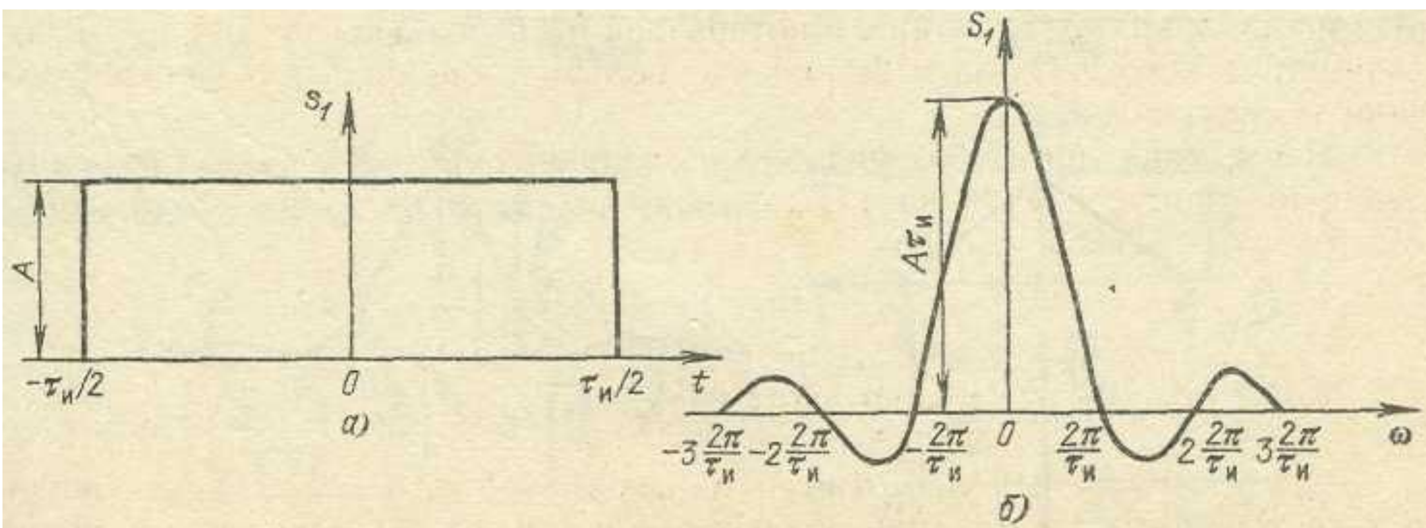
Примеры спектров непериодических сигналов

- **Прямоугольный импульс**

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & -\tau_u/2 \le t \le \tau_u/2, \\ 0, & t < -\tau_u/2 \quad u \quad t > \tau_u/2 \end{cases} \tag{2.25}$$

$$S(\omega) = A\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} e^{-i\omega t}dt = \frac{A}{-i\omega}\left(e^{-\frac{i\omega\tau_u}{2}} - e^{\frac{i\omega\tau_u}{2}}\right) = \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau_u}{2} = A\tau_u\left[\frac{\sin(\omega\tau_u/2)}{\omega\tau_u/2}\right]. \tag{2.26}$$



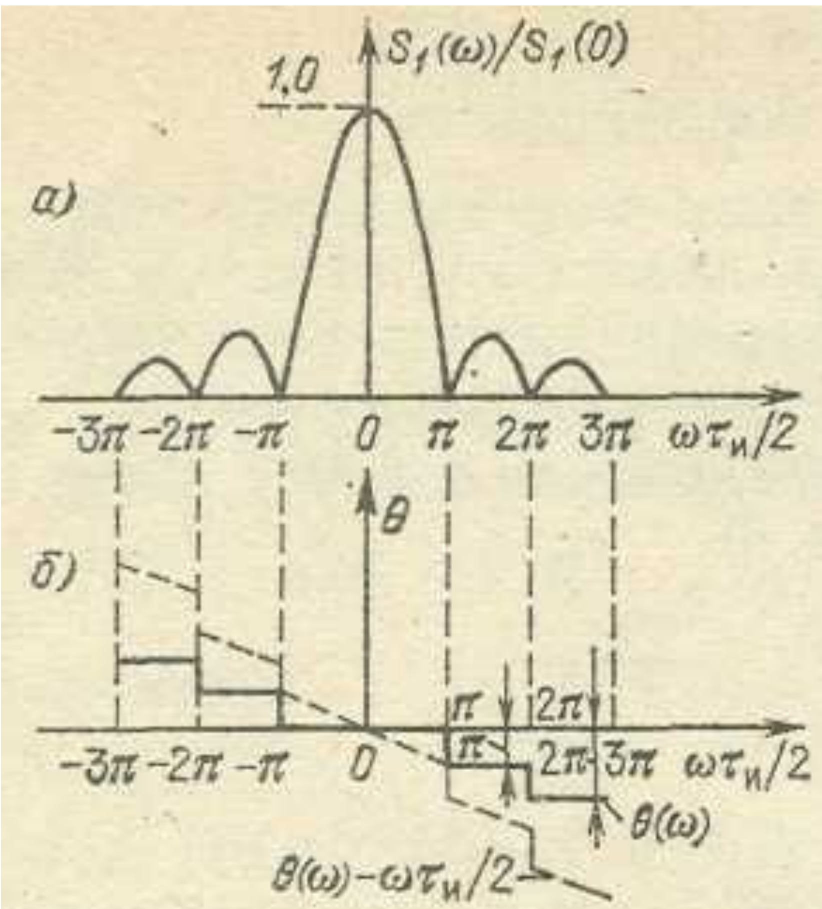
Прямоугольный импульс (*а*) и его спектральная плотность (*б*)

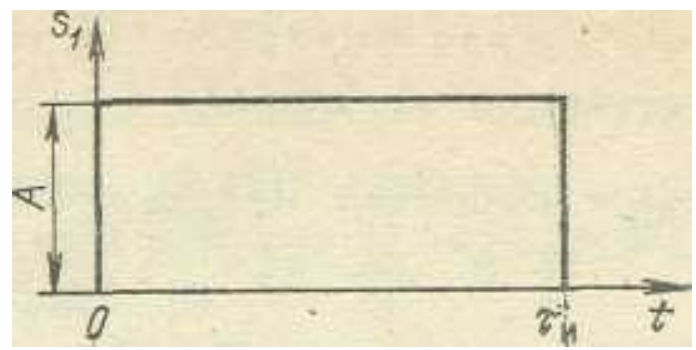
Заметим, что $S_1(0) = A\tau_и$ [см. (2.13)].

$$\dot{S}_1(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2} = S_1(0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_и}{2}\right). \qquad (2.27)$$

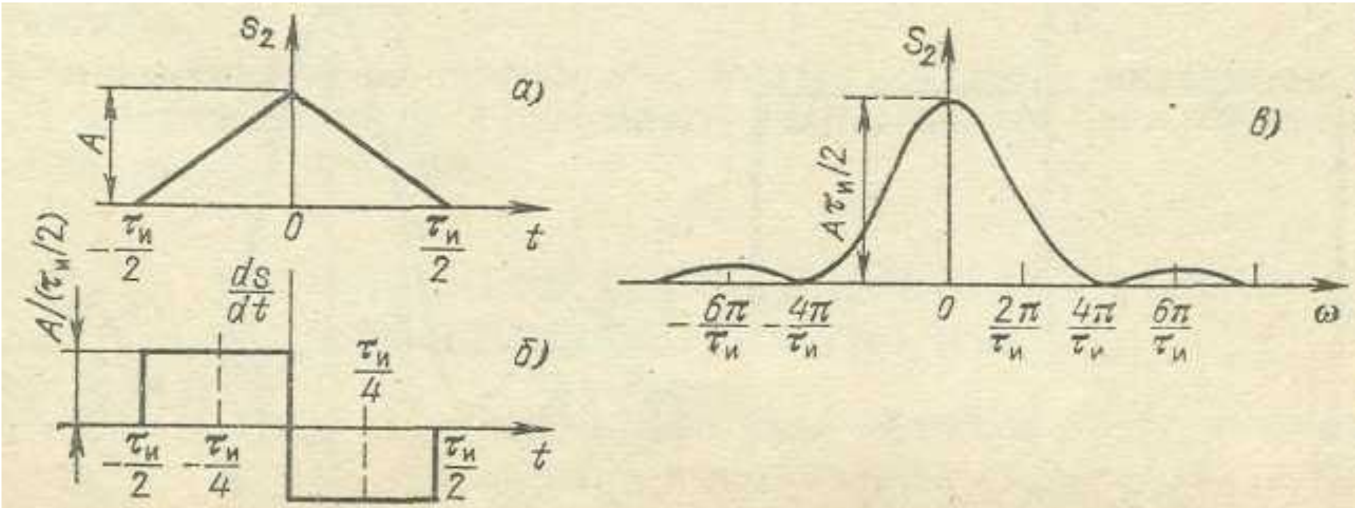
Здесь через $\mathrm{sinc}(\omega\tau_и/2)$ обозначена функция

$$\mathrm{sinc}(x) = (\sin x)/x. \qquad (2.28)$$





Треугольный импульс



$$s_2(t) = \begin{cases} A\left(\dfrac{t}{\tau_u/2}+1\right), & -\dfrac{\tau_u}{2} \le t \le 0, \\ A\left(1-\dfrac{t}{\tau_u/2}\right), & 0 \le t \le \dfrac{\tau_u}{2}. \end{cases} \qquad (2.29)$$

Спектральная плотность положительного прямоугольного импульса
длительностью по аналогии с формулой (2.26) и с учетом сдвига середины импульса на время $\tau_и/4$ относительно точки t=0

$$\frac{A}{\tau_и/2}\frac{\tau_и}{2}\frac{sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}e^{i\omega\tau_и/4} = A\frac{sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}e^{i\omega\tau_и/4}.$$

Спектральная плотность отрицательного импульса

$$-A\frac{sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}e^{-i\omega\tau_и/4}.$$

Суммарная спектральная плотность двух импульсов

$$A\frac{sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}\left(e^{i\omega\tau_и/4}-e^{-i\omega\tau_и/4}\right)=i2A\frac{sin^2(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}. \qquad (2.30)$$

Спектральная плотность треугольного импульса [интеграл от $s'_2(t)$]

$$S_2(\omega)=\frac{2A}{\omega}\frac{sin^2(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}=\frac{A\tau_и}{2}\left(\frac{sin\,\omega\tau_и/4}{\omega\tau_и/4}\right)^2. \qquad (2.31)$$

Множитель $A\tau_и/2=S_2(0)$ – площадь треугольного импульса.

Колоколообразный (гауссовский) импульс

$$s_3(t) = Ae^{-t^2/2a^2}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{2.32}$$

$$\dot{S}_3(\omega) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2a^2} e^{-i\omega t}\,dt. \tag{2.33}$$

Дополним показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + i\omega t\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + i\omega t + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2 - d^2\right]$$

где d определяется из условия

$$i\omega t = 2\left(t/\sqrt{2}a\right)d \text{ , откуда } \quad d = i\omega a/\sqrt{2} \tag{2.34}$$

Таким образом, (2.33) можно привести к виду

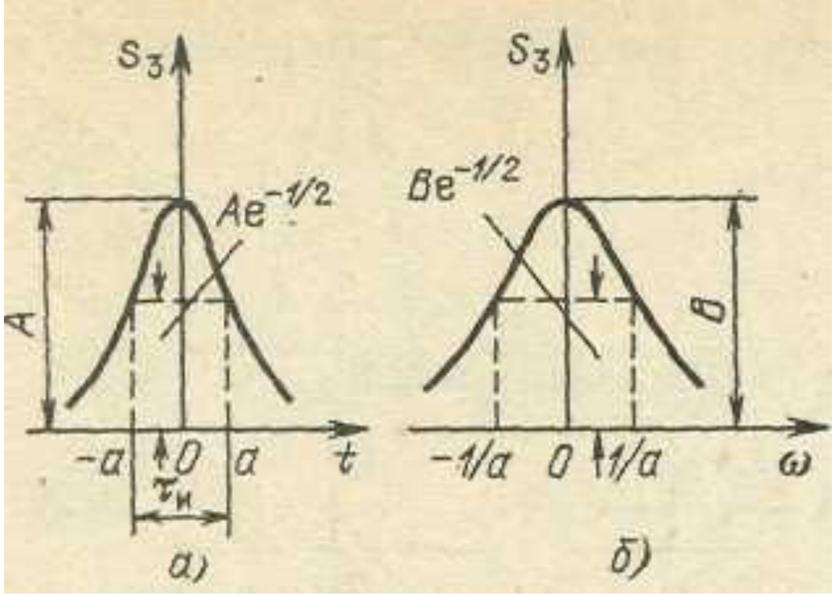
$$\dot{S}_3(\omega) = Ae^{d^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t/\sqrt{2}a+d^2\right)}dt.$$

Переходя к новой переменной $x = \left(t/\sqrt{2}a\right) + d$, получаем

$$\dot{S}_3(\omega) = Ae^{d^2}\sqrt{2}a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Учитывая, что входящий в это выражение интеграл равен $\sqrt{\pi}$
,
окончательно получаем

$$\dot{S}_3(\omega) = A\sqrt{2\pi}ae^{-a^2\omega^2/2} = Be^{-\omega^2/2b^2}, \qquad b = 1/a; \quad B = \sqrt{2\pi}aA. \quad (2.35)$$



Колоколообразный (гауссовский) импульс (*а*) и его спектральная плотность (*б*)

Гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно заменить t на ω или наоборот.

Полоса, определяемая на уровне $e^{-1/2}$ от максимального значения,
равна $2b=2/a=2\cdot 2\tau_и=4/\tau_и$, а коэффициент $B=\sqrt{2\pi}\,aA$

Гауссовскому спектру

$$\dot{S}_3(\omega)=Be^{-\omega^2/2b^2} \tag{2.36}$$

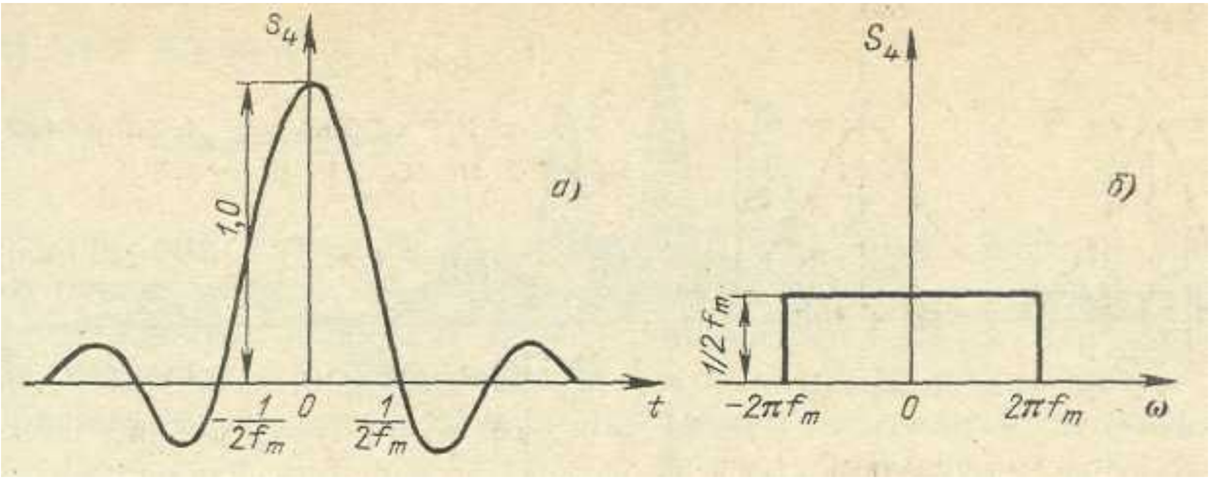
соответствует гауссовский импульс

$$s_3(t)=Ae^{-b^2t^2/2}=\frac{Bb}{\sqrt{2\pi}}e^{-b^2t^2/2} \tag{2.37}$$

с длительностью $2/b$ и амплитудой $A=Bb/\sqrt{2\pi}$.

Импульс вида SINC(x)

$$s_4(t) = \sin c(\omega_m t) = \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} = \frac{\sin 2\pi f_m t}{2\pi f_m t}. \qquad (2.38)$$



$$S_4(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) dt = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} dt = \frac{A}{\omega_m}\int_{-x}^{x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{A}{\omega_m}\pi = \frac{A}{2 f_m}. \qquad (2.39)$$

$$S_4(\omega) = \begin{cases} A/2 f_m, & |\omega| \le \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases} \qquad (2.40)$$

Бесконечно короткий импульс с единичной площадью (дельта-функция)

Амплитуды импульсов обратно пропорциональны соответствующим образом определенной длительности. При стремлении длительности к нулю амплитуда обращается в бесконечность, а площадь импульса остается неизменной и равной единице.

Амплитуду прямоугольного импульса - $1/x_1$, где x_1 – длительность импульса.

При гауссовском импульсе амплитуда должна быть $1/\sqrt{2\pi}\,a$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2}dx = \sqrt{2\pi}\,a.$$

Для импульса $sin(2\pi f_m x)/\pi x$, площадь которого равна единице, амплитуда равна $2f_m$ (при x=0). Длительность импульса (главного лепестка) обратно пропорциональна параметру f_m.

При устремлении параметров x_1 и a к нулю, а f_m к бесконечности

все три функции можно определить следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \qquad (2.43)$$

при одновременном условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \textit{площадь импульса} = 1. \qquad (2.44)$$

Функция $\delta(x)$, обладающая указанными свойствами, называется единичным импульсом, импульсной функцией или дельта-функцией (а также функцией Дирака).

Применительно к исходным функциям, дельта-функция должна быть определена выражениями

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} e^{-x^2/2a^2}, \quad \delta(x) = \lim_{f_m \to \infty} \left[\sin(2\pi f_m x)/\pi x\right].$$

При сдвиге импульса по оси x на величину x_0

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, dx = 1 \tag{2.46}$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} \exp\left[-(x - x_0)^2/2a^2\right] \tag{2.47}$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{f_m \to \infty} \frac{\sin 2\pi f_m (x - x_0)}{\pi (x - x_0)} \tag{2.48}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \qquad (2.49)$$

В математике соотношение (2.49) называется ***фильтрующим*** (***стробирующим***) свойством дельта-функции.

Свойства функции δ(*x*)

Спектральная плотность дельта-функции вещественна и равна единице для всех частот. Из этого также вытекает, что ФЧХ спектра дельта-функции $\delta(x)$ равна нулю для всех частот. Это означает, что все гармонические составляющие единичного импульса при нулевых начальных фазах, суммируясь, образуют пик бесконечно большой величины, в момент времени $t=0$.

Аналогично функция $\delta(t-t_0)$ имеет спектральную плотность

$$\dot{S}(\omega) = e^{-i\omega t_0}$$

Спектральная плотность дельта-функции может быть получена и с помощью преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt.$$

Используя свойство (2.49), находим

$$\dot{S}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-i\omega t_0}. \qquad (2.50)$$

Правая часть равенства $S(\omega)=1$ является ***размерной единицей***: это площадь импульса, численно равная единице. Если под $\delta(t_0)$ подразумевается импульс напряжения, то размерность $S(\omega)$ есть вольт·секунда ($B \cdot c$).

$\delta(t - t_0)$ представить в виде обратного преобразования Фурье

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega (t - t_0)} d\omega. \qquad (2.51)$$

Энергия единичного импульса бесконечно велика. При спектральном
рассмотрении это вытекает из равенства Парсеваля [см. (2.24)], правая часть которого при $S(\omega)=1$ обращается в бесконечность.

Рассмотрим теперь свойства $\delta(\omega)$.
Все, что ранее было сказано относительно $\delta(t)$, справедливо и для $\delta(\omega)$ при замене t на ω и ω на t. По аналогии с выражением (2.51) можем написать

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\,dt. \qquad (2.52)$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t}\,dt. \qquad (2.53)$$