Энергетические характеристики

Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения $s(t)$:

$$p(t) = s^2(t)$$

Энергия сигнала на интервале t_2, t_1 определяется как интеграл от мгновенной мощности:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt$$

Отношение

$$\frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt = \overline{s^2(t)} = P_{cp}$$

имеет смысл средней на интервале t_2, t_1 мощности сигнала.

Разложение колебаний по системам ортогональных функций

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(t)$$

Если совокупность функций

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots \qquad (1.1)$$

удовлетворяет на некотором отрезке времени (t_1, t_2) условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0, \quad при \quad n \neq m \qquad (1.2)$$

то ее называют системой ортогональных на отрезке (t_1, t_2) функций. При этом предполагается, что никакая из функций системы (1.1) не равна тождественно нулю, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt \neq 0$$

Величина

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt} \qquad (1.3)$$

называется нормой функции $\varphi_n(t)$

Функция $\varphi_n(t)$, для которой $\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t)dt = 1$,

называется ***нормированной***, а соответствующая система ортогональных нормированных функций называется ***ортонормированной*** (***ортонормальной***)

.

Заданное колебание можно ***разложить по системе ортогональных функций***, если можно записать

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(t) , \qquad (1.4)$$

.

и при конечном числе членов ряда разница между (1.5)

$s(t)$ и $\sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(t)$ *будет* достаточна мала.

Одним из возможных критериев величины этой разности является интеграл от квадрата разности колебания и его разложения:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_n x_n \varphi_n(t) \right]^2 dt \tag{1.5}$$

Если для непрерывной функции $s(t)$ можно выбрать x_n так, что путем увеличения количества членов в ряде Δ можно сделать сколь угодно малым, то совокупность ортогональных (ортонормальных) функций (1.1) называют ***полной***. Ряд (1.4) называют в этом случае ***сходящимся в среднем***.

Для определения коэффициентов c_n, обеспечивающих минимум Δ, умножим обе части (1.4) на $\varphi_n(t)$ и произведем интегрирование:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\varphi_n(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\sum_m c_m\varphi_m(t)dt.$$

В силу свойств ортогональности в правой части уравнения все слагаемые при $m \neq n$ обращаются в ноль, остается лишь член, соответствующий $n=m$. В результате получаем формулу для любого коэффициента c_n

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n(t)\|^2}\int_{t_1}^{t_2} s(t)\varphi_n(t)dt \qquad (1.6)$$

Разложение периодических колебаний в ряд Фурье по системе тригонометрических функций

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}},$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, cos\frac{2\pi}{T}t, \qquad (1.7)$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, sin2\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\varphi_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, cos2\frac{2\pi}{T}t,$$

....

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{2\pi}{T}t+b_n\sin n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

или

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t+\theta_n\right), \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos n\omega_1 t dt;\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin n\omega_1 t dt;\\
A_n &= \sqrt{a_n^2+b_n^2};\\
\theta_n &= -arctg\, b_n/a_n .
\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Ряд Фурье в комплексной форме

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos\left(n\omega_1 t + \theta_n\right).$$

$$a_n = A_n \cos\theta_n, \qquad b_n = A_n \sin\theta_n$$

(1.10)

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \qquad \theta_n = -arctg\, b_n / a_n .$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Положим $\alpha = n\omega_1 t + \theta_n$ и обозначим

(1.11)

$$\dot{A}_n = A_n e^{i\theta_n}.$$

Эту величину назовем ***комплексной амплитудой n-й гармоники***.
Она содержит данные и об амплитуде и о начальной фазе *n-й* гармоники.

После этого ряд (1.8) можно записать в таком виде:

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{in\omega_1 t}, \tag{1.12}$$

где $\dot{A}_{-n} = A_n e^{-i\theta_n} = A_n^*$ - величина, комплексно-сопряжённая $\dot{A}_n$

Комплексную амплитуду $\dot{A}_n$ можно вычислить непосредственно по заданному $s(t)$, минуя вычисления a_n и b_n и применение выражений (1.10). Действительно,

$$\dot{A}_n = A_n e^{i\theta_n} = A_n\left(\cos\theta_n + i\sin\theta_n\right) = a_n - ib_n.$$

Подставляя сюда (1.9) и объединяя интегралы, получаем

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt. \tag{1.13}$$

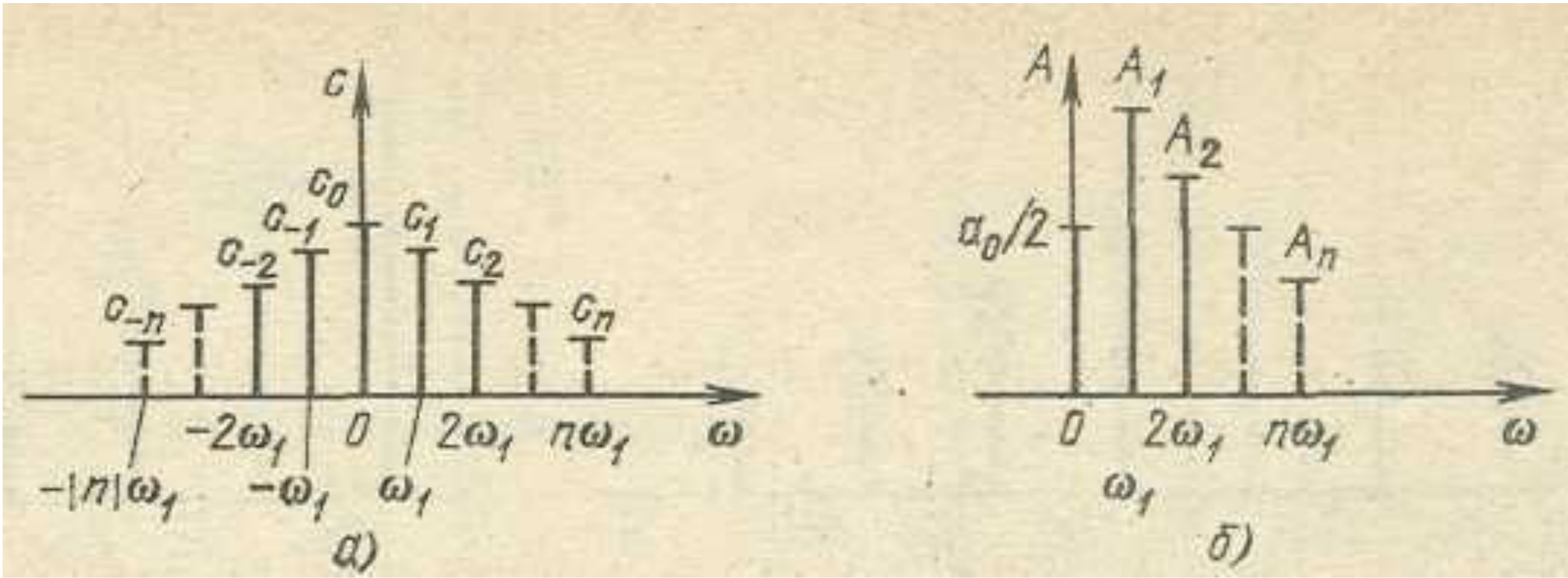
Формулы (1.12) и (1.13) можно называть ***парой преобразований Фурье***. Вторая из них позволяет найти ***спектр***, т. е. совокупность гармонических составляющих, образующих в сумме $s(t)$; первая – вычислить $s(t)$, если заданы гармонические составляющие (гармоники)

Формулу (1.12) можно представить в другом виде

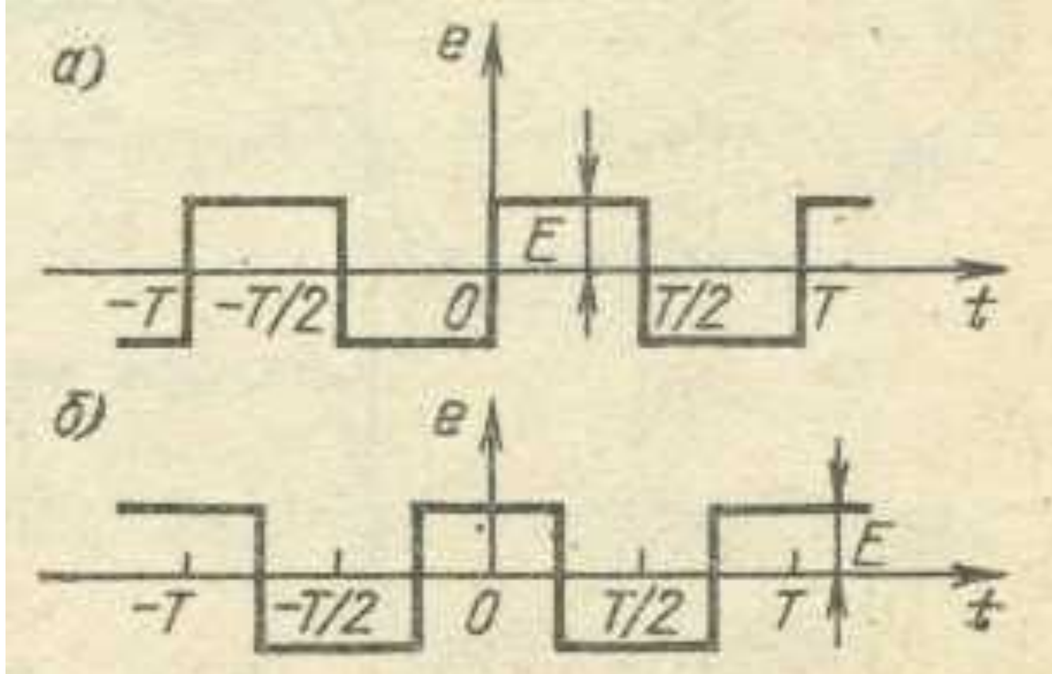
$$s(t) = \frac{A_0}{2} + Re\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n e^{in\omega_1 t}. \qquad (1.12а)$$

Две характеристики – амплитудная и фазовая, т. е. модули и аргументы комплексных коэффициентов ряда Фурье, полностью определяют структуру частотного спектра периодического колебания.

Спектр периодической функции называется ***линейчатым*** или ***дискретным***, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам 0, ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$ и т. д.



Коэффициенты комплексного (а) и тригонометрического (б) рядов Фурье периодической функции времени



$$e(t) = E \quad \text{при} \quad 2m\frac{T}{2} < t < (2m+1)\frac{T}{2};$$

$$e(t) = -E \quad \text{при} \quad (2m+1)\frac{T}{2} < t < 2(m+1)\frac{T}{2},$$

$$(m - \text{целое} \quad \text{число})$$

a)

(1.13):
$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} e(t)e^{-in\omega_1 t}dt = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{0}(-E)e^{-in\omega_1 t}dt + \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} Ee^{-in\omega_1 t}dt =$$

$$= -\frac{2E}{T}\frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1}\Bigg|_{=T/2}^{0} + \frac{2E}{T}\frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1}\Bigg|_{0}^{T/2} = \frac{2E}{in\pi}(1-\cos n\pi).$$

$$\dot{A}_1 = \frac{2E}{i\pi}(1+1) = \frac{4E}{\pi}e^{-i\pi/2} \qquad \left(-i = e^{-i\pi/2}\right).$$

$$\dot{A}_3 = \frac{2E}{i3\pi}(1+1) = \frac{4E}{3\pi}e^{-i\pi/2},$$

$$\dot{A}_5 = \frac{2E}{i5\pi}(1+1) = \frac{4E}{5\pi}e^{-i\pi/2},$$

....

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}cos\left(\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4E}{3\pi}cos\left(3\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4E}{5\pi}cos\left(5\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+...=$$

$$=\frac{4E}{\pi}\left(sin\omega_1 t+\frac{1}{3}sin3\omega_1 t+\frac{1}{5}sin5\omega_1 t+...\right) \tag{1.13}$$

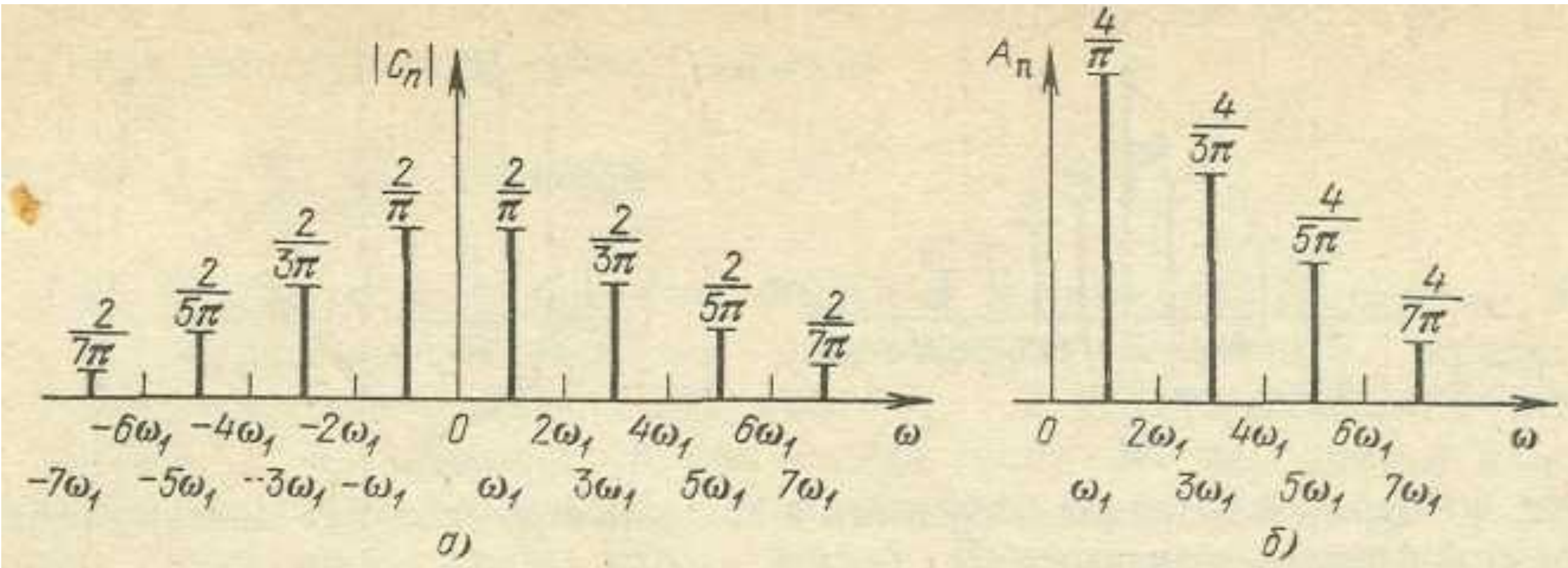
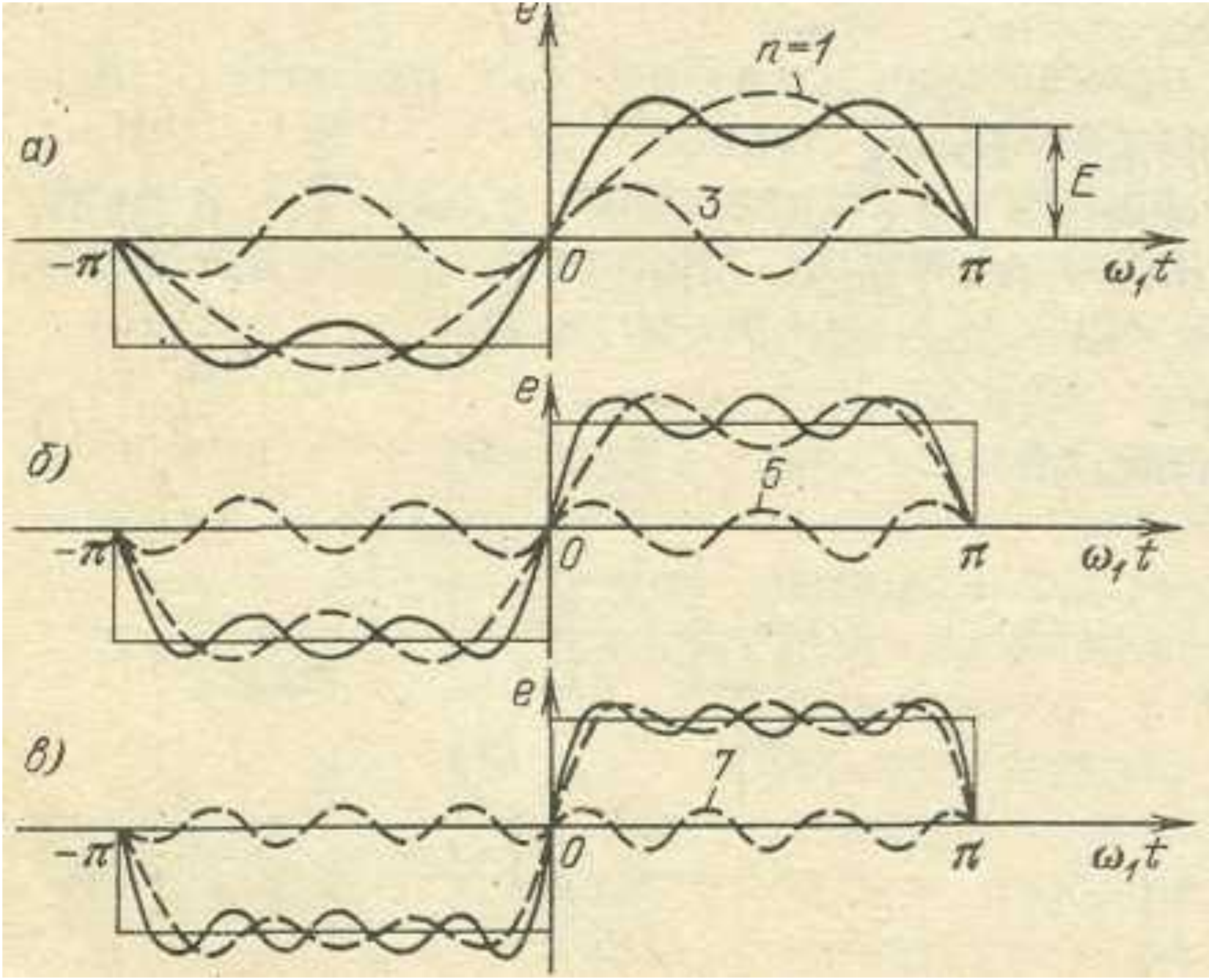
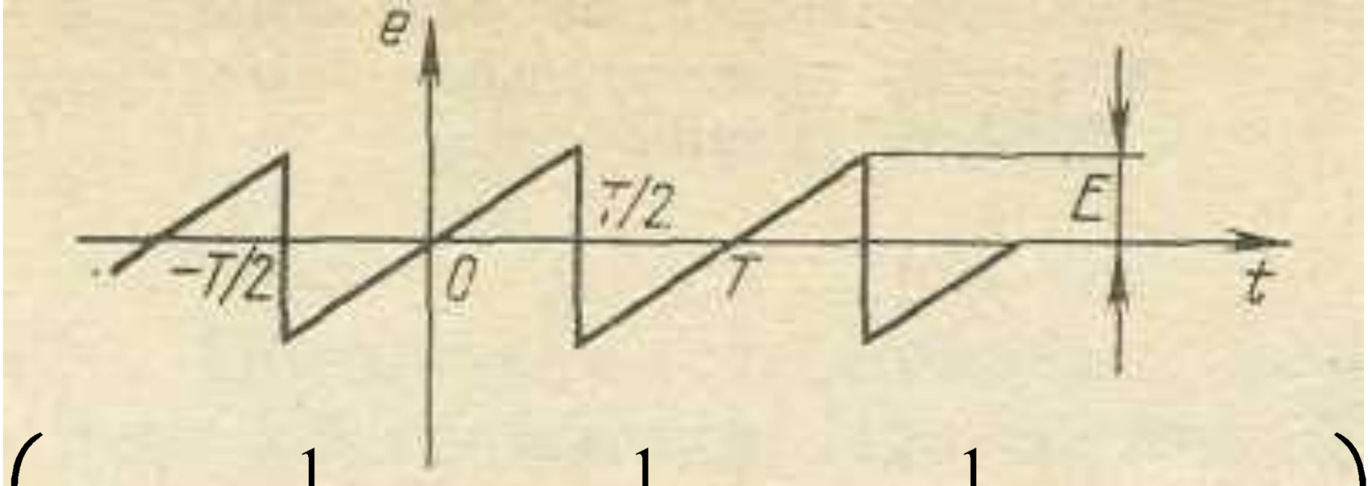


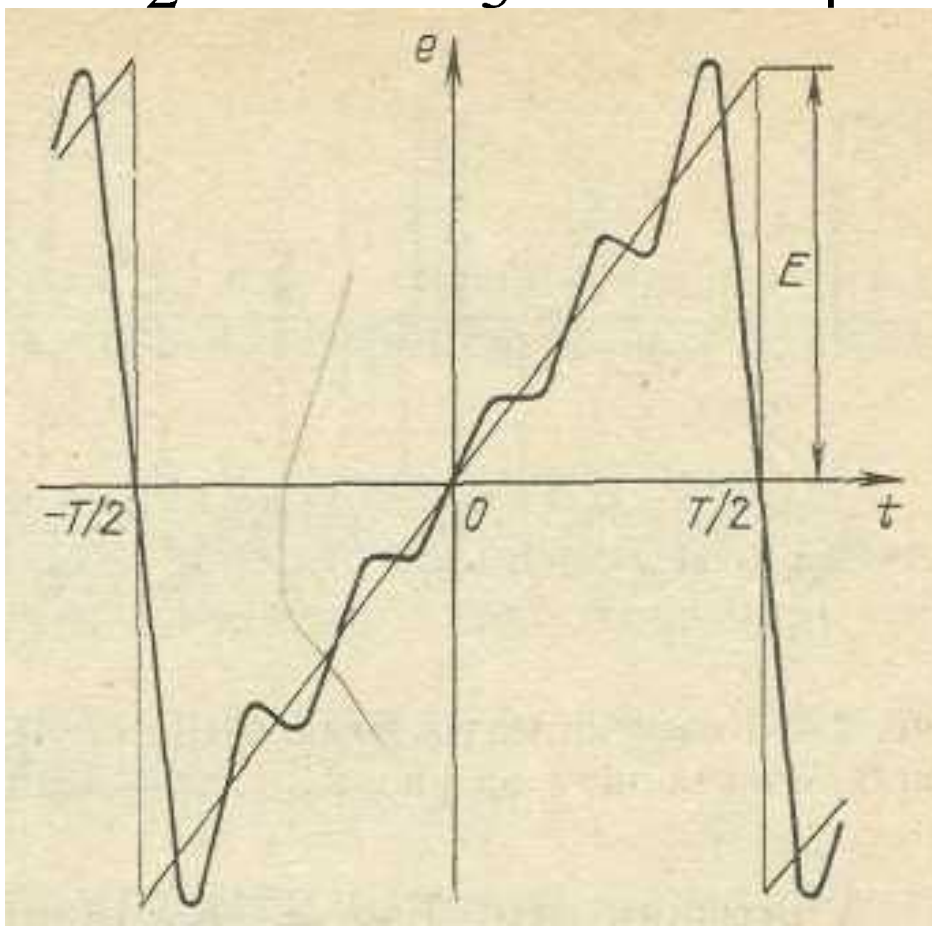
Рис. 3. Коэффициенты комплексного (*а*) и тригонометрического (*б*) ряда Фурье

б) $$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t - \dots\right) \qquad (1.14)$$

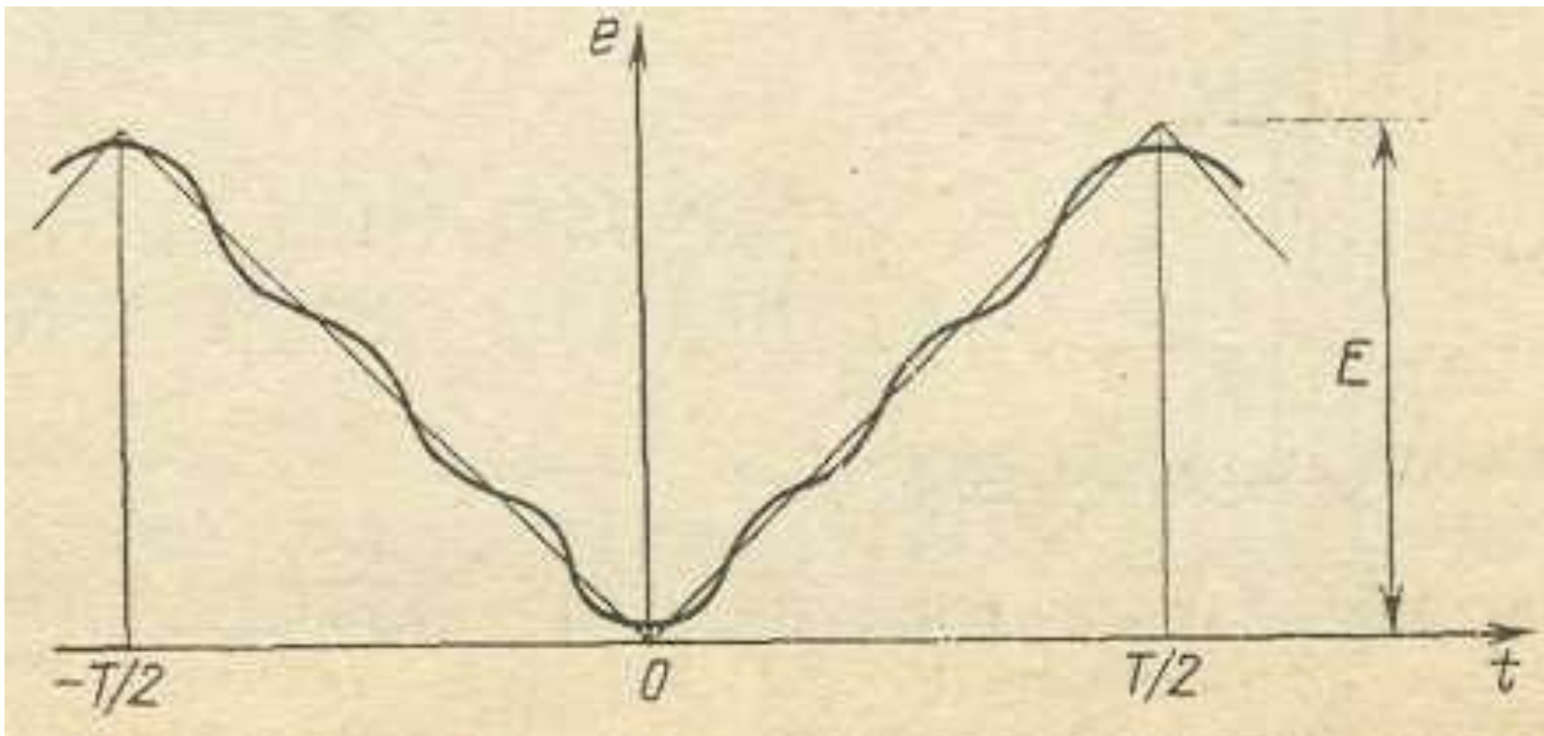


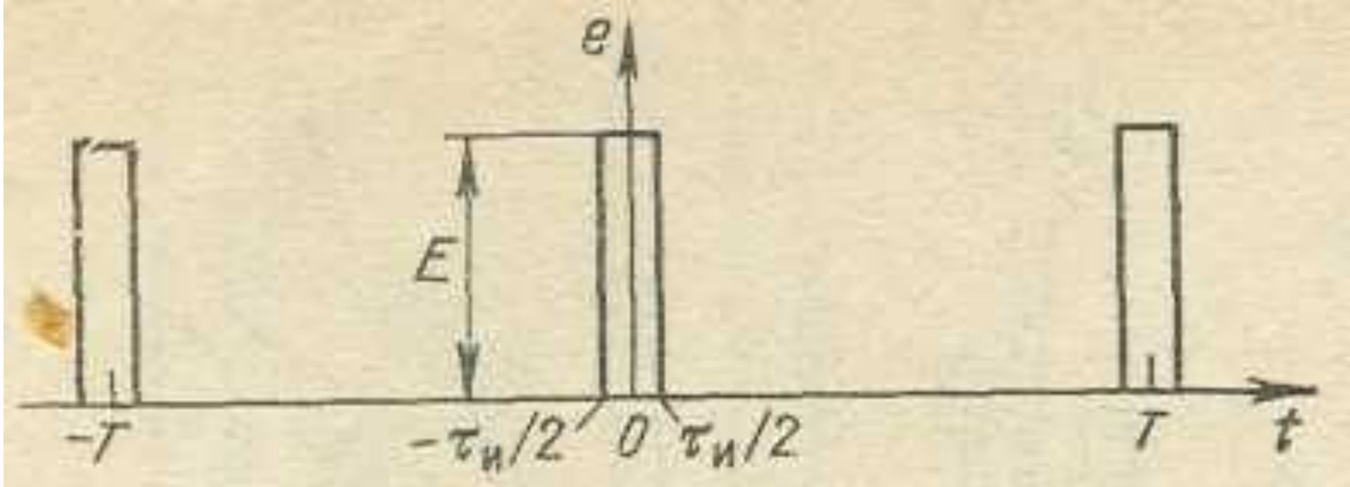


$$e(t)=\frac{2E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t-\frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t+\ldots\right) \tag{1.15}$$



$$e(t) = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_1 t + \ldots\right)\right] \qquad (1.16)$$

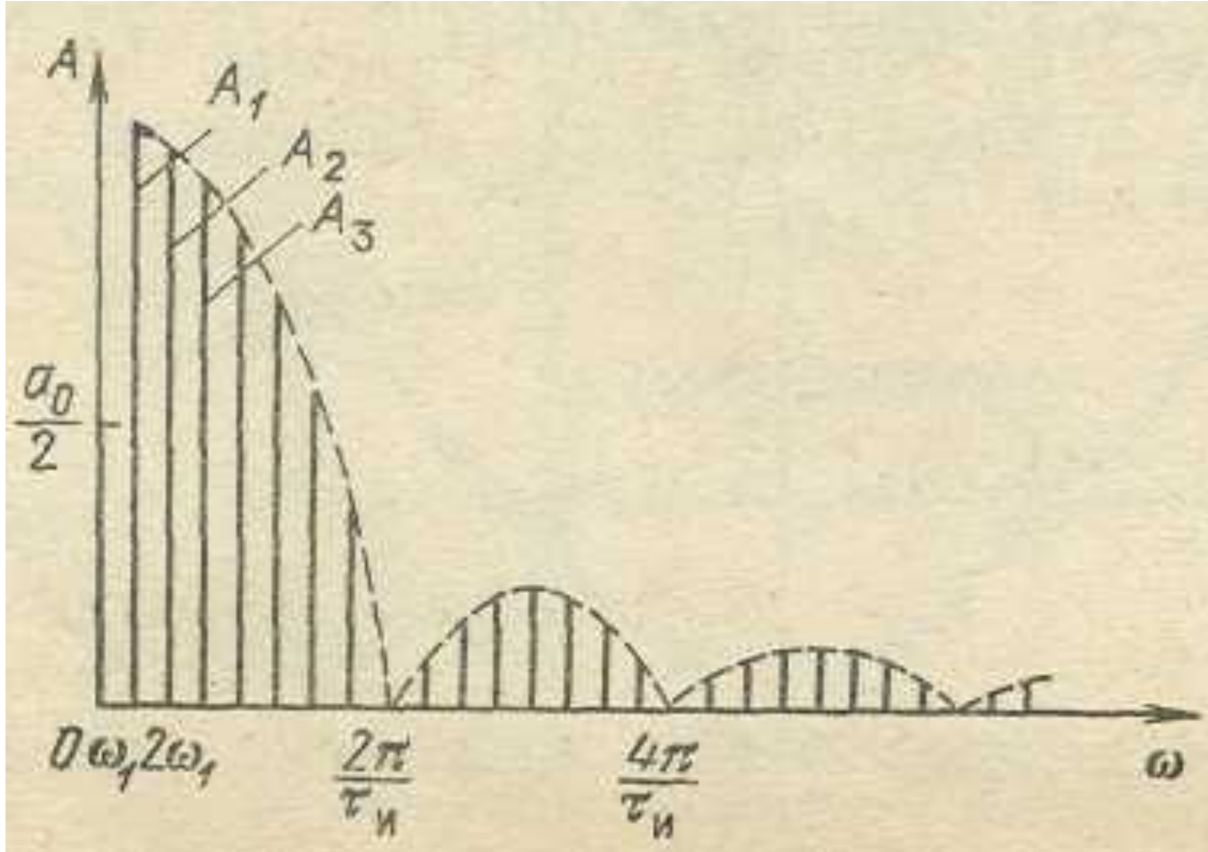




$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int\limits_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} e(t)dt = \frac{\tau_u}{T}E \tag{1.17}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} e(t)\cos n\omega_1 dt = \frac{2E}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1\tau_u}{2}. \tag{1.18}$$

$$e(t) = E\left(\frac{\tau_u}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\omega_1\tau_u}{2}\cos n\omega_1 t\right). \tag{1.19}$$



$$|a_n| = A_n = \frac{2E}{\pi n}\left|\sin\left(n\pi\frac{\tau_и}{T}\right)\right|. \qquad A_n \approx \frac{2E}{\pi n} n\pi\frac{\tau_и}{T} = E\frac{2\tau_и}{T}.$$

(1.20)

$$\overline{s^2(t)} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \qquad (1.21)$$

$$P = \overline{ri^2(t)} = r\left(I_0^2 + I_1^2/2 + I_2^2/2 + \ldots\right)$$