Огибающая, фаза и частота узкополосного сигнала

При представлении узкополосных сигналов в форме

$$a(t) = A(t)\cos\psi(t) \tag{3.34}$$

возникает неоднозначность в выборе функций $A(t)$ и $\psi(t)$.

Например,

$$a(t) = A_0 \cos\omega t$$

можно представить в форме

$$a(t) = A(t)\cos\omega t, \quad где \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

Здесь $A(t)$ в отличие от A_0 является функцией времени, которую можно определить из условия сохранения заданной функции $a(t)$:

$$A_0 \cos\omega t = A(t)\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

Неопределенности можно избежать при представлении $A(t)$ и $\psi(t)$ с помощью следующих соотношений:

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)}, \quad \omega(t) = arctg\left[a_1(t)/a(t)\right] \qquad (3.35), (3.36)$$

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_1(\tau)}{\tau - t}d\tau \qquad (3.37), (3.38)$$

Рассмотрим сначала некоторые свойства $A(t)$, вытекающие непосредственно из выражения (3.35) и справедливые при любой функции $a_1(t)$.

В точках, где функция $a_1(t)$ равна нулю, $A(t)=a(t)$.

$$A\frac{dA}{dt} = a\frac{da}{dt} + a_1\frac{da_1}{dt}$$

При $a_1=0$, когда $A(t)=a(t)$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{da}{dt}$$

Следовательно, в точках, в которых $a_1(t)=0$, кривые $A(t)$ и $a(t)$ имеют общие касательные.

Этих условий, однако, еще недостаточно для того, чтобы можно было рассматривать $A(t)$ как «простейшую» огибающую быстро осциллирующей функции $a(t)$. Необходимо потребовать, чтобы кривая $A(t)$ касалась кривой $a(t)$ в точках, в которых последняя имеет амплитудное или достаточно близкое к нему значение.

Иными словами,
в точках, где $a_1(t)$ обращается в нуль, функция $a(t)$ должна принимать значения, близкие к амплитудным. Это условие как раз и обеспечивается, если функция $a_1(t)$ является сопряженной по Гильберту функции $a(t)$.

Пусть $a(t)=cos\omega_0 t$, $-\infty<t<\infty$.

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,\omega_0\tau}{\tau - t}d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\pi}cos\,\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,\omega_0 x}{x}dx + \frac{1}{\pi}sin\,\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\,\omega_0 x}{x}dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,x}{x}dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\,x}{x}dx = \pi$$

Следовательно, функции $a(t)=cos\omega_0 t$ соответствует сопряженная функция $a_1(t)=sin\omega_0 t$

Аналогично, функции $a(t)=sin\omega_0 t$, $-\infty<t<\infty$, соответствует сопряженная функция $a_1(t)=-cos\omega_0 t$.

Как видим, выражение (3.35) определяет огибающую в виде линии, касательной к исходной функции в точках ее максимума и в случае гармонического колебания соединяющей два соседних максимума кратчайшим путем. Таким образом, выражение (3.35) определяет «простейшую» огибающую. Это свойство выражения (3.35) сохраняется и для сложного сигнала, если выполняется условие медленности изменения огибающей, т.е. если речь идет об узкополосном сигнале [см. (3.2), (3.3)].

$$a(t) = \sum_n \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\right) \tag{3.39}$$

$$a_1(t) = \sum_n \left(a_n \sin \omega_n t - b_n \cos \omega_n t\right) \tag{3.40}$$

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t\right] d\omega \tag{3.41}$$

$$a_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t\right] d\omega \tag{3.42}$$

Связь между спектрами функций $a(t)$ и $a_1(t)$

при ω>0

$$\dot{S}_1(\omega) = -i\dot{S}(\omega) \tag{3.43}$$

$$\dot{S}_1(\omega) = i\dot{S}(\omega), \quad \omega < 0 \tag{3.44}$$

После того как найдена сопряженная функция $a_1(t)$, можно с помощью выражений (3.35), (3.36) найти огибающую $A(t)$, полную фазу $\psi(t)$ и мгновенную частоту узкополосного сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[arctg\,\frac{a_1(t)}{a(t)}\right] = \frac{a(t)a_1'(t) - a_1(t)a'(t)}{a^2(t) + a_1^2(t)} \tag{3.45}$$

$$\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0 \tag{3.46}$$