Угловая модуляция. Фаза и мгновенная частота колебаний

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \cos\psi(t)$$

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = (\omega_0 t_2 + \theta_0) - (\omega_0 t_1 + \theta_0) = \omega_0 (t_2 - t_1). \qquad (3.15)$$

$$\omega_0 = [\psi(t_2) - \psi(t_1)]/(t_2 - t_1), \qquad (3.16)$$

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\,dt \qquad (3.17)$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \qquad (3.18)$$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt + \theta_0 \qquad (3.19)$$

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0] \tag{3.20}$$

ЧМ

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos\Omega t \tag{3.21}$$

$$\psi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \omega_д \cos\Omega t)dt + \theta_0$$

$$\psi(t) = \omega_0 t + (\omega_д / \Omega)\sin\Omega t + \theta_0 \tag{3.22}$$

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + (\omega_д / \Omega)\sin\Omega t + \theta_0] \tag{3.23}$$

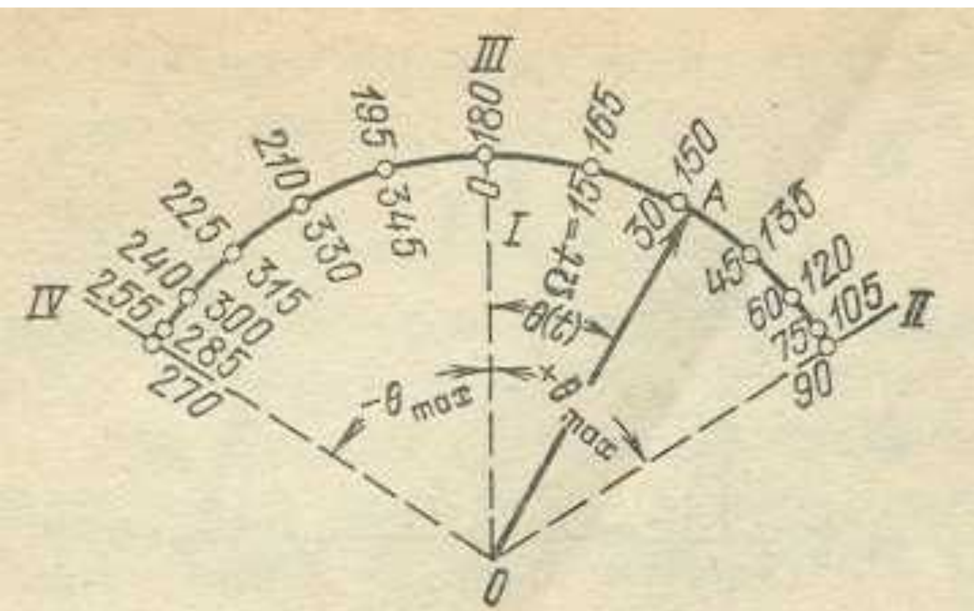
$$\theta_{max} = \omega_д / \Omega = m \tag{3.24}$$

ФМ $\theta(t)=\theta_{max} sin\Omega t$

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_{max} \sin \Omega t + \theta_0] \quad (3.23`)$$

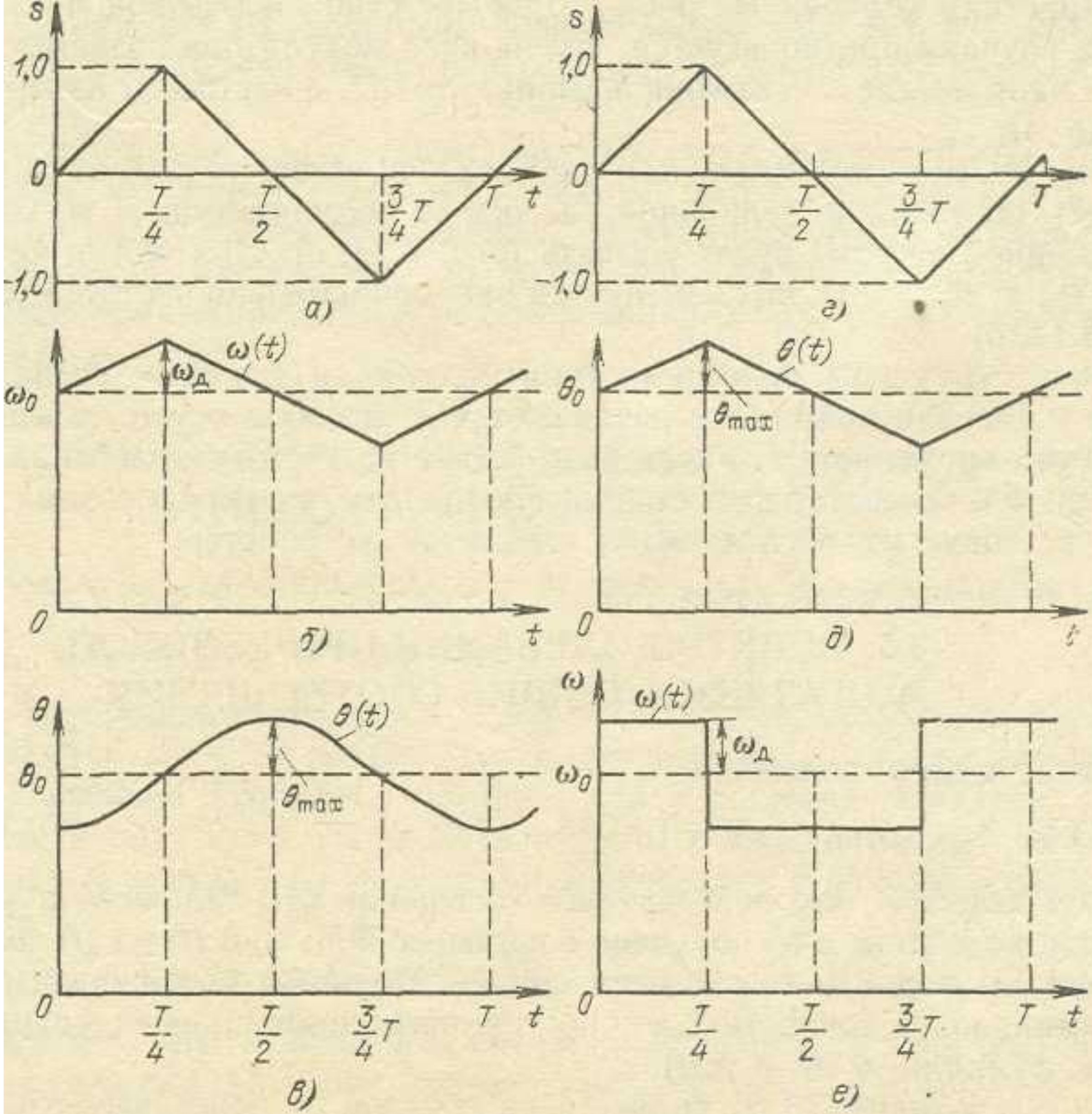
$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(\omega_0 t + \theta_{max} \sin \Omega t + \theta_0) = \omega_0 + \theta_{max}\Omega \cos \Omega t \quad (3.21`)$$

$\theta_{max}\Omega=\omega_д$, т. е. гармоническая модуляция фазы с индексом θ_{max} эквивалентна частотной модуляции с девиацией $\omega_д=\theta_{max}\Omega$.

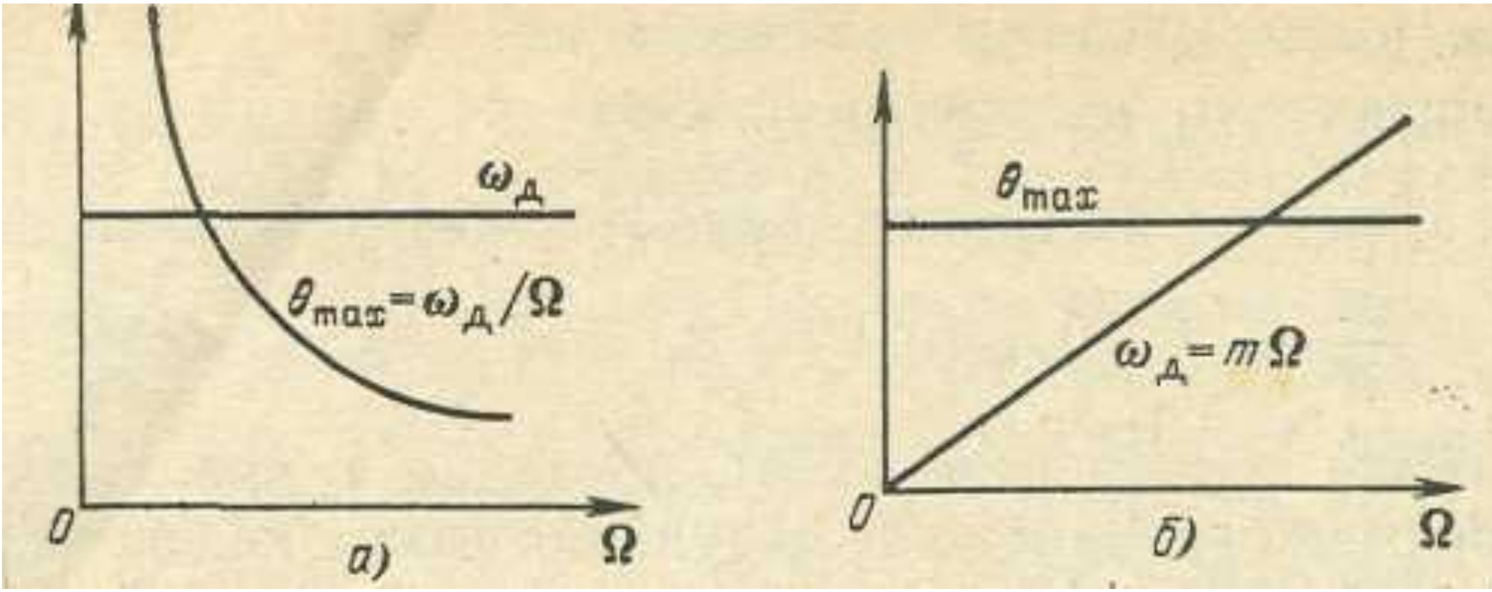


$\theta=\theta_{max} sin\Omega t$ при ФМ

$\theta=(\omega_д/\Omega)sin\Omega t$ при ЧМ (когда $\Delta\omega=\omega_д cos\Omega t$)



Сравнение функций ω(*t*) и θ(*t*) при ЧМ и ФМ при пилообразном модулирующем сигнале



Зависимость индекса θ_{max} и девиации $\omega_д$ от модулирующей частоты при ЧМ (*а*) и ФМ (*б*)

Спектр колебания при угловой модуляции. Общие соотношения

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \tag{3.25}$$

$$a(t) = A_0 \cos\theta(t)\cos\omega_0 t - A_0 \sin\theta(t)\sin\omega_0 t = a_c(t) - a_s(t) \tag{3.26}$$

Модулированное по углу колебание можно рассматривать как сумму двух ***квадратурных*** колебаний: ***косинусного*** $a_c(t)=A_0\cos\theta(t)\cos\omega_0 t$ и ***синусного*** $a_s(t)=A_0\sin\theta(t)\sin\omega_0 t$, каждое из которых модулировано только по амплитуде;
закон АМ для косинусного колебания определяется медленной функцией $\cos\theta(t)$, а синусного – функцией $\sin\theta(t)$.

Спектр колебания при гармонической угловой модуляции

$$a(t) = A_0\, cos(\omega_0 t + m\, sin\, \Omega t) \qquad (3.25`)$$

$$a(t) = A_0\, cos(m\, sin\, \Omega t) cos\, \omega_0 t - A_0\, sin(m\, sin\, \Omega t) sin\, \omega_0 t \qquad (3.27)$$

$$sin(m\, sin\, \Omega t) = 2J_1(m) sin\, \Omega t + 2J_3(m) sin\, 3\Omega t + 2J_5(m) sin\, 5\Omega t + \ldots$$

$$cos(m\, sin\, \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m) cos\, 2\Omega t + 2J_4(m) cos\, 4\Omega t + \ldots$$

$$sin(mc\, cos\, \Omega t) = 2J_1(m) cos\, \Omega t - 2J_3(m) cos\, 3\Omega t + 2J_5(m) cos\, 5\Omega t - \ldots$$

$$cos(m\, cos\, \Omega t) = J_0(m) - 2J_2(m) cos\, 2\Omega t + 2J_4(m) cos\, 4\Omega t - \ldots$$

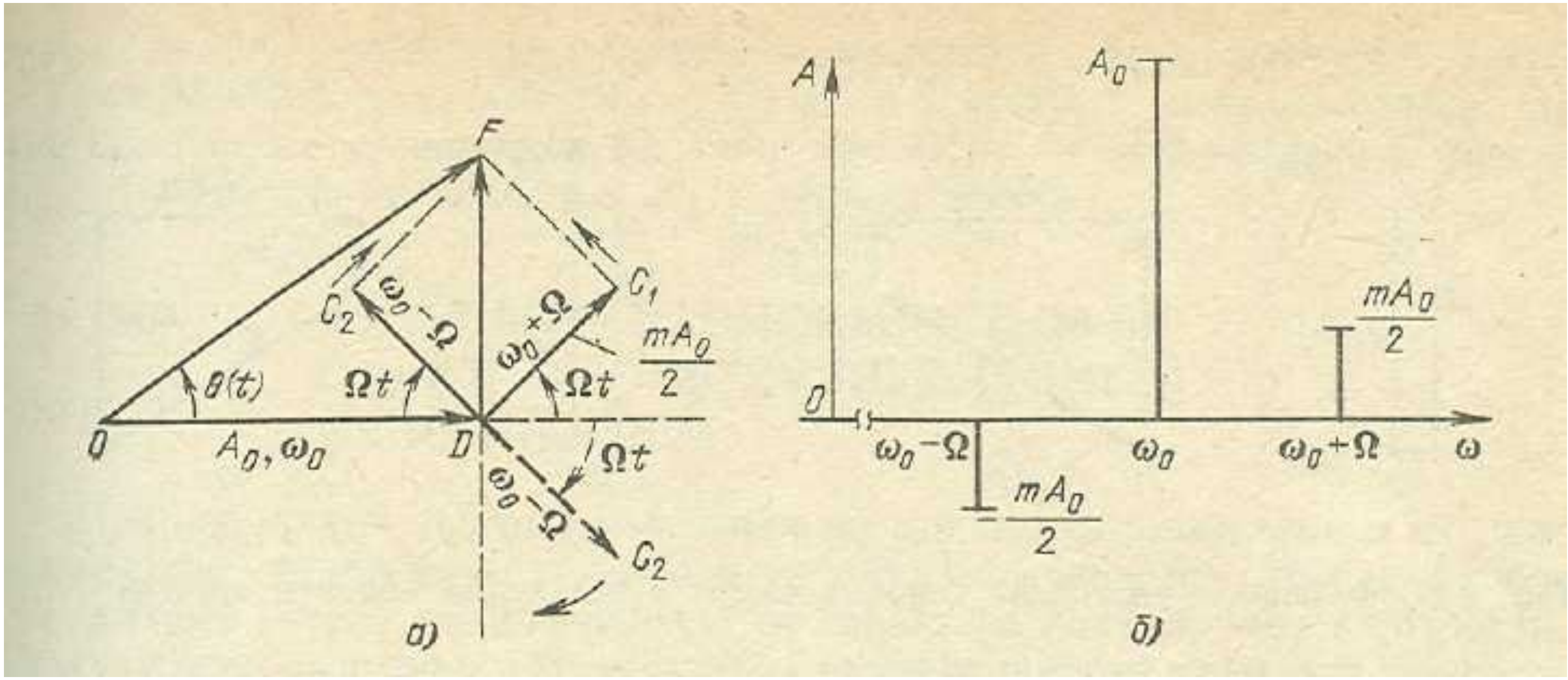
$$a(t) = A_0 [J_0(m) cos\, \omega_0 t - 2J_1(m) sin\, \Omega t\, sin\, \omega_0 t + 2J_2(m) cos\, 2\Omega t\, cos\, \omega_0 t -$$
$$- 2J_3(m) sin\, 3\Omega t\, sin\, \omega_0 t + \ldots]$$

$$a(t) = A_0\, cos(\omega_0 t + m\, sin\, \Omega t) = A_0 \{J_0(m) cos\, \omega_0 t + J_1(m)[cos(\omega_0 + \Omega)t - cos(\omega_0 - \Omega)t] +$$
$$+ J_2(m)[cos(\omega_0 + 2\Omega)t - cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + + J_3(m)[cos(\omega_0 + 3\Omega)t - cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \ldots\}$$

$m<<1$ $$sin(m sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t, \quad cos(m sin \Omega t) \approx 1$$

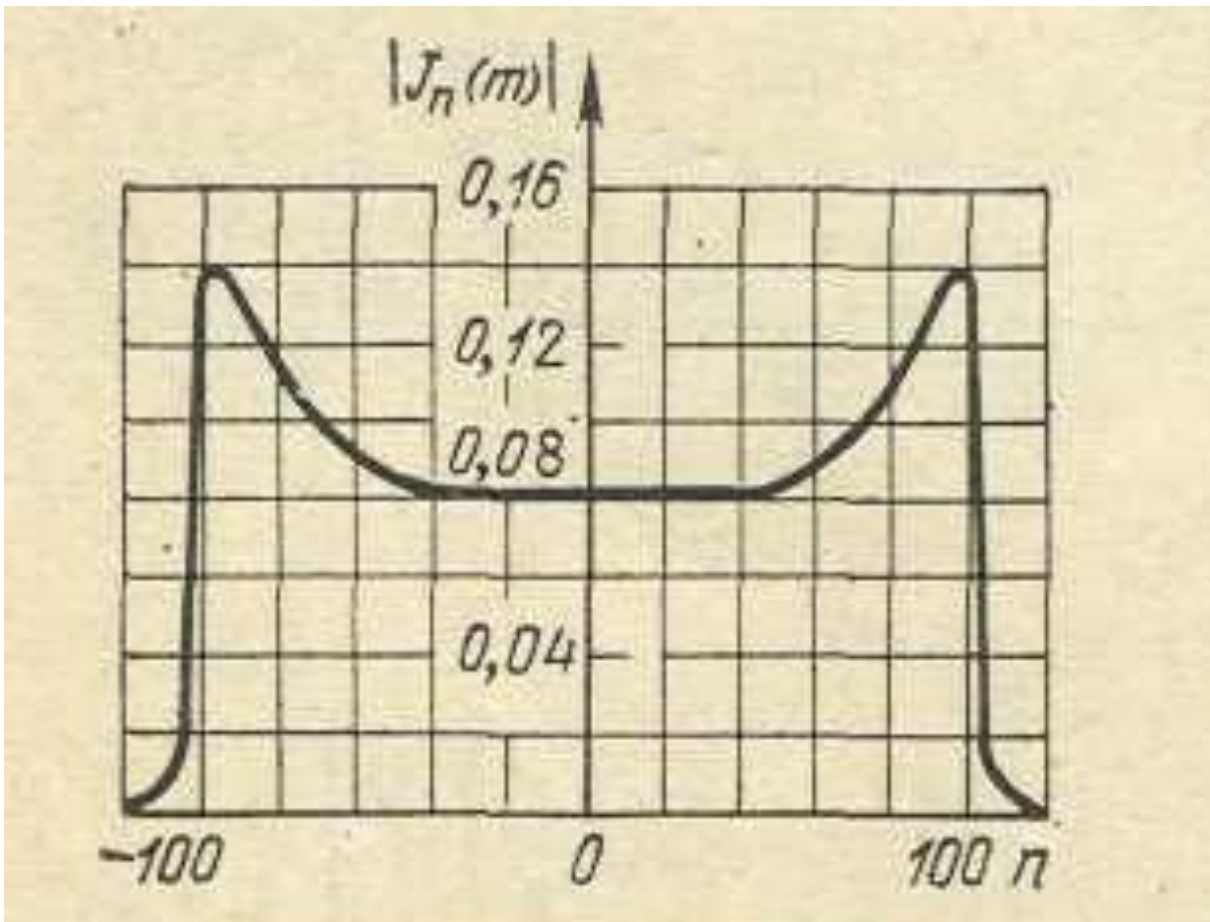
$$\begin{aligned} a(t) &\approx A_0 (\cos \omega_0 t - m \sin \Omega t \sin \omega_0 t) = \\ &= A_0 \left[\cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t - \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \right]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} a_{ам}(t) &\approx A_0 (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= A_0 \left[\cos \omega_0 t + \frac{M}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{M}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \right]. \end{aligned} \tag{3.33}$$



Векторная диаграмма (а) и спектр колебания (б) при угловой модуляции с индексом m <<1

При $m>>1$ величина $|J_n(m)|$ более или менее равномерна при всех целых значениях $|n|$, меньших, чем аргумент m. При $|n|$, близких к m, $|J_n(m)|$ образует всплеск, а при дальнейшем увеличении $|n|$ функция $|J_n(m)|$ быстро убывает до нуля.



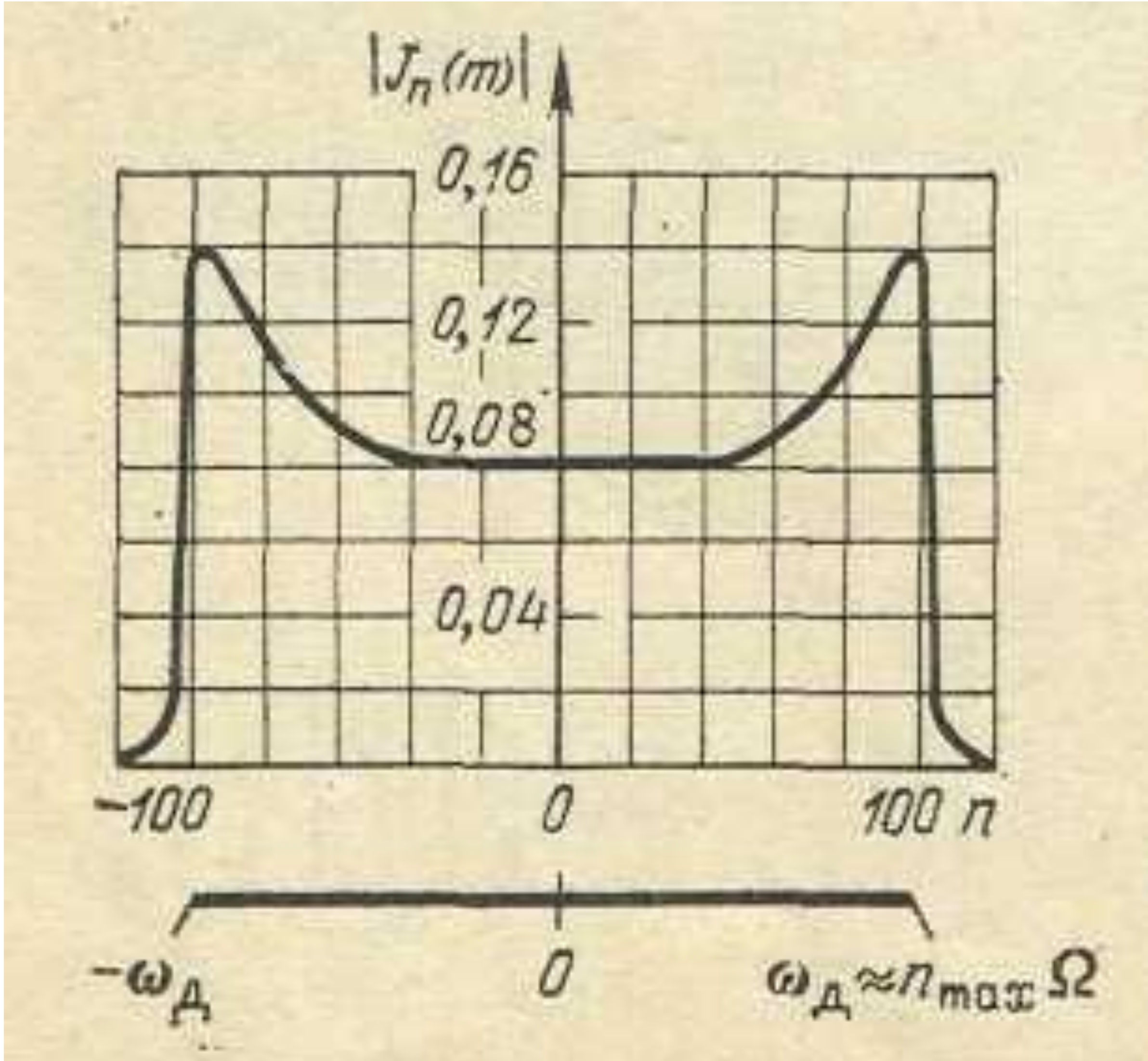
Наивысший номер n боковой частоты, которую еще необходимо принимать в расчет, приблизительно равен индексу модуляции m (в данном случае n=100).

Приравнивая это максимальное значение $n_{\max}$ величине m, приходим к выводу, что полная ширина спектра частотно-модулированного колебания

$$2|n_{\max}|\Omega\approx 2m\Omega.$$

Но $m=\omega_{д}/\Omega$, следовательно, при больших индексах модуляции ширина спектра модулированного колебания близка к удвоенной девиации частоты

$$2|n_{max}|\Omega\approx 2\omega_{д}. \qquad (3.34)$$



Ширина спектра ЧМ колебания при больших значениях индекса модуляции

$$2|n_{max}|\Omega \approx 2\,\omega_д. \qquad (3.34)$$