Соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра. Скорость убывания спектра

Определение произведения (полоса)×(длительность): *метод моментов*

$$T_{эф}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s^2(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt\,,$$

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t s^2(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt\,.$$

$$\Omega_{эф}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)\,d\omega \Big/ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega\,.$$

Если
$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)d\omega = 1,$$

то
$$T_{эф}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t)dt, \qquad \Omega_{эф}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)d\omega.$$

$$T_{эф}\Omega_{эф} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_2(\omega)d\omega\right]^{1/2}.$$

$T_{эф}$ и $\Omega_{эф}$ являются среднеквадратическими отклонениями соответственно от $t=t_0$ и $\omega=0$. Поэтому полную длительность сигнала следует приравнять $2T_{эф}$, а полную ширину спектра (включая и область отрицательных частот) – величине $2\Omega_{эф}$.

Наименьшее возможное значение $T_{эф}\Omega_{эф}=1/2$ соответствует колоколообразному импульсу.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{sin^2(\omega\tau_u/2)}{(\omega/2)^2} d\omega = 4\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\,\omega\tau_u\right) d\omega \to \infty.$$

Энергия, содержащаяся в полосе Δf от ω=0 до некоторой граничной частоты $\omega_{гр}=2\pi f_{гр}$

$$E_{\Delta f}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{гр}}S^2(\omega)d\omega.$$

Введё
м

$$\eta\left(f_{гр}\tau_u\right)=E_{\Delta f}/E$$

Для прямоугольного импульса в соответствии с (2.26)

$$\eta=\frac{2}{\pi}\left[si\left(2\pi f_{гр}\tau_u\right)-\frac{sin^2\left(\pi f_{гр}\tau_u\right)}{\pi f_{гр}\tau_u}\right],$$

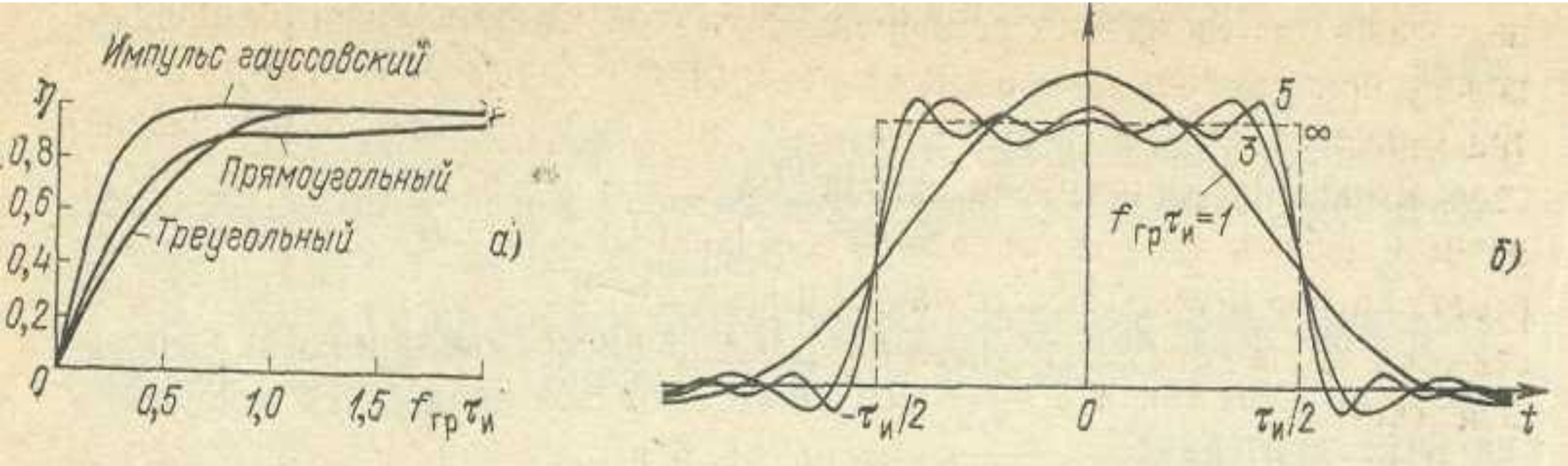
где $si(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}dx$

Для треугольного импульса

$$\eta=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi f_{гр}\tau_u}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx$$

Для гауссовского импульса

$$\eta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi f_{гр}\tau_u}e^{x^2}dx=\Phi\left(\pi f_{гр}\tau_u\right)$$



Импульс гауссовский
η
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Прямоугольный
Треугольный
а)
0,5
1,0
1,5
$f_{гр}\tau_и$
5
∞
3
$f_{гр}\tau_и=1$
б)
$-\tau_и/2$
0
$\tau_и/2$
t

Скорость убывания спектра вне основной полосы

Вне основной полосы частотный спектр убывает по закону $1/\omega^{n+1}$, где n порядок производной, при которой происходит первый разрыв.