Аналитический сигнал

В электротехнике гармоническое колебание представляют в форме

$$a(t) = A_0\, cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_0\, Re\left[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}\right] = Re\left[\dot{A}_0 e^{i\omega_0 t}\right] \qquad (3.47)$$

$$a(t) = A_0\, sin(\omega_0 t + \theta_0) = A_0\, Im\left[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}\right] = Im\left[\dot{A}_0 e^{i\omega_0 t}\right] \qquad (3.48)$$

где $\dot{A}_0 = A_0 e^{i\theta_0}$ - комплексная амплитуда

Часто символ *Re* или *Im* опускают и пишут просто

$$a(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \theta_0)} = \dot{A}_0 e^{i\omega_0 t}$$

подразумевая действительную или мнимую часть этого выражения.

В радиотехнике представление колебаний в комплексной форме распространено на негармонические колебания.

Если задан физический сигнал в виде действительной функции $a(t)$, то соответствующий ему комплексный сигнал представляется в форме

$$z_a(t) = a(t) + i a_1(t) \qquad (3.49)$$

где $a_1(t)$ – функция, сопряженная по Гильберту сигналу $a(t)$.

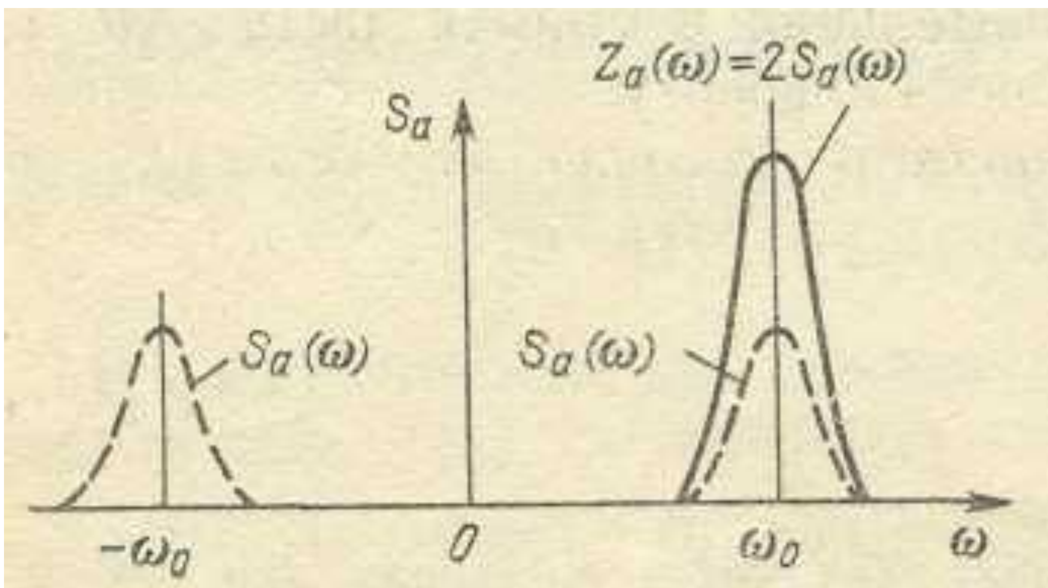
Главная особенность определенного таким образом комплексного сигнала заключается в том, что его спектральная плотность

$$\dot{Z}_a(\omega) = \dot{S}_a(\omega) + i\dot{S}_{a_1}(\omega) \qquad (3.50)$$

содержит только положительные частоты.

На основании (3.43) и (3.44)

$$\dot{Z}_a(\omega) = \begin{cases} 2\dot{S}_a(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \qquad (3.51)$$



Соотношение между спектрами физического и аналитического сигналов

Интеграл Фурье для сигнала $z_a(t)$ принимает следующий вид:

$$z_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \tilde{Z}_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2\tilde{S}_a(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (3.52)$$

Комплексный сигнал, определяемый выражениями (3.49) и (3.50), называется ***аналитическим сигналом***.

Пусть задан физический сигнал

$$a(t) = A(t)cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)cos\psi(t)$$

Соответствующий ему аналитический сигнал на основании (3.37)

$$z_a(t) = A(t)cos\psi(t) - \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\tau)cos\psi(\tau)}{\tau - t}dt$$

Если исходный сигнал $a(t)$ является достаточно узкополосным процессом, то в этом случае можно показать, что

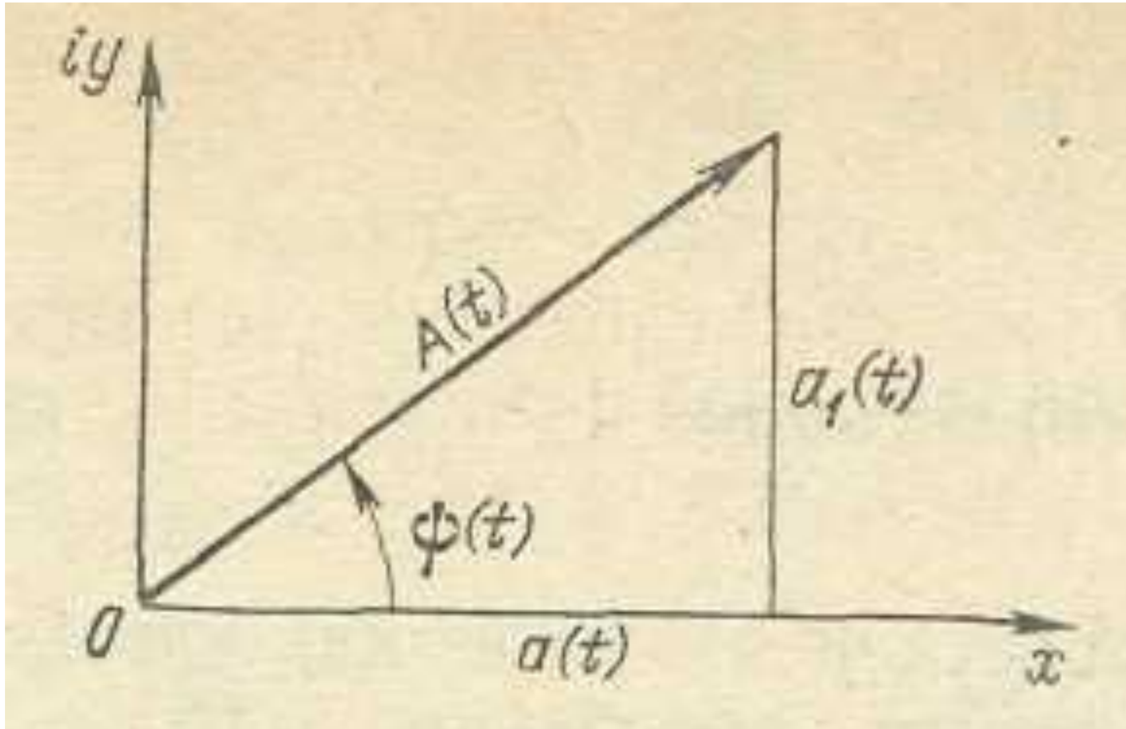
$$a_1(t) = A(t)sin\psi(t) = A(t)sin[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0] \tag{3.53}$$

и

$$z_a(t) \approx A(t)e^{i\psi(t)} = A(t)e^{i[\omega_0 t + \theta(t + \theta_0)]} = \tilde{A}(t)e^{i\omega_0 t} \tag{3.54}$$

где

$$\tilde{A}(t) \approx A(t)e^{i[\theta(t) + \theta_0]}$$



Соотношение между амплитудой аналитического сигнала и функциями $a(t)$ и $a_1(t)$

Свойства аналитического сигнала и комплексной огибающей

1. ***Произведение аналитического сигнала*** $z_a(t)$ ***на сопряженный ему сигнал*** $z_a^*(t)$ ***равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала a(t)***.

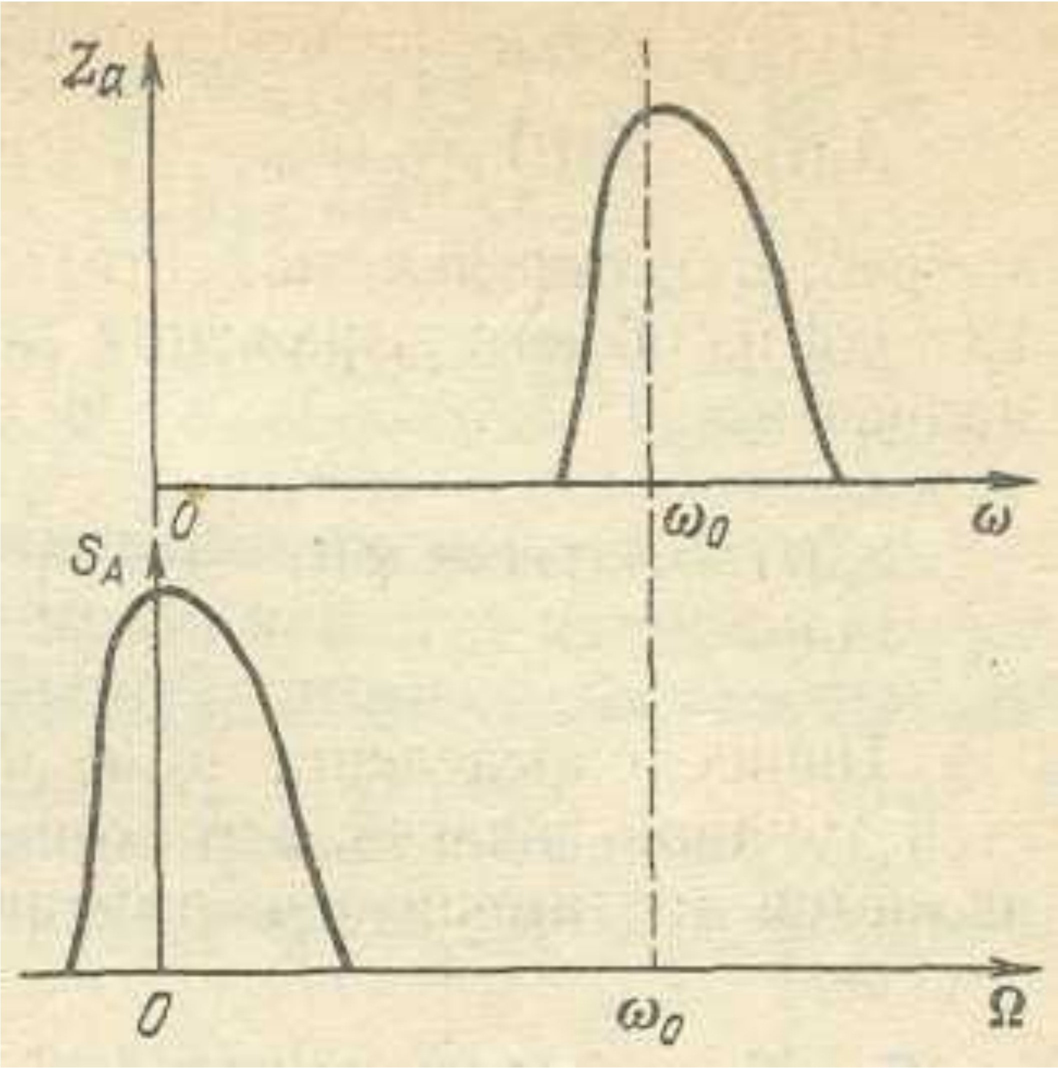
$$z_a(t)z_a^*(t) = \left[a(t) + ia_1(t)\right]\left[a(t) - ia_1(t)\right] = a^2(t) + a_1^2(t) = A^2(t) \qquad (3.55)$$

2. ***Спектральная плотность комплексной огибающей*** $\dot{A}(t)$ ***совпадает со смещенной на*** ω_0 ***влево спектральной плотностью аналитического сигнала*** $z_a(t)$

$$\dot{Z}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = \dot{S}_A(\omega - \omega_0), \quad \omega > 0 \qquad (3.56)$$

Введя обозначение $\omega-\omega_0=\Omega$, запишем (3.56) с учётом (3.51) в виде

$$\dot{Z}_a(\omega_0 + \Omega) = \dot{S}_A(\Omega) = 2\dot{S}_a(\omega_0 + \Omega) \qquad (3.57)$$



Соотношение между спектрами комплексной огибающей и аналитического сигнала

Отметим, что спектр $\dot{S}_A(\Omega)$ комплексной огибающей $\dot{A}(t)$ не обязательно симметричен относительно нулевой частоты.

Если спектр физического колебания $a(t)$ несимметричен относительно $\omega=\omega_0$, как это может иметь место, например, при амплитудно-угловой модуляции, то и спектр аналитического сигнала несимметричен. После сдвига спектра аналитического сигнала на величину ω_0 влево спектр комплексной огибающей будет несимметричен относительно частоты $\omega_0=0$.

В любом случае спектр комплексной огибающей отличен от нуля в области отрицательных частот. Это означает, что комплексная огибающая не является аналитическим сигналом.

3. ***Корреляционная функция аналитического сигнала является комплексной функцией.***

$$B_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a(t) z_a^*(t+\tau) dt \tag{3.58}$$

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} Re[B_z(\tau)] \tag{3.59}$$

4. ***Корреляционные функции аналитического сигнала и комплексной огибающей этого сигнала связаны между собой соотношением***

$$B_z(\tau) = e^{-i\omega_0\tau} B_A(\tau) \tag{3.60}$$