Некоторые свойства преобразования Фурье

Сдвиг сигналов во времени

$$s_2(t) = s_1(t - t_0),$$ от t_1+t_0 до t_2+t_0

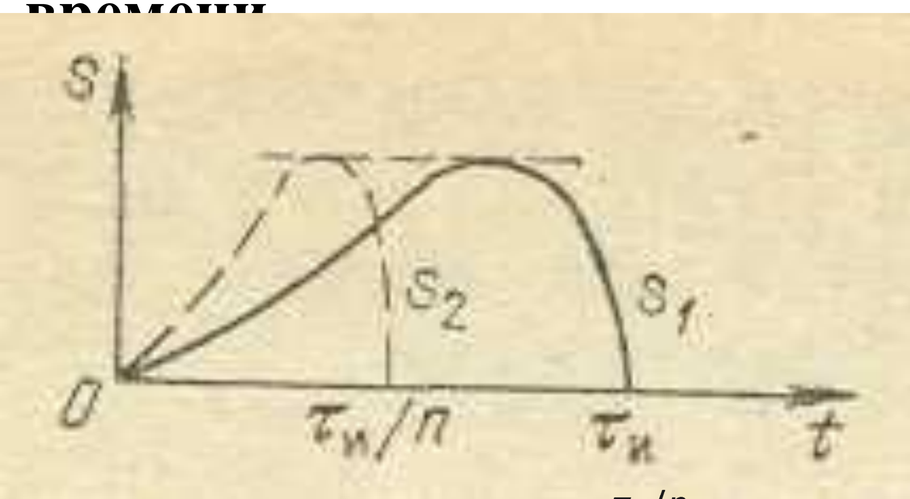
$$\dot{S}(\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t - t_0) e^{-i\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\tau=t-t_0$, получаем

$$\dot{S}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega t_0} \cdot S_1(\omega). \qquad (2.15)$$

Сдвиг во времени функции $s(t)$ на $\pm t_0$ приводит к изменению
фазовой характеристики спектра на величину $\pm\omega t_0$.

Изменение масштаба времени



$$s_2(t)=s_1(nt), \qquad n>1.$$

$$\dot{S}_2(\omega)=\int_0^{\tau_и/n} s_2(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{\tau_и/n} s_1(nt)e^{-i\omega t}dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\tau=nt$, получаем

$$\dot{S}_2(\omega)=\frac{1}{n}\int_0^{\tau_и} s_1(\tau)e^{-i\frac{\omega}{n}\tau}d\tau=(1/n)\dot{S}_1(\omega/n)$$

При сжатии сигнала в *n* раз на временной оси во столько же раз
расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной плотности при этом уменьшается в *n* раз.

Смещение спектра сигнала

Применим (2.6) к произведению $s(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\frac{1}{2}\left(e^{i(\omega_0 t+\theta_0)}+e^{-i(\omega_0 t+\theta_0)}\right)\right]e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{e^{i\theta_0}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt+\frac{e^{-i\theta_0}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}dt.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega_0 t+\theta_0)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2}\left[e^{i\theta_0}\dot{S}(\omega-\omega_0)+e^{-i\theta_0}\cdot\dot{S}(\omega+\omega_0)\right], \quad (2.16)$$

где $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Из выражения (2.16) вытекает, что расщепление спектра на две части, смещенные соответственно на $+\omega_0$ и $-\omega_0$ эквивалентно умножению функции $s(t)$ на гармоническое колебание $\cos\omega_0 t$ (при $\theta_0=0$).

Дифференцирование и интегрирование сигнала

$$s_1(t) \leftrightarrow \dot{S}_1(\omega), \quad s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega\,\dot{S}_1(\omega) = \dot{S}_2(\omega). \qquad (2.17)$$

*Производная функции $e^{i\omega t}$ равна
$i\omega e^{i\omega t}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = s_1(t) e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega S_1(\omega) = i\omega S_1(\omega).$$

Аналогичным образом можно показать, что сигналу

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(x)\,dx$$

соответствует спектральная плотность

$$S_2(\omega) = (1/i\omega)\,S_1(\omega). \qquad (2.18)$$

*Данная операция законна только для сигналов, отвечающих
условию $S(0) = 0$, т.е. для сигналов с нулевой площадью

Сложение сигналов

Так как преобразование Фурье является линейным, очевидно, что при сложении сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$,..., обладающих спектрами $\dot{S}_1(\omega)$, $\dot{S}_2(\omega)$, ... суммарному сигналу $s(t)=s_1(t)+s_2(t)+...$ соответствует спектр $\dot{S}(\omega)=\dot{S}_1(\omega)+\dot{S}_2(\omega)+\ldots$

Произведение двух сигналов

Пусть рассматриваемый сигнал $s(t)$ является произведением двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$.

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (2.19)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)e^{ixt}\,dx\right]e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega - x)t}\,dt\right]dx .$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(\omega - x)\,dx . \qquad (2.20)$$

В частном случае ω=0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(-x)\,dx .$$

Заменяя x на ω, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(\omega)\dot{F}(-\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(\omega)\dot{F}^{*}(\omega)\,d\omega . \qquad (2.21)$$

Здесь $\dot{F}^{*}(\omega) = \dot{F}(-\omega)$

Аналогично можно показать, что произведению двух спектров соответствует функция времени $s(t)$, являющаяся сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega)d\omega . \tag{2.22}$$

Последнее выражение особенно широко используется при анализе передачи сигналов через линейные цепи. В этом случае функции времени $f(t)$ и $g(t)$ имеют смысл соответственно входного сигнала и импульсной характеристики цепи, а $\dot{F}(\omega)$ и $\dot{G}(\omega)$ – спектральной плотности сигнала и передаточной функции цепи.

Взаимная заменяемость ω и t в преобразованиях Фурье

1. Если $s(t)$ есть функция, четная относительно t, то функция $\dot{S}(\omega)$ есть функция вещественная и четная относительно ω:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t\,dtdt - i\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t\,dt,$$

2. Если $s(t)$ нечетна относительно t, то $\dot{S}(\omega)$ нечетная и чисто
мнимая функция.

3. Если, наконец, $s(t)$ не является четной или нечетной функцией относительно t, то ее можно разложить на две функции: четную $s_1(t)$ и нечетную $s_2(t)$. При этом $\dot{S}(\omega)$ представляет комплексную
функцию, причем действительная её часть чётна, а мнимая нёчетна относительно ω.

Из п. 1 вытекает, что при четной функции $s(t)$ можно произвольно выбирать знак перед t в обратном преобразовании Фурье [см. (2.7)]:

выберем знак минус и запишем формулу (2.7) в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega .$$

Заменим переменную интегрирования ω на t и параметр t на ω.

Тогда левая часть должна быть записана в виде функции от аргумента ω

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi} S'(\omega).$$

$$\dot{S}'(\omega) = 2\pi s(\omega). \qquad (2.23)$$

Этот результат показывает, что переменные ω и t в преобразованиях Фурье ***взаимно заменимы***; если колебанию (четному) $s(t)$ соответствует спектр $\dot{S}(\omega)$, то колебанию $\dot{S}(t)$ соответствует спектр $2\pi s(\omega)$.

Распределение энергии в спектре непериодического сигнала

Из (2.21): если $f(t) = g(t) = s(t)$, то интеграл

$$\int_{=\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E$$

Кроме того,

$$\dot{G}(\omega)\dot{F}^*(\omega) = \dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega) = \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 = S^2(\omega),$$

Таким образом, в соответствии с (2.21)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \qquad (2.24)$$

Это соотношение, устанавливающее связь между энергией сигнала и модулем его спектральной плотности, известно под названием равенства Парсеваля.