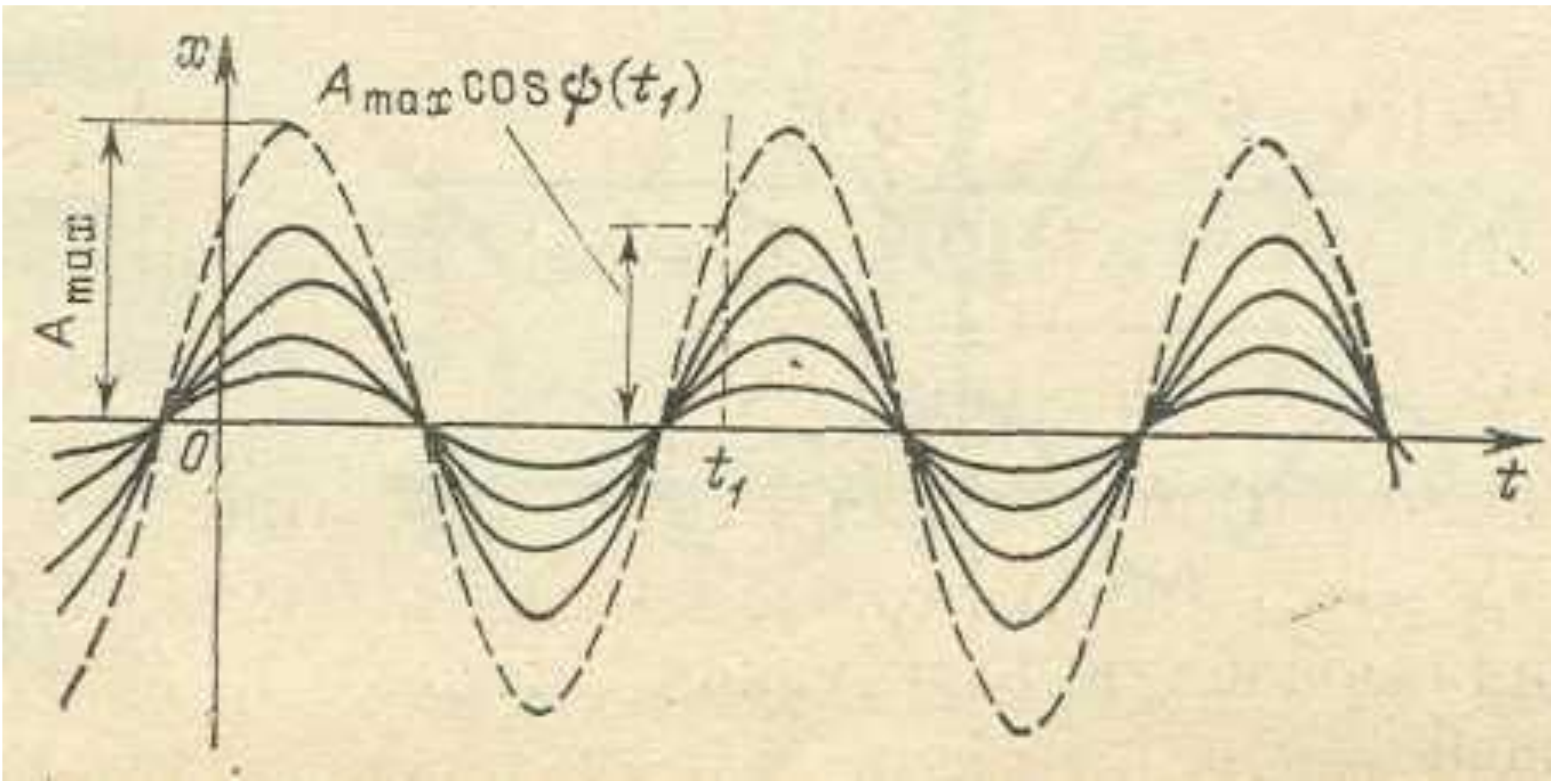
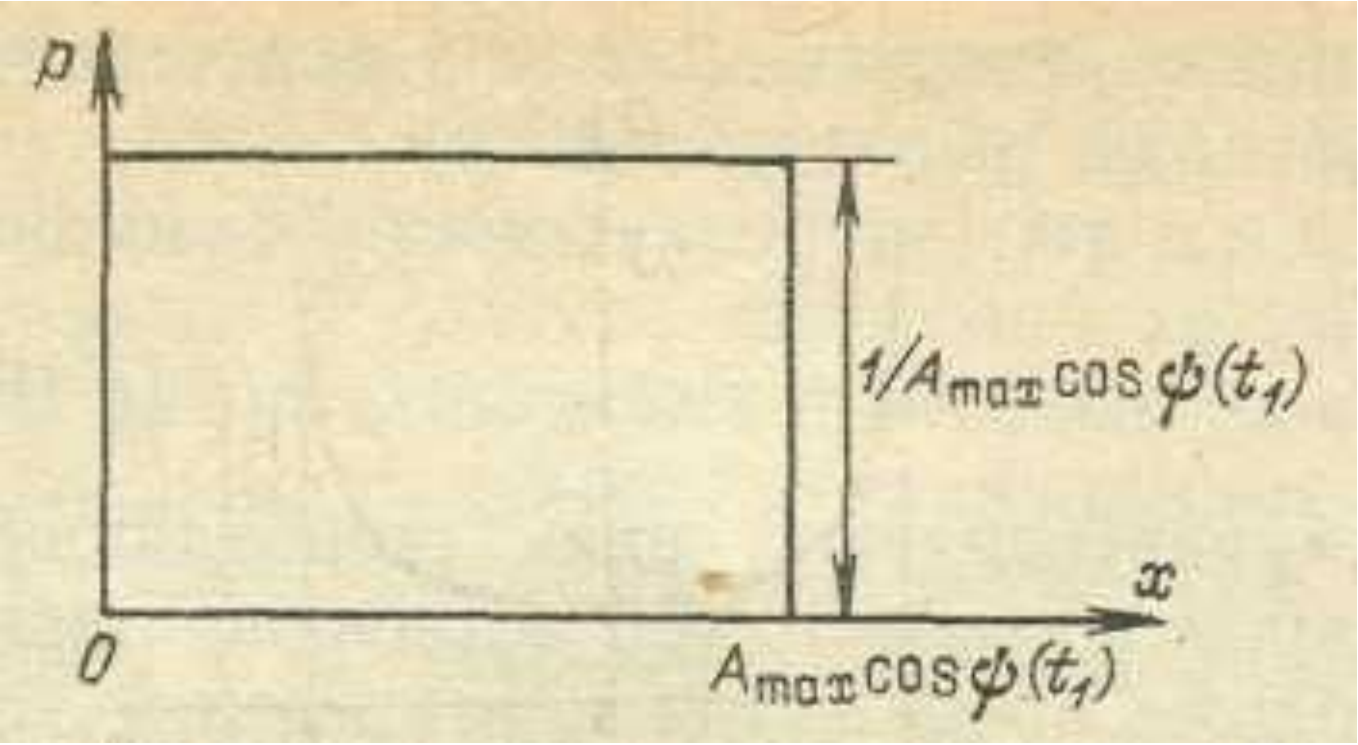
Виды случайных процессов. Примеры

Гармоническое колебание со случайной амплитудой

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) = A\cos\psi(t) \tag{4.20}$$



$$w(x;t_1) = 1/A_{max}\cos\psi(t_1), \quad 0 < x < A_{max}\cos\psi(t_1).$$



$$M\{x(t_1)\} = \frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)} \int_0^{A_{mav}\cos\psi(t_1)} x\,dx = \frac{1}{2} A_{max}\cos\psi(t_1)$$

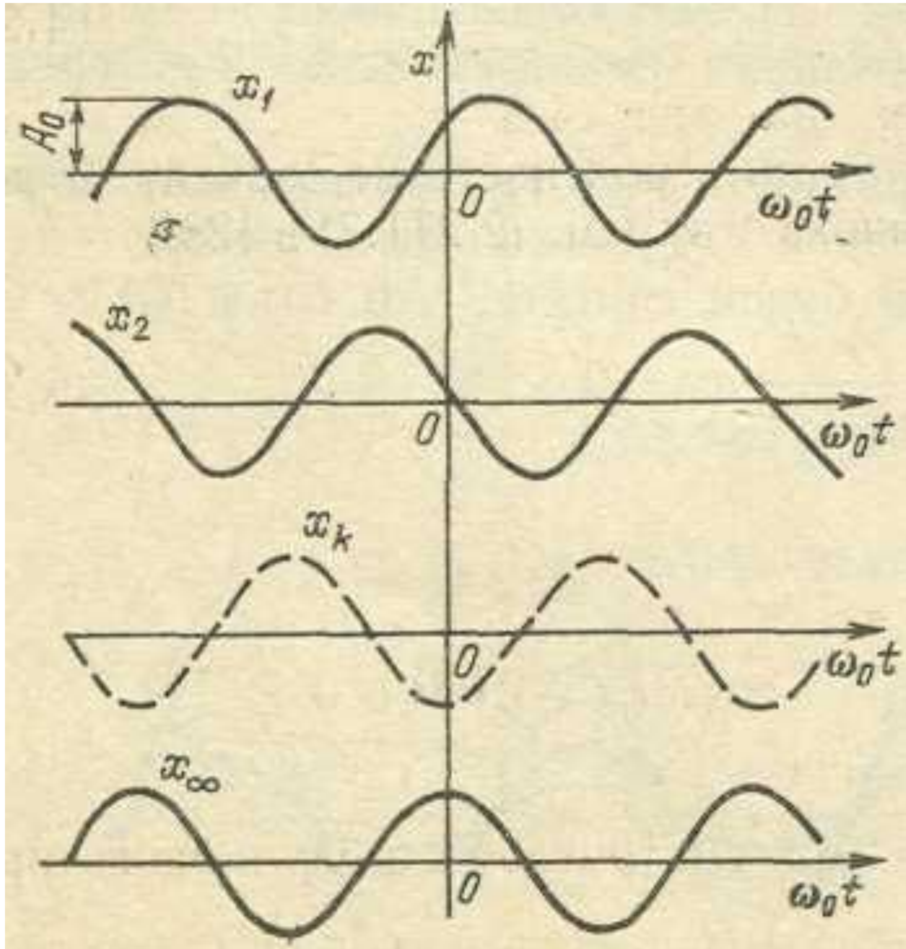
$$M\{x^2(t_1)\} = \frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)} \int_0^{A_{mav}\cos\psi(t_1)} x^2\,dx = \frac{1}{3} A_{max}^2 \cos^2\psi(t_1)$$

$$D_x(t_1) = M\{x^2(t_1)\} - [M\{x(t_1)\}]^2 = \frac{1}{3} A_{max}^2 \cos^2\psi(t_1) - \frac{1}{4} A_{max}^2 \cos^2\psi(t_1) =$$

$$= \frac{1}{12} A_{max}^2 \cos^2\psi(t_1). \tag{4.21}$$

процесс нестационарный и неэргодический

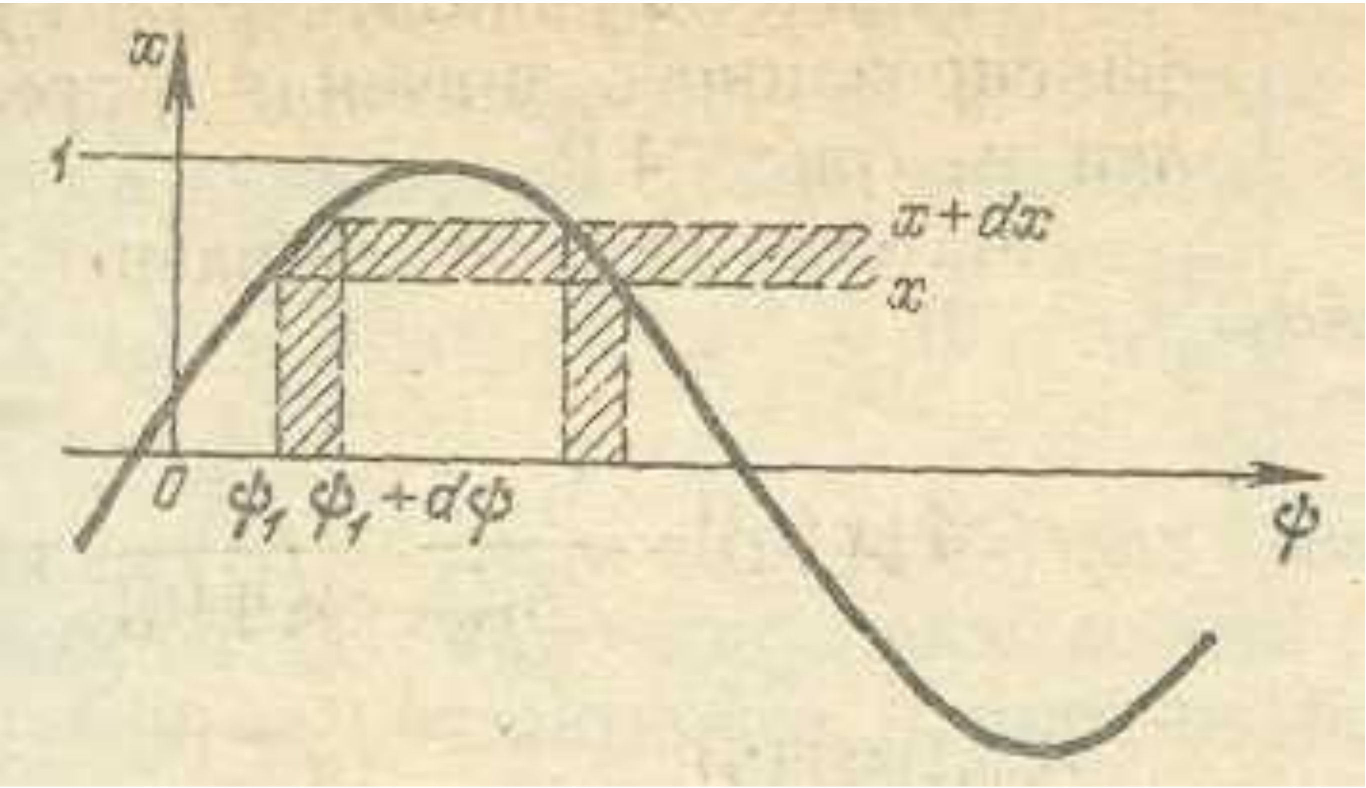
Гармоническое колебание со случайной фазой



$$w_\theta(\theta) = 1/2\pi\,, \qquad -\pi < \theta < \pi \tag{4.22}$$

$$x_k(t) = cos(\omega_0 t + \theta_k) = cos\psi_k(t) \tag{4.23}$$

$$w_\psi(\psi) = 1/2\pi\,, \quad \omega_0 t - \pi < \psi < \omega_0 t + \pi \tag{4.24}$$



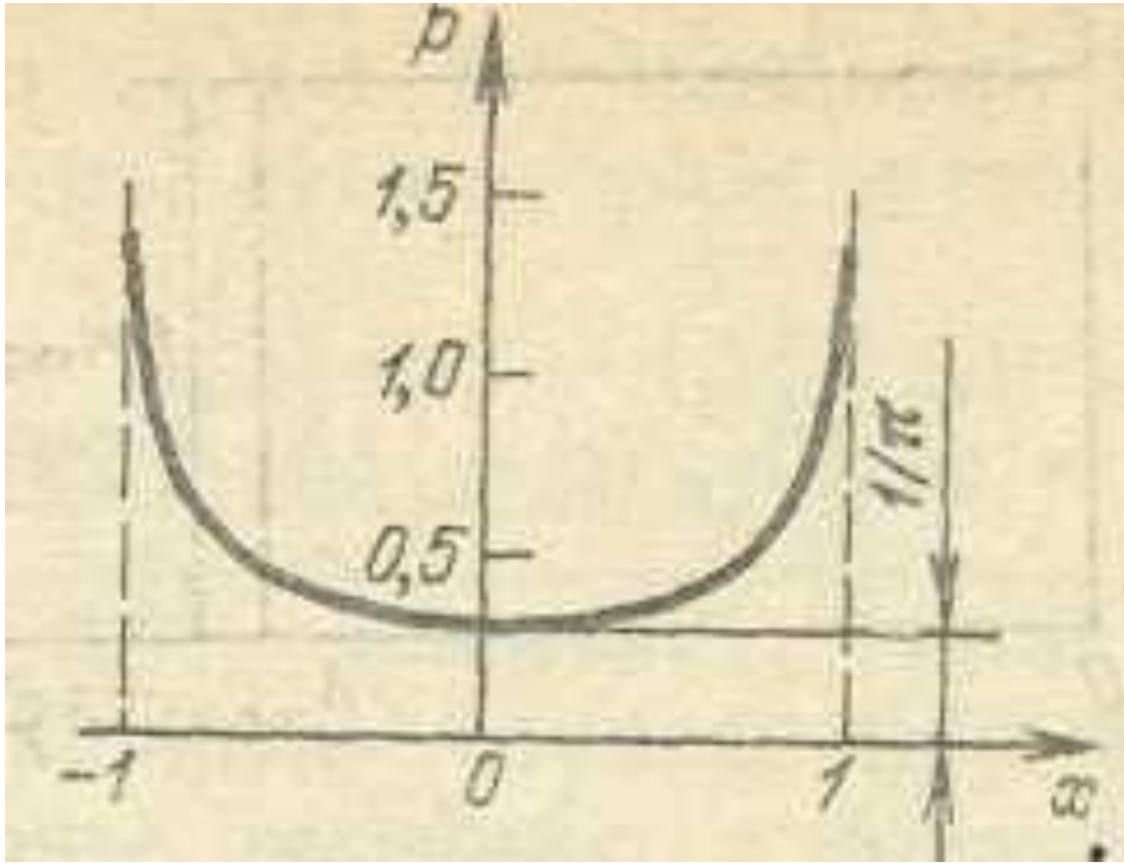
$$w_x(x)dx = 2w_\psi(\psi)d\psi = 2/2\pi\, d\psi$$

$$w_x(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\left|\dfrac{dx}{d\psi}\right|}, \quad -1 < x < 1$$

$$\left|\frac{dx}{d\psi}\right| = |sin\psi| = \sqrt{1-cos^2\psi} = \sqrt{1-x^2}$$

Окончательно

$$w_x(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 \qquad (4.25)$$



На рисунке ***p*** *эквивалентно* ***w***

(4.25)

$w_x(x)$ одномерная плотность вероятности не зависит от выбора момента времени *t*, а среднее по множеству

$$M\{x(t)\} = \int_{-1}^{1} x w_x(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \tag{4.26}$$

совпадает со средним по времени

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(\omega_0 t + \theta)dt = 0$$

Корреляционную функцию в данном случае можно получить усреднением произведения $x(t_1)x(t_2)$ по множеству без обращения к двумерной плотности вероятности [см. общее выражение (4.8)]. Подставляя в (4.8)

$$x(t_1)x(t_2) = cos(\omega_0 t_1 + \theta)cos(\omega_0 t_2 + \theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\{cos(\omega_0(t_2 - t_1)) + cos[\omega_0(t_2 - t_1) + 2\theta]\}$$

$w_x(x)$ одномерная плотность вероятности не зависит от выбора момента времени t, а среднее по множеству

$$M\{x(t)\} = \int_{-1}^{1} x w_x(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \qquad (4.26)$$

совпадает со средним по времени

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0$$

Корреляционную функцию в данном случае можно получить усреднением произведения $x(t_1)x(t_2)$ по множеству без обращения к двумерной плотности вероятности [см. общее выражение (4.8)]. Подставляя в (4.8)

$$x(t_1)x(t_2) = cos(\omega_0 t_1 + \theta) cos(\omega_0 t_2 + \theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\{cos(\omega_0(t_2 - t_1)) + cos[\omega_0(t_2 - t_1) + 2\theta]\}$$

Корреляционную функцию в данном случае можно получить усреднением произведения $x(t_1)x(t_2)$ по множеству без обращения к двумерной плотности вероятности [см. общее выражение (4.8)]. Подставляя в (4.8)

$$x(t_1)x(t_2) = cos(\omega_0 t_1 + \theta)cos(\omega_0 t_2 + \theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\{cos(\omega_0(t_2 - t_1)) + cos[\omega_0(t_2 - t_1) + 2\theta]\}$$

$$R_x(t_1, t_2) = M\{x(t_1)x(t_2)\} = \frac{1}{2} cos\,\omega_0 \tau \tag{4.27}$$

Независимость среднего значения от t_1 и корреляционной функции от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси времени позволяет считать рассматриваемый процесс стационарным.

Совпадение же результатов усреднения по множеству и времени (для любой реализации) говорит об эргодичности процесса.

Аналогичным образом нетрудно показать, что гармоническое колебание со случайной амплитудой и случайной фазой образует стационарный, но не эргодический процесс (различные реализации обладают неодинаковой дисперсией).