Модулированные колебания

$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t), \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{T_0}{A} = \left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A}\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0}\left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A} << 1 \qquad \text{или} \qquad \left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A} << \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{3.2}$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta}{dt}.$$

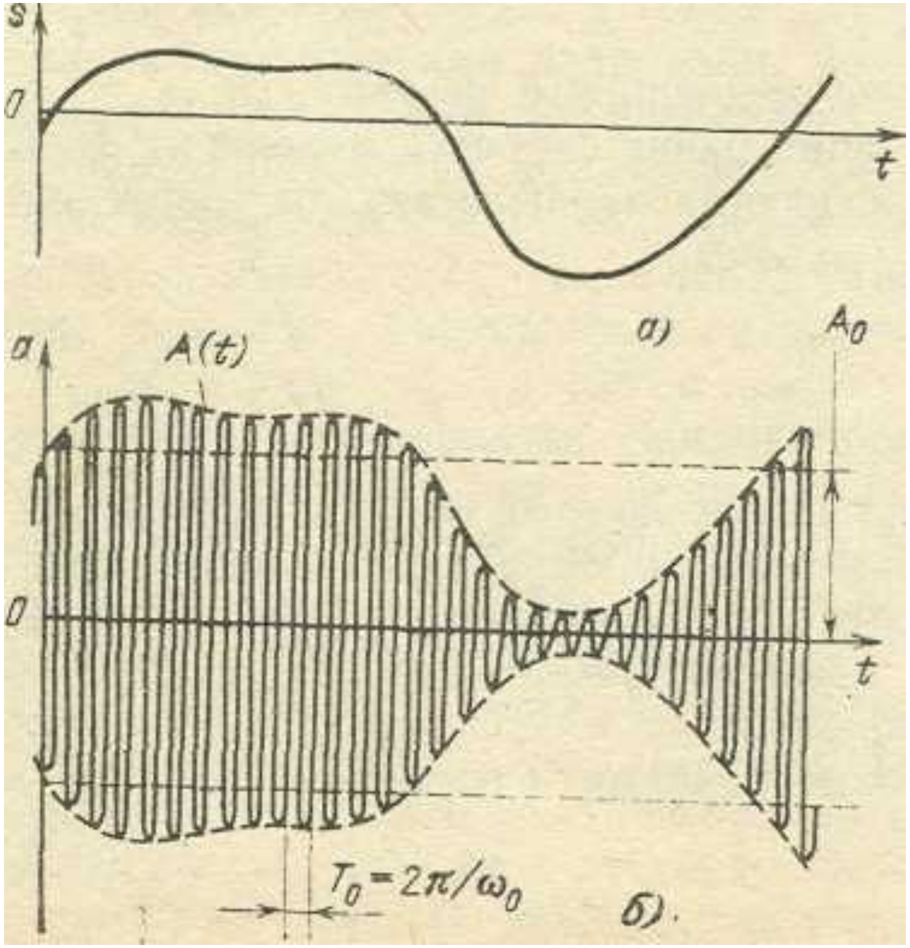
$$\frac{\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right| T}{\omega(t)} << 1 \qquad \text{или} \qquad \left|\frac{d^2\theta}{dt^2}\right| << \frac{\omega(t)}{T}$$

Так как обычно $\omega(t)$ очень мало отличается от ω_0, можно считать $T \approx 2\pi/\omega_0$ и исходить из условия

$$\left|\frac{d^2\theta}{dt^2}\right| << \frac{1}{2\pi}\omega_0^2. \qquad (3.3)$$

Сигналы с амплитудной модуляцией

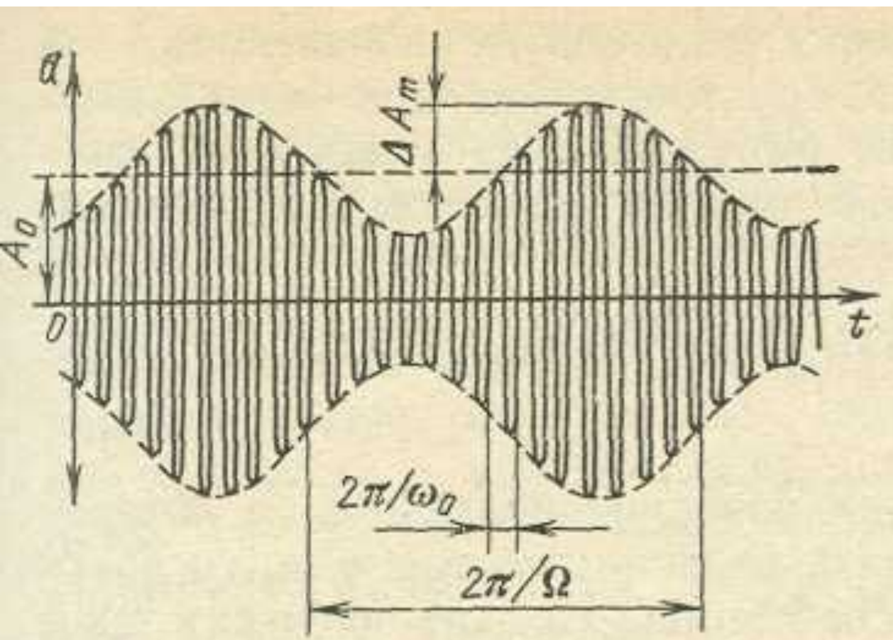
$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta_0]. \qquad (3.4)$$

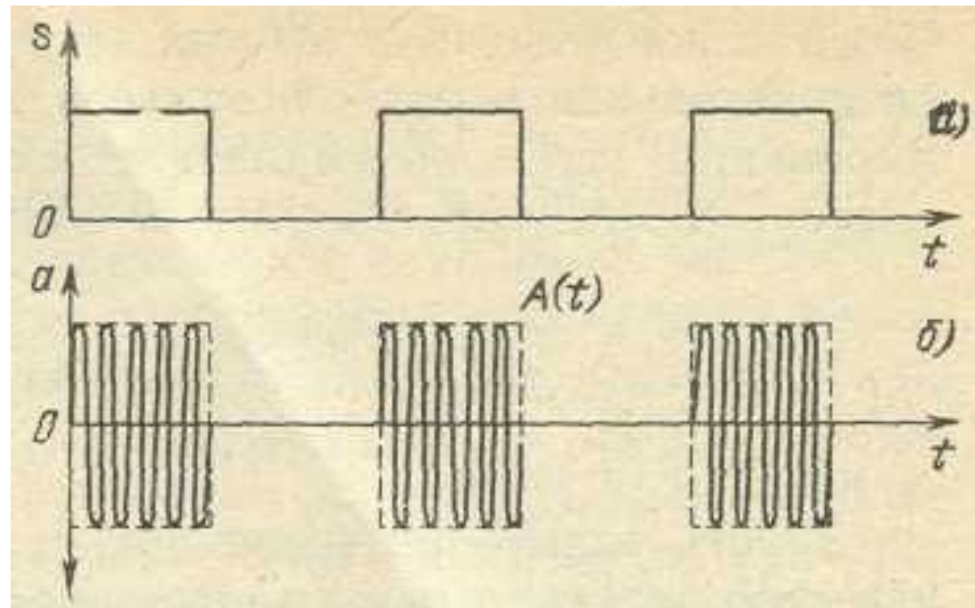


$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t + \gamma)$$

$$A(t) = A_0 + k_{ам} s(t) = A_0 + \Delta A_m \cos(\Omega t + \gamma), \qquad (3.5)$$

где $\Delta A_m = k_{ам} S_0$ – амплитуда изменения огибающей.





$M = \Delta A_m / A_0$ называется ***коэффициентом модуляции***

$$a(t) = A_0[1 + M\,cos(\Omega t + \gamma)]cos[\omega_0 t + \theta_0]. \tag{3.6}$$

При неискаженной модуляции ($M \leq 1$) амплитуда колебания изменяется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - M)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + M)$.

Пикам соот-ет мощность $(1+M)^2 P_0$, где $P_0 = (1/2) A_0^{\,2}$ - мощность несущ

Средняя за период модуляции мощность равна

$$\overline{A^2(t)} = A_0^2\,\overline{[1 + M\,cos(\Omega t + \gamma)]^2} = A_0^2(1 + 0{,}5M^2) \tag{3.7}$$

При 100 %-ной модуляции ($M=1$) пиковая мощность равна $4P_0$, а средняя мощность $1{,}5P_0$

Спектр амплитудно-модулированного колебания

$$A(t) = A_0 \left[1 + M\, cos(\Omega t + \gamma)\right]$$

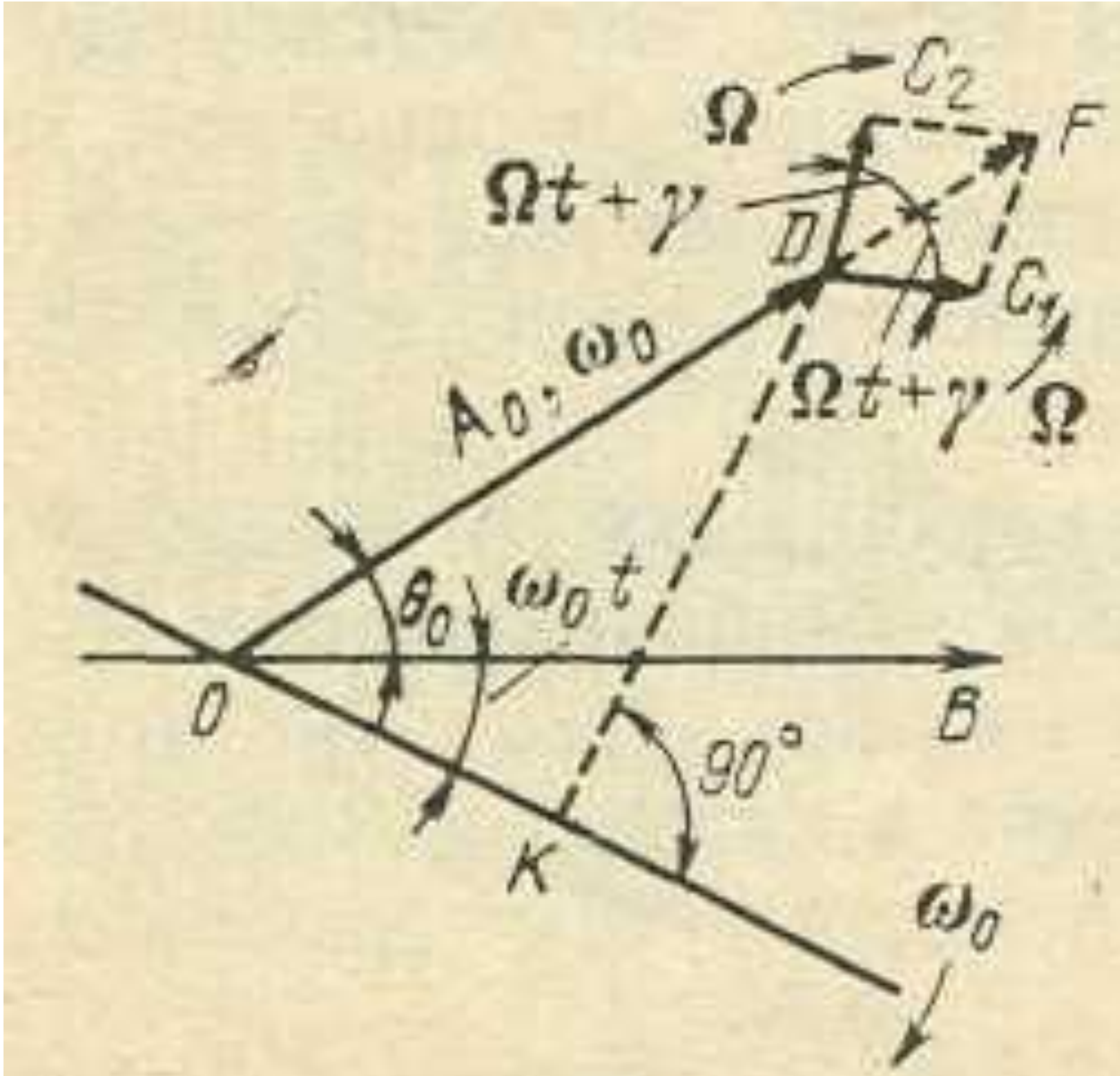
$$a(t) = A_0 \left[cos(\omega_0 t + \theta_0) + M\, cos(\Omega t + \gamma) cos(\omega_0 t + \theta_0)\right]$$

$$M\, cos(\Omega t + \gamma) cos(\omega_0 t + \theta_0) =$$

$$= \frac{M}{2} cos\left[(\omega_0 + \Omega)t + (\theta_0 + \gamma)\right] + \frac{M}{2} cos\left[(\omega_0 - \Omega)t + (\theta_0 - \gamma)\right].$$

$$a(t) = A_0\, cos(\omega_0 t + \theta_0) +$$

$$+ \frac{MA_0}{2} cos\left[(\omega_0 + \Omega)t + (\theta_0 + \gamma)\right] + \frac{M}{2} cos\left[(\omega_0 - \Omega)t + (\theta_0 - \gamma)\right]. \quad (3.8)$$



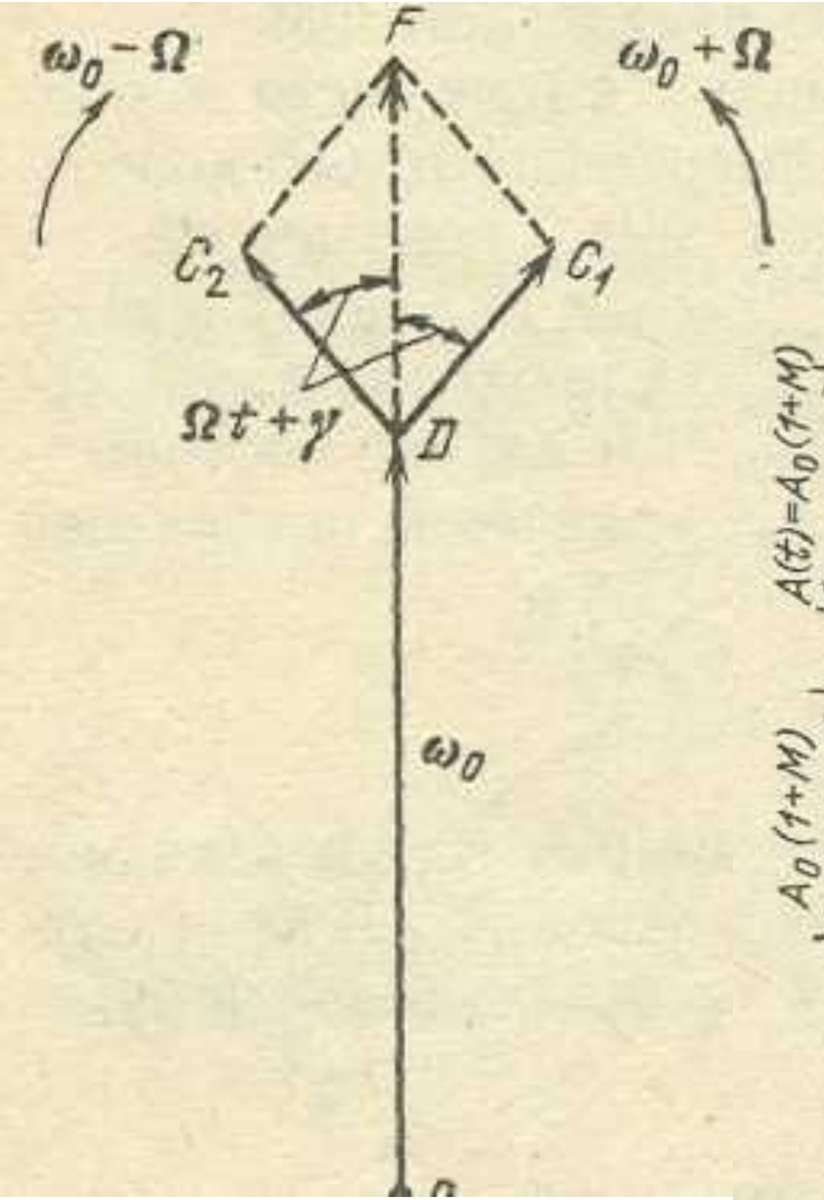
Ω
C_2
F
$\Omega t+\gamma$
D
C_1
$A_0; \omega_0$
$\Omega t+\gamma$
Ω
θ_0
$\omega_0 t$
0
B
90°
K
ω_0

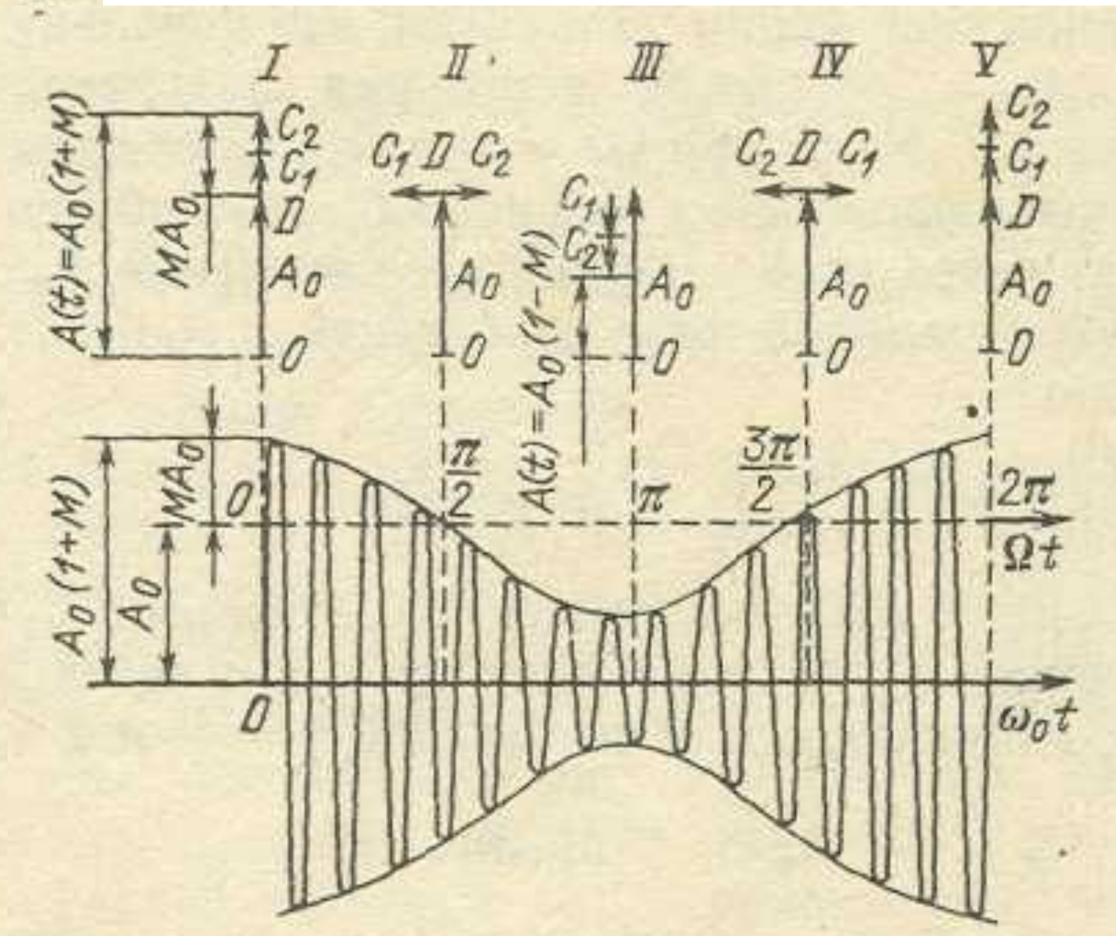
$$a(t) = A_0\,cos(\omega_0 t + \theta_0) +$$

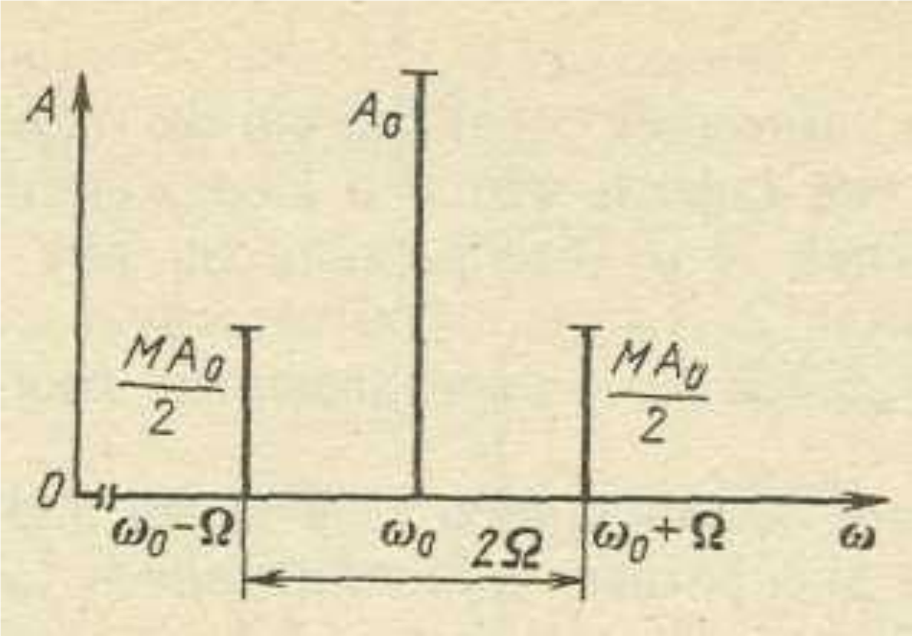
$$+\frac{MA_0}{2}cos[(\omega_0 t + \theta_0) + (\Omega t + \varphi)] +$$

$$+\frac{MA_0}{2}cos[(\omega_0 t + \theta_0) - (\Omega t_0 + \varphi)].$$

О фазе огибающей амплитуд





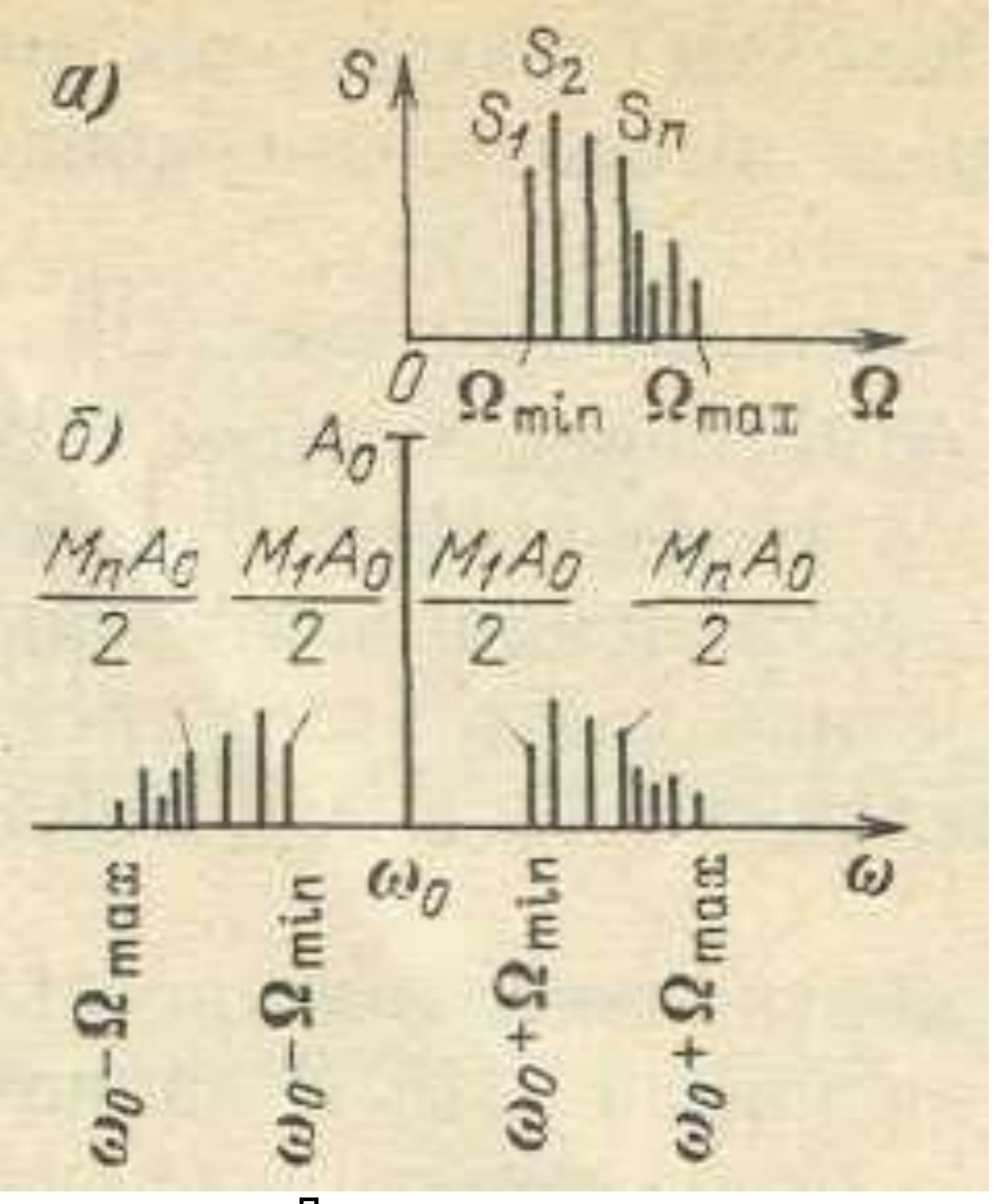


Спектр колебания при тональной (гармонической) АМ

$$s(t) = S_1 \cos\Omega_1 t + S_2 \cos\Omega_2 t.$$

$$A(t) = A_0 + \Delta A_{m_1} \cos\Omega_1 t + \Delta A_{m_2} \cos\Omega_2 t =$$
$$= A_0 \left(1 + M_1 \cos\Omega_1 t + M_2 \cos\Omega_2\right).$$

$$a(t) = A_0 \cos\omega_0 t + \frac{M_1 A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t + \frac{M_1 A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_1)t +$$
$$+ \frac{M_2 A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_2)t + \frac{M_2 A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_2)t.$$



Дискретные спектры:

а) сложной модулирующей функции; б) модулированного по амплитуде колебания

$$\dot{S}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2}e^{i\theta_0}\dot{S}_A(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-i\theta_0}\dot{S}_A(\omega + \omega_0). \tag{3.9}$$

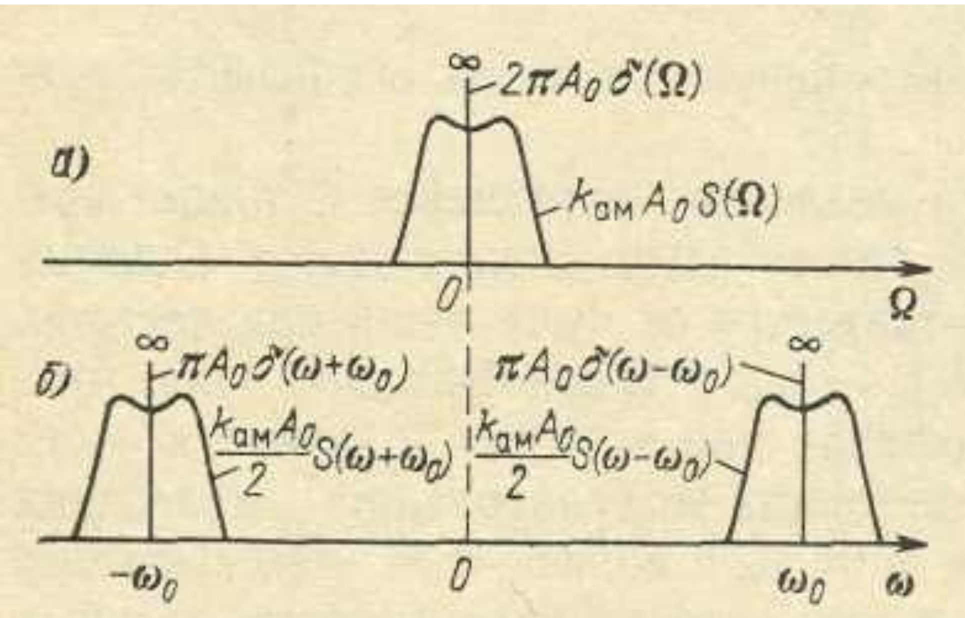
Для узкополосного сигнала можно считать, что в области положительных частот

$$\dot{S}_a(\omega) \approx \frac{1}{2}e^{i\theta_0}\dot{S}_A(\omega - \omega_0), \tag{3.10}$$

а в области отрицательных частот

$$\dot{S}_a(\omega) \approx \frac{1}{2}e^{-i\theta_0}\dot{S}_A(\omega + \omega_0), \tag{3.10`}$$

$$A(t) = A_0[1 + k_{ам}s(t)],$$



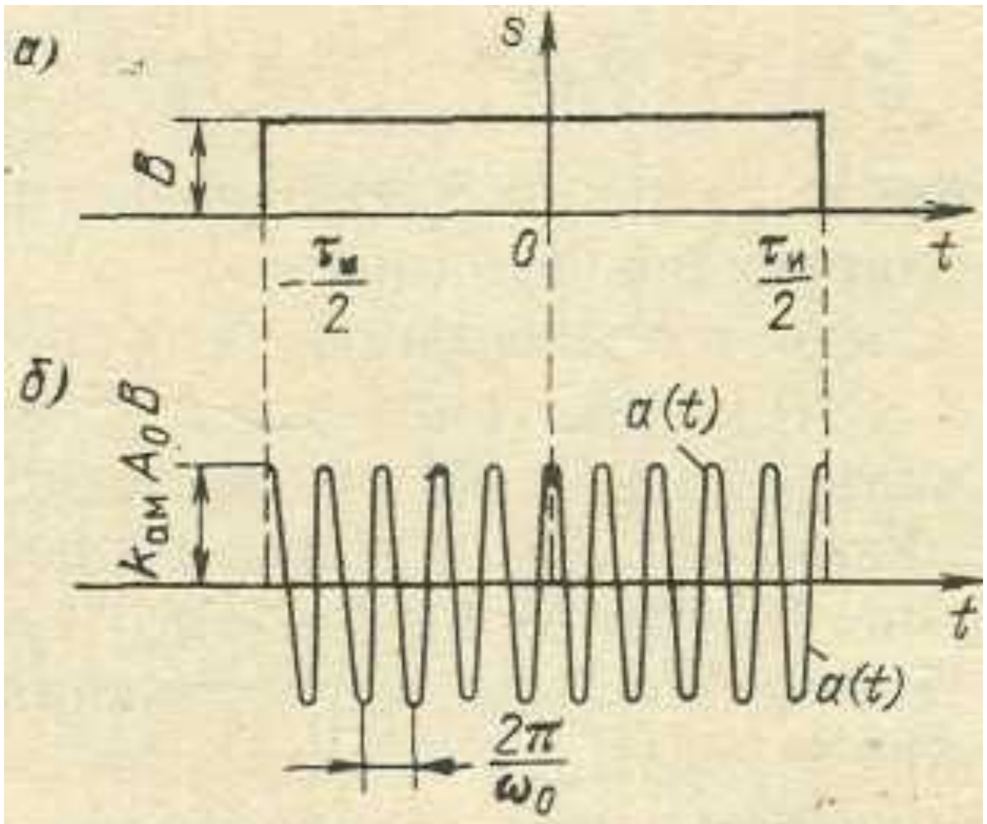
Дискретная часть этого спектра $2\pi A_0\delta(\Omega)$ соответствует A_0

Сплошная часть $k_{ам}A_0\dot{S}(\Omega)$ соответствует сообщению $s(t)$.

Дискретные составляющие $\pi A_0\delta(\omega\pm\omega_0)$ отображают несущее колебание $A_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)$, а сплошной спектр – колебания боковых частот модуляции.

Спектр прямоугольного радиоимпульса

$$a(t) = \begin{cases} k_{ам} A_0 B \cos\omega_0 t, & -\tau_и/2 < t < \tau_и/2m \\ 0, & t < -\tau_и/2 \quad и \quad t > \tau_и/2. \end{cases} \tag{3.12}$$



$$\dot{S}(\Omega) = B \frac{\sin(\Omega \tau_u / 2)}{(\Omega \tau_u / 2)} \qquad (3.13)$$

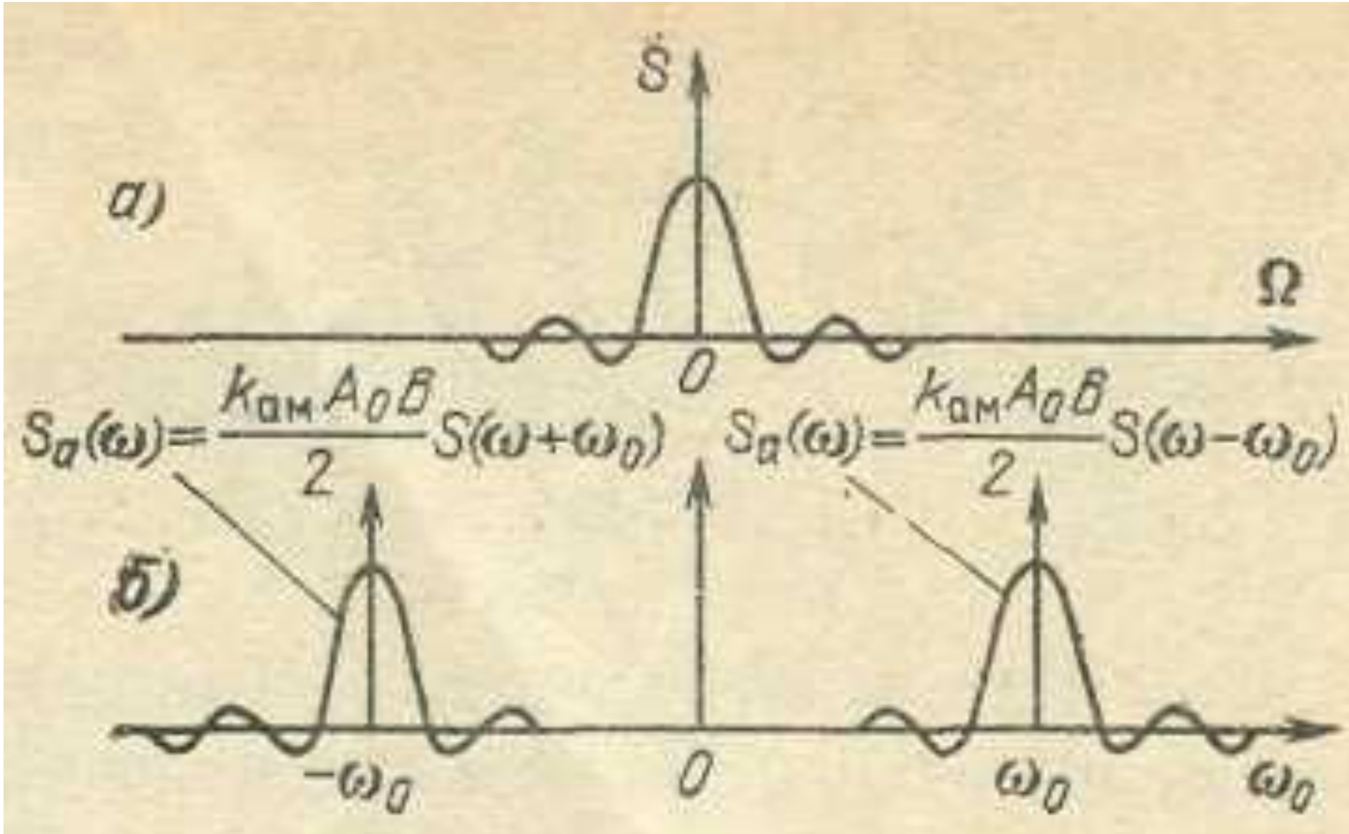
Огибающая амплитуд колебания $a(t)$

$$A(t) = k_{ам} A_0 s(t),$$

а спектральная плотность этой огибающей

$$\dot{S}_A(\Omega) = k_{ам} A_0 \dot{S}(\Omega) = k_{ам} A_0 B \frac{\sin \Omega \tau_u / 2}{\Omega \tau_u / 2}.$$

$$\dot{S}_a(\omega) = \frac{k_{ам} A_0 B}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau_и}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau_и}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau_и}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)\tau_и}{2}} \right] \qquad (3.14)$$



Графики спектральных плотностей модулирующей функции $s(t)$ и радиоимпульса $a(t)$