## *Спектральная плотность мощности случайного процесса*

Спектральная плотность средней мощности представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте $\omega$. Размерность функции $W(\omega)$, являющейся отношением мощности к полосе частот, есть

$$[W(\omega)] = \left[\frac{Мощность}{Полоса \quad частот}\right] = [Мощность \times время] = [Энергия]$$

$$E_{kT} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_{kT}(\omega)\right|^2 d\omega \qquad (4.31)$$

$$\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|X_{kT}(\omega)\right|^2}{T}d\omega \qquad (4.32)$$

$$\overline{x_k^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_{kT}(\omega)\right|^2}{T}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega)\, d\omega$$

где

$$W_k(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_{kT}(\omega)^2\right|}{T} \tag{4.33}$$

− ***спектральная плотность средней мощности*** *k*-ой реализации.

Окончательное выражение для средней мощности случайного процесса

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega$$

где

$$W_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T(\omega)^2\right|}{T} \tag{4.34}$$

Если рассматривается случайный процесс с ненулевым средним значением $x(t)$, то спектральную плотность следует представить в форме

$$W_x(\omega) = \left(\overline{x(t)}\right)^2 2\pi\delta(\omega) + \widetilde{W}(\omega) \tag{4.35}$$

При интегрировании по $f$

$\left(\overline{x(t)}\right)^2$ − мощность постоянной составляющей

$$D_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{W}(\omega)d\omega = \sigma_x^2 \tag{4.36}$$

− мощность флуктуационной составляющей, т.е. дисперсии

Для процесса с нулевым средним

$$\overline{x^2(t)} = D_x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(\omega)d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(2\pi f)df \tag{4.37}$$

## Соотношение между спектральной плотностью и ковариационной функцией случайного процесса

Теорема Винера – Хинчина

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \qquad (4.38)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega \qquad (4.39)$$

Для случайных процессов с нулевым средним аналогичные выражения имеют вид

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \qquad (4.38`)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \qquad (4.39`)$$

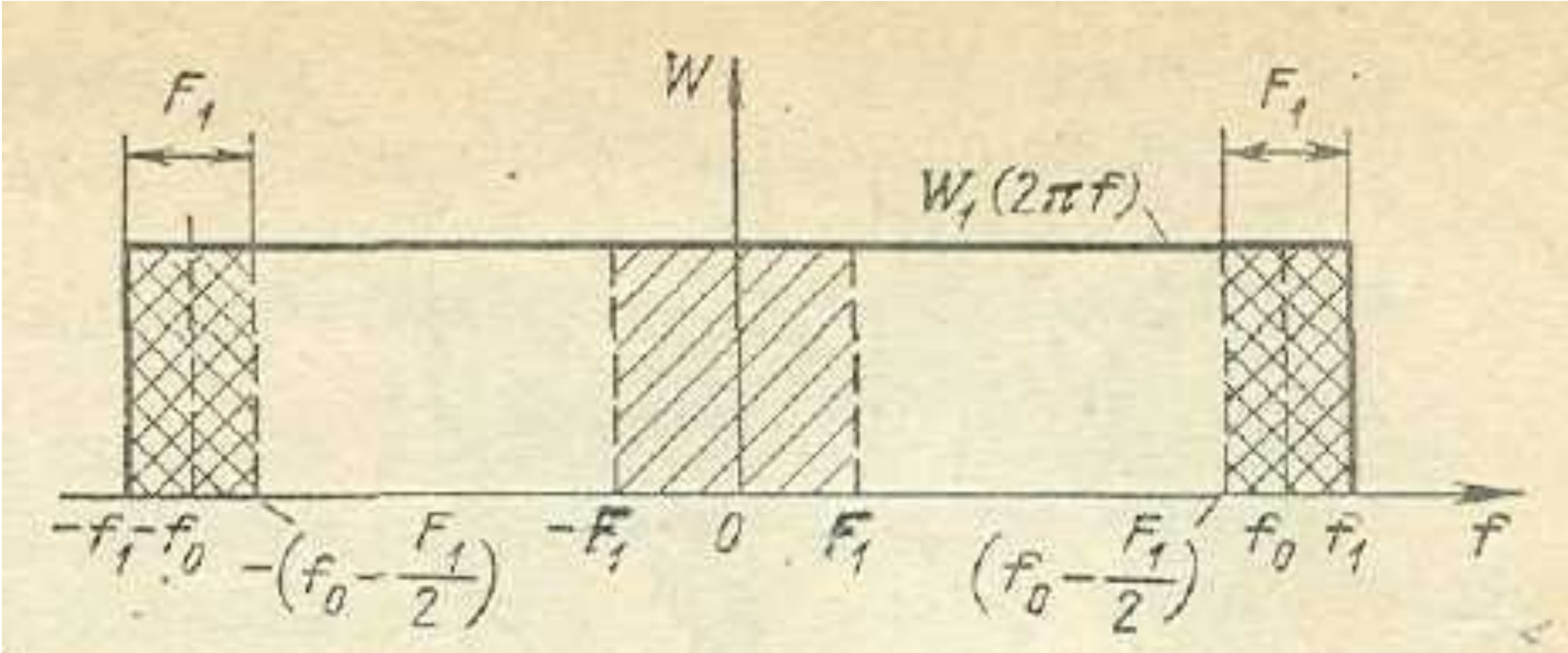
***Чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и соответственно чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса***

**Белый шум** :

$$W_x(\omega) = W_0 = const$$

$$R_x(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau) \qquad (4.40)$$

Дисперсия белого шума бесконечно велика.




.

**Широкополосный и узкополосный спектры случайного процесса (примеры 1, 2, 3); границы центральной полосы $\pm F_1$**

**1**

$u_{ск}=2B$ $\qquad$ $f_1=10$ МГц

$$W_1(2\pi f) = u_{ск}^2 \big/ 2f_1 = (2)^2 \big/ 2\cdot 10^{-7} = 2\cdot 10^{-7}\,, \quad ,B^2 \big/ Гц$$

Корреляционная функция

$$R_1(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) \cos\omega\tau d\omega =$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\frac{1}{2\pi}\frac{2\sin\omega_1\tau}{\tau} = 2\cdot 10^{-7} 2 f_1 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau} = \sigma_1 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau}. \qquad (4.41)$$

Дисперсия шума

$$D_1 = u_{ск}^2 = R_1(0) = 4B^2$$

Нормированная корреляционная функция

$$r_1(\tau) = R_1(\tau)/\sigma_1^2 = \sin\omega_1\tau / \omega_1\tau \qquad (4.42)$$

**2**

Вырежем из спектра исходного шума полосу от $f=-F_1$ до $f=F_1$. При $F_1$=2МГц

$$D_2 = 2F_1W_1(\omega) = 2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-7} = 0{,}8B^2,$$

$$R_2(\tau) = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{sin\,\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau} = 0{,}8\frac{sin\,\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau},$$

$$r_2(\tau) = R_2(\tau)/\sigma_2^2 = sin\,\Omega_1\tau/\Omega_1\tau.$$

**3**

Найдем аналогичные характеристики для шума, спектр которого обозначен на рисунке двойной штриховкой.
Этот случай отличается положением спектральной полосы на оси частот. Шум с подобным спектром называют узкополосным (при $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$).

*Очевидно, что* $D_3 = D_2$

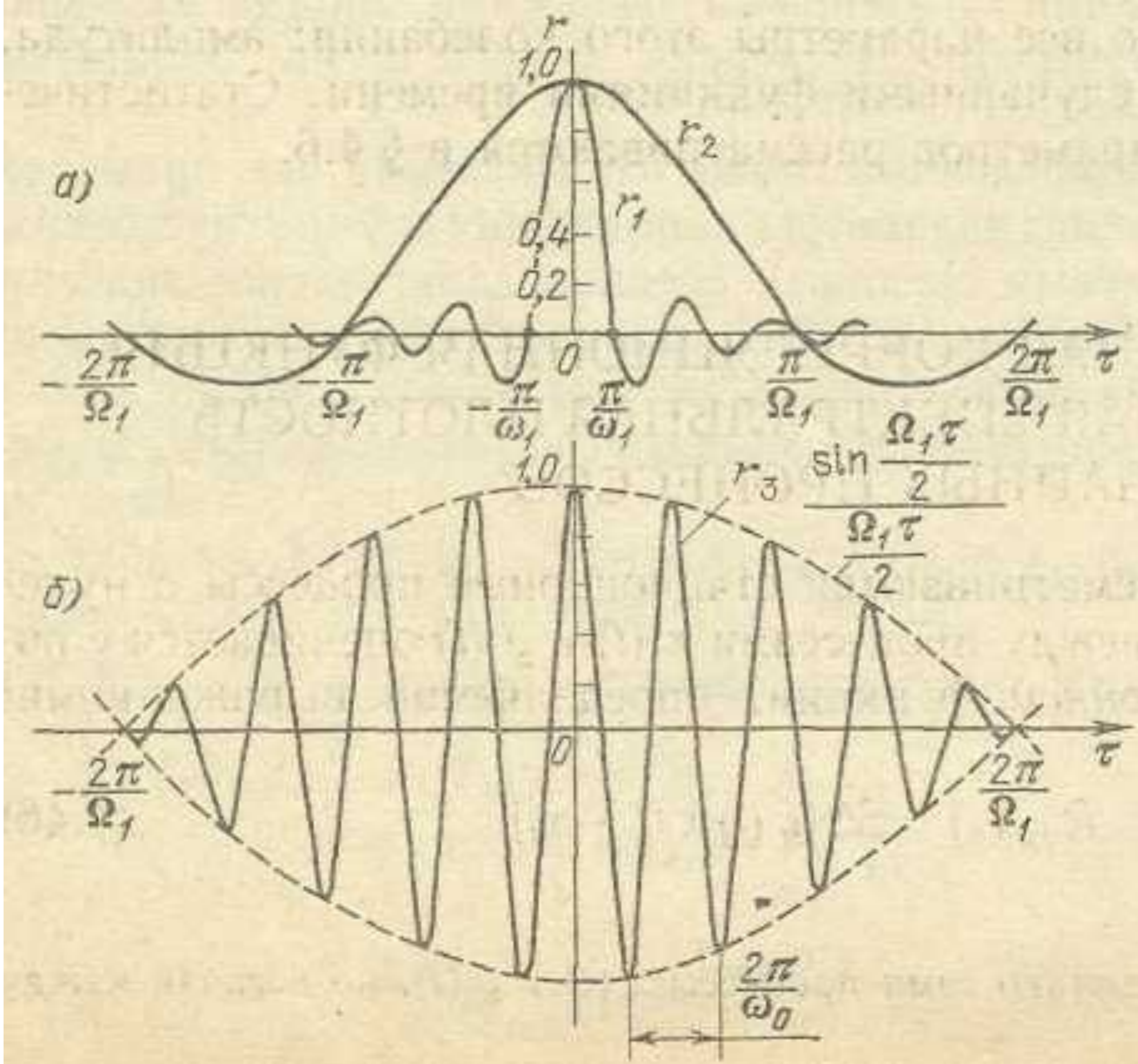
$$R_3(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(\omega_0+\Omega_1/2)}^{-(\omega_0-\Omega_1/2)} W_1(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{(\omega_0-\Omega_1/2)}^{(\omega_0+\Omega_1/2)} W_1(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{(\omega_0-\Omega_1/2)}^{(\omega_0+\Omega_1/2)} W_1(\omega)cos\,\omega\tau d\omega =$$

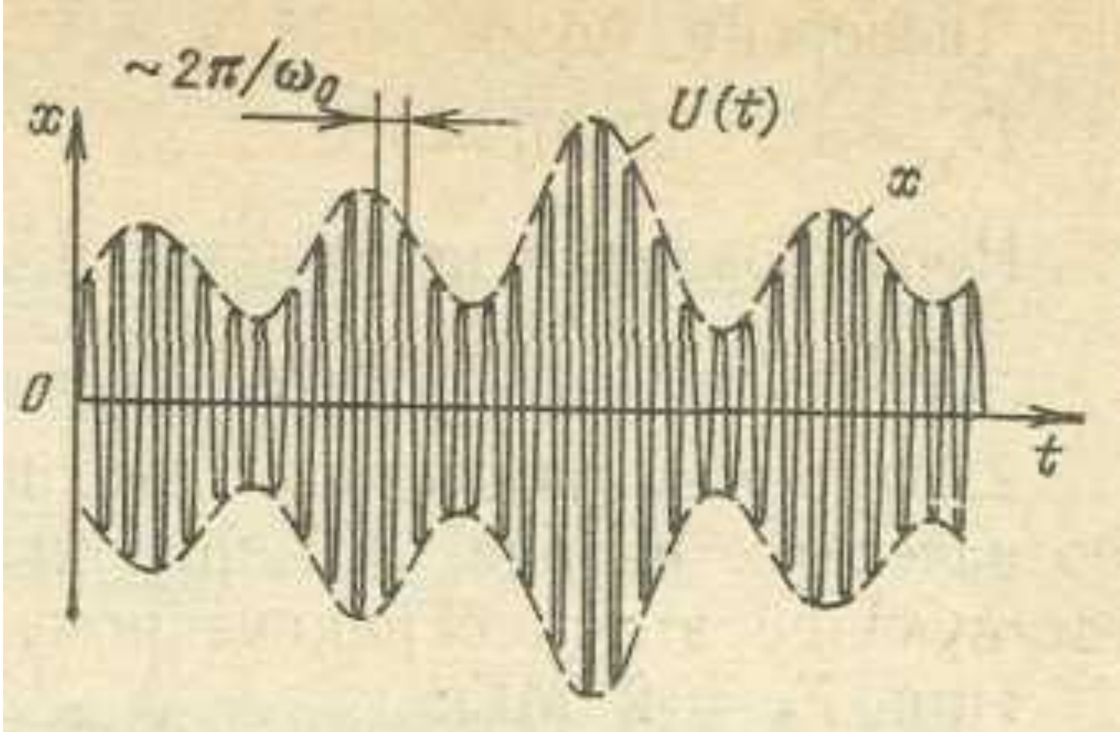
$$= 2\cdot 10^{-7}\frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(\omega_0+\Omega_1/2)\tau}{\tau} - \frac{sin(\omega_0-\Omega_1/2)\tau}{\tau}\right] =$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\frac{1}{\pi\tau}\cdot 2\frac{sin\,\Omega_1\tau}{2}cos\,\omega_0\tau = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{sin\,\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}cos\,\omega_0\tau. \quad (4.43)$$

$$r_3(\tau) = \frac{sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1\tau/2}cos\,\omega_0\tau \quad (4.44)$$




Нормированная корреляционная функция случайного процесса со спектром, равномерным в полосе:
*а*) $|\omega|\leq\omega_1$ и $|\omega|\leq\Omega_1$; *б*) $(\omega_0-\Omega_1/2)\leq|\omega|\leq(\omega_0+\Omega_1/2)$




Итак, шумовое колебание с узкополосным спектром следует представлять высокочастотным колебанием с медленно (по сравнению с частотой $\omega$0) изменяющимися амплитудой и фазой:

$$x(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

где $\omega_0$ – центральная частота спектра шума.

Следует подчеркнуть, что все параметры этого колебания: амплитуда, фаза и частота – являются случайными функциями времени.