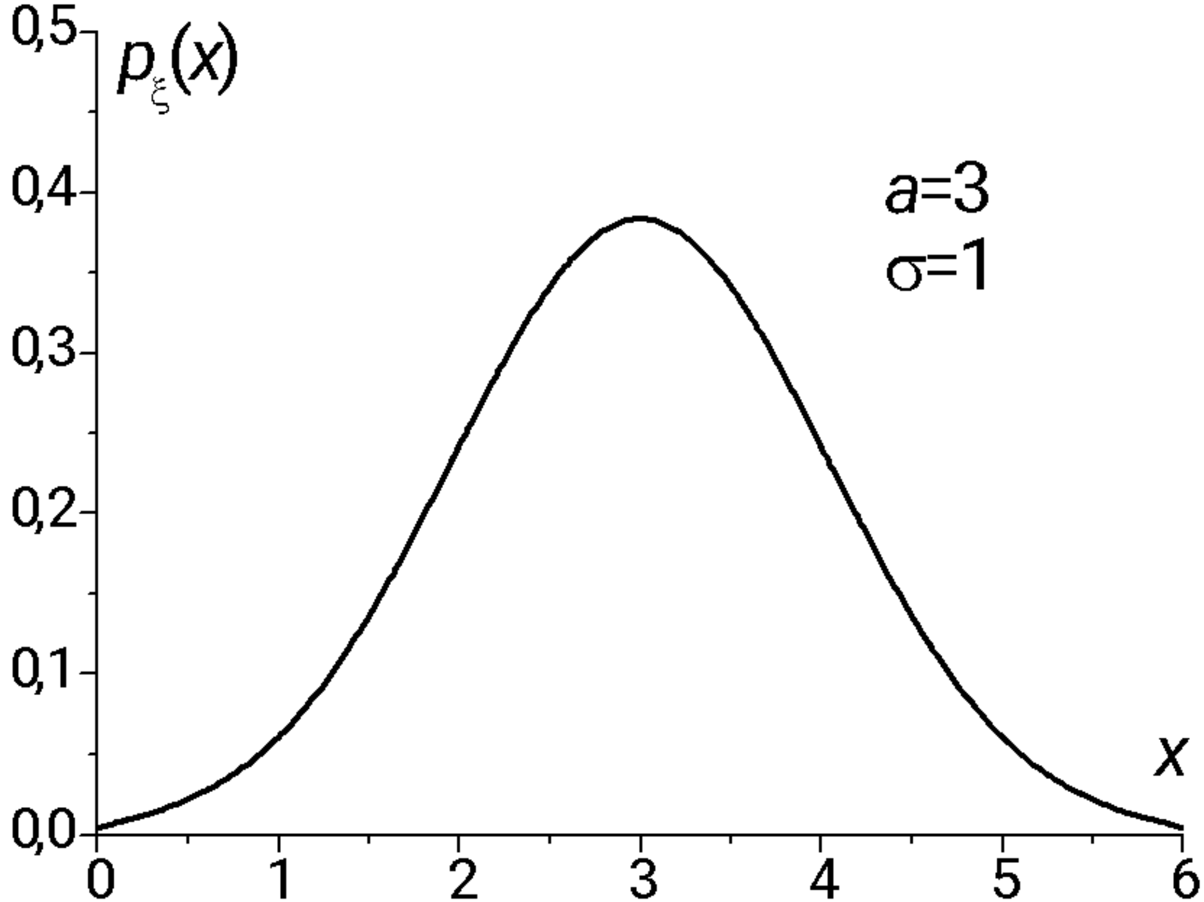
Нормальные случайные величины

Случайная величина ξ называется **нормальной** или **гауссовской** случайной величиной, если ее плотность вероятностей $p_\xi(x)$ имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Это часто записывают так: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Случайная величина $N(0,1)$ называется **стандартной** нормальной случайной величиной.

Вид графика $p_\xi(x)$ изображен на рис. Кривая имеет максимум в точке $x = a$ и симметрична относительно этой точки.



1. Характеристическая функция нормальной случайной величины имеет вид

$$g_\xi(\omega) = \mathrm{M}\{e^{i\omega\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{i\omega a - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

Кумулянтная функция $\psi_\xi(\omega) = \ln g_\xi(\omega) = i\omega a - \dfrac{\sigma^2\omega^2}{2}$.

2. Смысл параметров a и σ.

Для выяснения смысла параметра a найдём математическое ожидание величины ξ.

Имеем

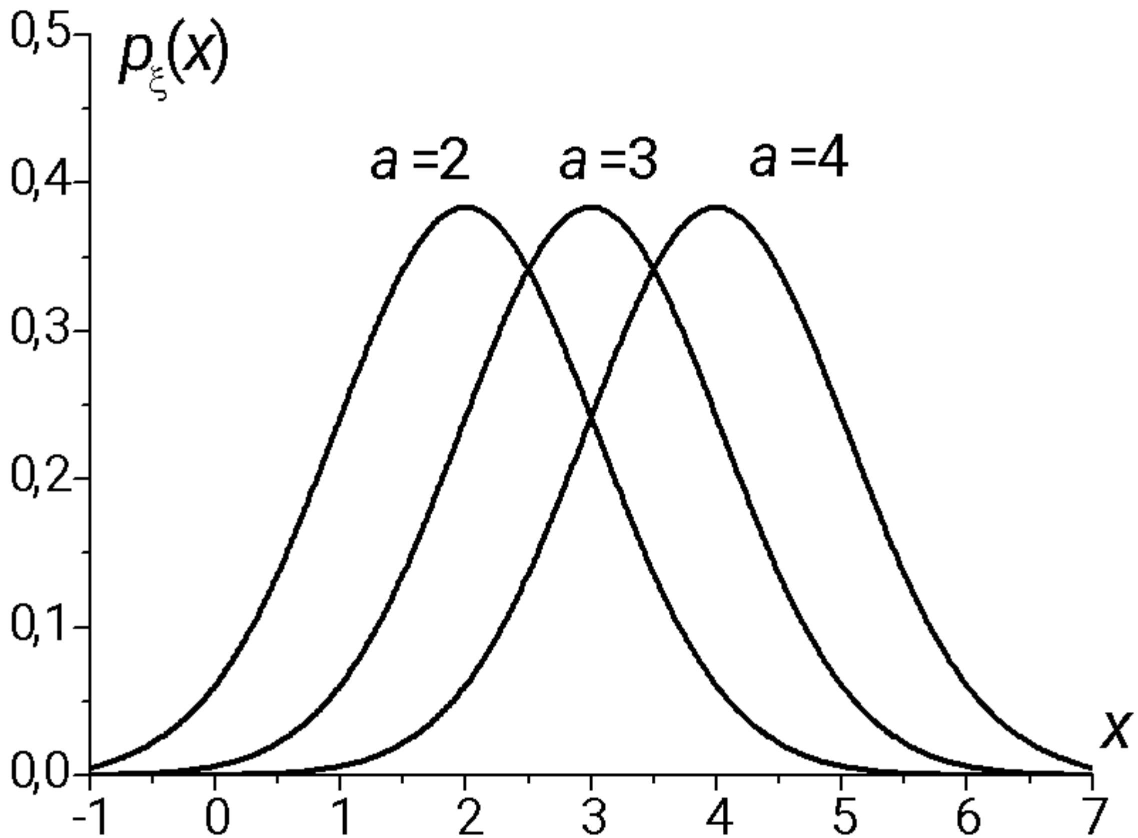
$$\psi'_\xi(\omega) = ia - \sigma^2\omega .$$

Поэтому

$$\mathrm{M}\{\xi\} = \frac{1}{i}\psi'_\xi(0) = a .$$

Таким образом, $a = \mathrm{M}\{\xi\}$.

При изменении параметра a при неизменном σ кривая, изображающая $p_\xi(x)$, сдвигается вдоль оси OX (см. рис.).



Далее

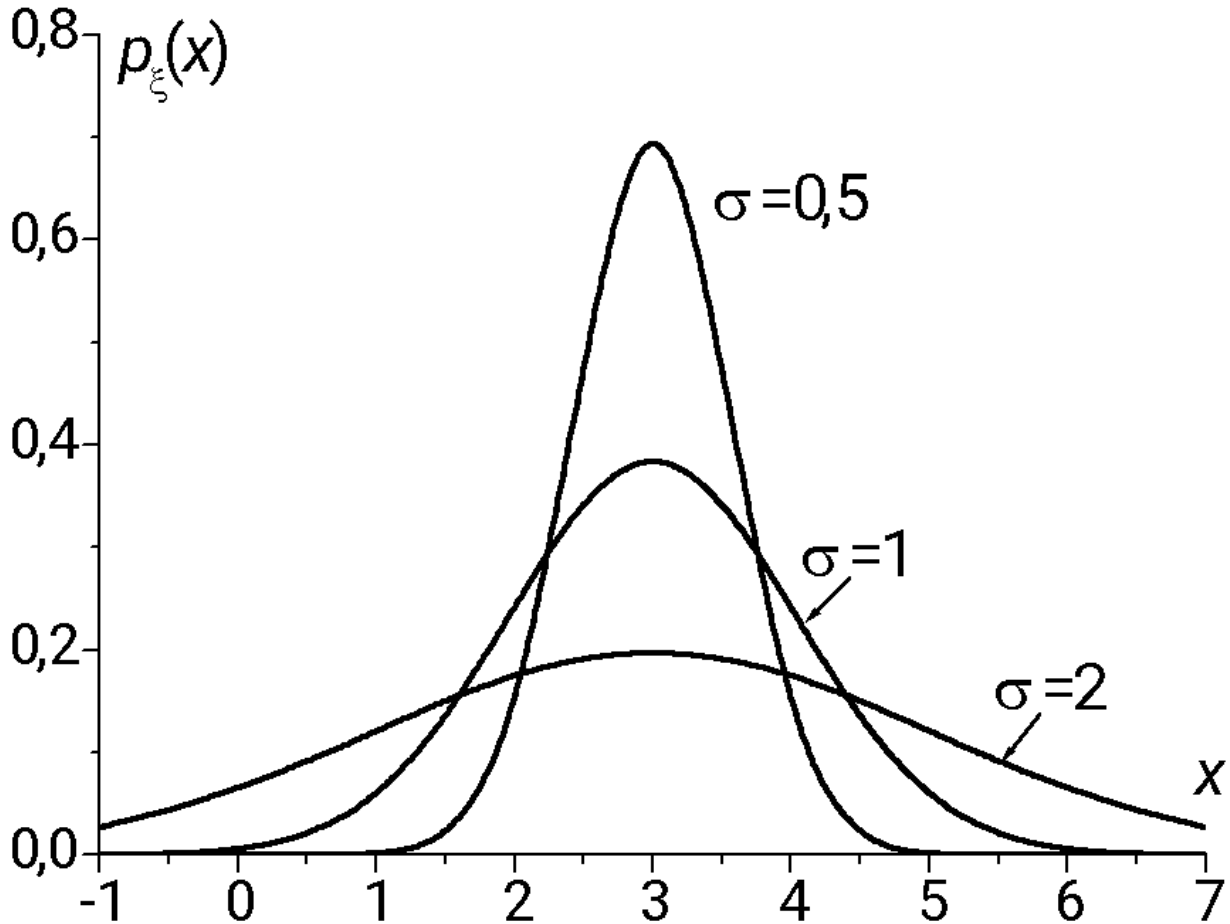
$$\psi_\xi''(\omega) = -\sigma^2$$

и поэтому

$$D\{\xi\} = -\psi_\xi''(0) = \sigma^2.$$

Таким образом, $\sigma^2 = D\{\xi\}$.

При изменении σ вид графика $p_\xi(x)$ изменяется так, как это изображено на рис.

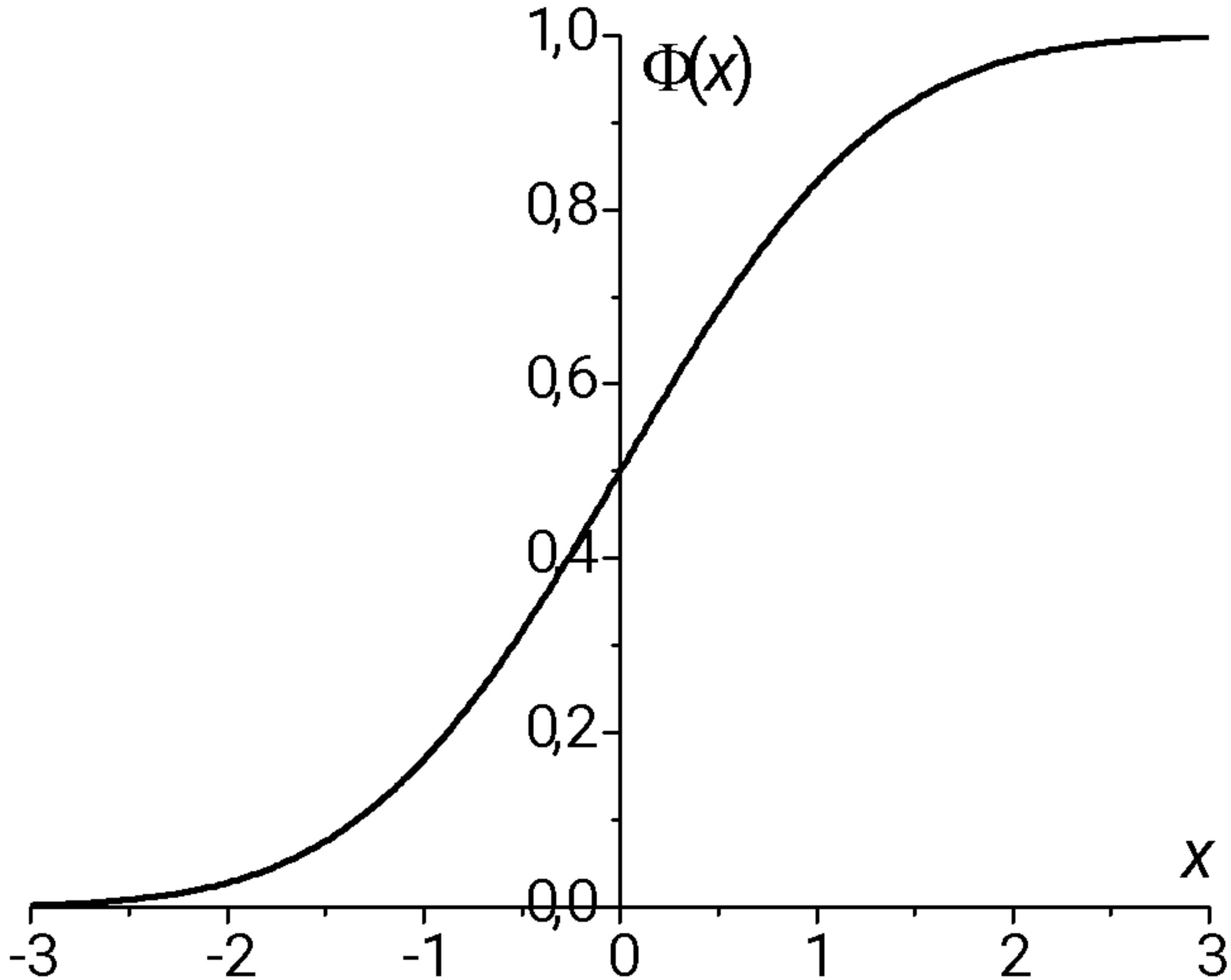


3. Функция распределения нормальной случайной величины.

Напомним, что

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

называется **интегралом вероятностей** или **функцией Лапласа**.


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
Φ(x)
x
-3
-2
-1
0
1
2
3

Её основное свойство $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ позволяет делать таблицы этой функции лишь для $x \geq 0$.

Теперь для функции распределения нормальной случайной величины получим

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Делая замену переменных $(u - a)/\sigma = t$, получим

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Отсюда, в частности, следует

$$P\{m_1 \le \xi < m_2\} = F_\xi(m_2) - F_\xi(m_1) = \Phi\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right).$$

Рассмотрим один частный случай, когда $m_1 = a - 3\sigma$ и $m_2 = a + 3\sigma$. Тогда

$$P\{a - 3\sigma \le \xi < a + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}997.$$

Эта вероятность настолько мало отличается от 1, что можно сказать, что событие $\{a - 3\sigma \le \xi < a + 3\sigma\}$ является событием **практически достоверным**, то есть практически достоверно то, что для нормальной случайной величины выполнится неравенство $|\xi - a| < 3\sigma$. Это правило так и называется – правило трех сигма.

4. Линейное преобразование нормальной случайной величины есть также нормальная случайная величина.

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то есть её кумулянтная функция есть

$$\psi_\xi(\omega) = ia\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}.$$

Пусть теперь $\eta = \alpha\xi + \beta$. Тогда, по свойствам кумулянтной функции,

$$\psi_\eta(\omega) = i\omega\beta + \psi_\xi(\alpha\omega) = i\omega\beta + i\alpha a\omega - \frac{\sigma^2\alpha^2\omega^2}{2} = i\omega(\alpha a + \beta) - \frac{(\sigma\alpha)^2\omega^2}{2}$$

,

откуда следует, что $\eta \sim N(a\alpha + \beta, (\sigma\alpha)^2)$.

5. Сумма двух независимых нормальных случайных величин есть также нормальная случайная величина.

Действительно, пусть $\xi \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ и ξ и η независимы. Тогда

$$\psi_1(\omega) = ia_1\omega - \frac{\sigma_1^2\omega^2}{2},$$

$$\psi_2(\omega) = ia_2\omega - \frac{\sigma_2^2\omega^2}{2}.$$

В силу независимости ξ и η, для случайной величины $\zeta = \xi + \eta$ имеем

$$\psi_\zeta(\omega) = \psi_\xi(\omega) + \psi_\eta(\omega) = i(a_1 + a_2)\omega - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2}{2},$$

откуда видно, что $\zeta \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

6. Дадим без вывода значения центральных моментов нормальной случайной величины. Так как $\mathrm{M}\{\xi\} = a$, то $\mu_k = \mathrm{M}\{(\xi - a)^k\}$. Тогда имеет место следующее:

$$\mu_{2n+1} = 0; \quad \mu_{2n} = (2n - 1)!!\sigma^{2n}.$$

В частности, $\mu_3 = 0$ и поэтому для нормальной случайной величины $Sk\{\xi\} = 0$. Далее, $\mu_4 = 3\sigma^4$ и поэтому

$$Ex\{\xi\} = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

В выражении для эксцесса слагаемое –3 как раз и подобрано из тех соображений, чтобы для нормальных случайных величин эксцесс был равен 0.

Геометрически и экспоненциально распределенные случайные величины

Будем говорить, что случайная величина ξ обладает **свойством отсутствия последствия**, если выполняется равенство

$$P\left\{\xi \geq x_0 + x \middle| \xi \geq x_0\right\} = P\left\{\xi \geq x\right\}.$$

Это свойство интерпретируется следующими примерами.

Пусть продолжительность работоспособности некоторого радиоэлектронного устройства является величиной случайной, обладающей указанным свойством, тогда остаточное время его работы не зависит от времени, в течение которого это устройство уже проработало.

Если бы продолжительность жизни человека, являясь величиной случайной, обладало бы этим свойством, то продолжительность дожития не зависела бы от текущего возраста человека.

Покажем, что этим свойством обладают случайные величины, распределенные по геометрическому и экспоненциальному законам.

Действительно, для случайной величины ξ, распределенной по геометрическому закону, имеем

$$P\{\xi \ge i_0 + i | \xi \ge i_0\} = \frac{P\{\xi \ge i_0 + i, \xi \ge i_0\}}{P\{\xi \ge i_0\}} = \frac{P\{\xi \ge i_0 + i\}}{P\{\xi \ge i_0\}} =$$

$$= \sum_{j=i_0+i}^{\infty} (1-\rho)\rho^{j} \Big/ \sum_{j=i_0}^{\infty} (1-\rho)\rho^{j} = \left\{(1-\rho)\frac{\rho^{i_0+i}}{1-\rho}\right\} \Big/ \left\{(1-\rho)\frac{\rho^{i_0}}{1-\rho}\right\} = \rho^{i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{j} = P\{\xi \ge i\}$$

Аналогично для случайной величины ξ, распределенной по экспоненциальному закону, получим

$$P\{\xi \ge x_0 + x | \xi \ge x_0\} = \frac{P\{\xi \ge x_0 + x, \xi \ge x_0\}}{P\{\xi \ge x_0\}} = \frac{P\{\xi \ge x_0 + x\}}{P\{\xi \ge x_0\}} =$$

$$= \int_{x_0+x}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\} dy \Big/ \int_{x_0}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\} dy = \frac{\exp\{-\lambda(x_0 + x)\}}{\exp\{-\lambda x_0\}} = \exp\{-\lambda x\} =$$

$$= \int_{x}^{\infty} \lambda \exp\{-\lambda y\} dy = P\{\xi \ge x\}$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, распределенные по геометрическому закону с параметрами соответственно ρ_1 и ρ_2, тогда случайная величина, определяемая равенством $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ также имеет геометрическое распределение с параметром $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$.

Действительно, можно записать

$$P\{\eta \geq i\} = P\{\min(\xi_1, \xi_2) \geq i\} = P\{\xi_1 \geq i, \xi_2 \geq i\} = P\{\xi_1 \geq i\} \cdot P\{\xi_2 \geq i\} =$$
$$= \rho_1^i \cdot \rho_2^i = (\rho_1 \cdot \rho_2)^i = \rho^i = \sum_{j=i}^{\infty}(1-\rho)\rho^j = 1 - F_1(i),$$

где $F_1(i)$– функция распределения случайной величины, распределенной по геометрическому закону с параметром ρ.

Для независимых случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону с параметрами соответственно λ_1 и λ_2, можно также утверждать, что случайная величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Действительно, можно записать

$$P\{\eta \ge x\} = P\{\min(\xi_1, \xi_2) \ge x\} = P\{\xi_1 \ge x, \xi_2 \ge x\} = P\{\xi_1 \ge x\} \cdot P\{\xi_2 \ge x\} =$$
$$= \exp\{-\lambda_1 x\} \cdot \exp\{-\lambda_2 x\} = \exp\left\{-\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)x\right\} = \exp\{-\lambda x\} = 1 - F_2(x),$$

где $F_2(x)$ – функция распределения случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ.

Условные математические ожидания. Формула полной вероятности для математических ожиданий

Понятие условного математического ожидания было использовано при определении кривых регрессий, уравнения которых имели вид

$$y = y(x) = M\{\eta \mid \xi = x\},$$

$$x = x(y) = M\{\xi \mid \eta = y\}.$$

Здесь условные математические ожидания являются детерминированными функциями детерминированных аргументов.

Введем понятие условного математического ожидания, которое позволит рассматривать условные математические ожидания как случайные величины, выведем формулу, аналогичную формуле полной вероятности.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, на котором определены все рассматриваемые случайные события и случайные величины.

Пусть B – некоторое случайное событие, тогда условной функцией распределения значений случайной величины ξ при условии, что наступило событие B, называется $F_{\xi}(x|B)=P\{\xi < x|B\}$.

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии, что наступило событие B, будем называть величину, определяемую равенством

$$M(\xi|B)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x|B).$$

Пусть H_i – полная группа попарно несовместных событий и A – некоторое случайное событие. Ранее была получена формула полной вероятности для случайного события A: $P(A)=\sum_i P\{A|H_i\}P(H_i)$.

Пусть случайное событие A имеет вид $A=\{\omega:\xi(\omega)<x\}$, тогда

$$F_\xi(x)=P\{\xi<x\}=P(A)=\sum_i P\{A|H_i\}P(H_i)=$$

$$=\sum_i P\{\xi<x|H_i\}P(H_i)=\sum_i F_\xi\{x|H_i\}P(H_i).$$

Равенство $F_\xi(x)=\sum_i F_\xi\{x|H_i\}P(H_i)$ будем называть **формулой полной вероятности для функций распределения.**

Применяя эту формулу, можно записать

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x d F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d \left\{\sum_i F_\xi\{x|H_i\}P(H_i)\right\} = \sum_i \left\{\int_{-\infty}^{\infty} x d F_\xi\{x|H_i\}\right\} P(H_i) = \sum_i M\{\xi|H_i\}P(H_i)$$

Равенство $M\xi = \sum_i M\{\xi|H_i\}P(H_i)$ будем называть **формулой полной вероятности для математических ожиданий.**

Пусть η – дискретная случайная величина, определяемая рядом распределения $\{y_i, p_i\}$.

Гипотезы H_i определим равенствами $H_i = \{\omega : \eta(\omega) = y_i\}$, тогда совокупность условных математических ожиданий $M\{\xi|H_i\}$ можно записать в виде

$$M\{\xi|H_i\} = M\{\xi|\eta = y_i\} = M\{\xi|\eta\}.$$

Здесь величина $M\{\xi|\eta\}$ принимает различные значения – $M\{\xi|\eta = y_i\}$ для различных значений случайной величины $\eta = y_i$, следовательно, являясь функцией величины η, сама является дискретной случайной величиной, определяемой рядом распределения $\{M\{\xi|\eta = y_i\}, p_i = P(\eta = y_i)\}$.

Формулу полной вероятности для математических ожиданий

$$M\xi = \sum_i M\{\xi | H_i\} P(H_i)$$

перепишем в виде $M\xi = \sum_i M\{\xi | \eta = y_i\} P(\eta = y_i)$.

Так как рассматриваемая сумма по определению является математическим ожиданием дискретной случайной величины $M\{\xi | \eta\}$, то формулу полной вероятности для математических ожиданий можно также записать в виде $M\xi = M_\eta\{M(\xi | \eta)\}$, где индексы η и ξ при символах M – математического ожидания – указывают на то распределение, по которому следует выполнять усреднение.