Узкополосный случайный процесс

$$x(t) = A(t)cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)cos\psi(t) \tag{4.60}$$

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{4.61}$$

где $y(t)$ – функция, сопряженная по Гильберту исходной функции $x(t)$, а ω_0 выбрана таким образом, что фаза $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно-зависящего от t.

1. Огибающая

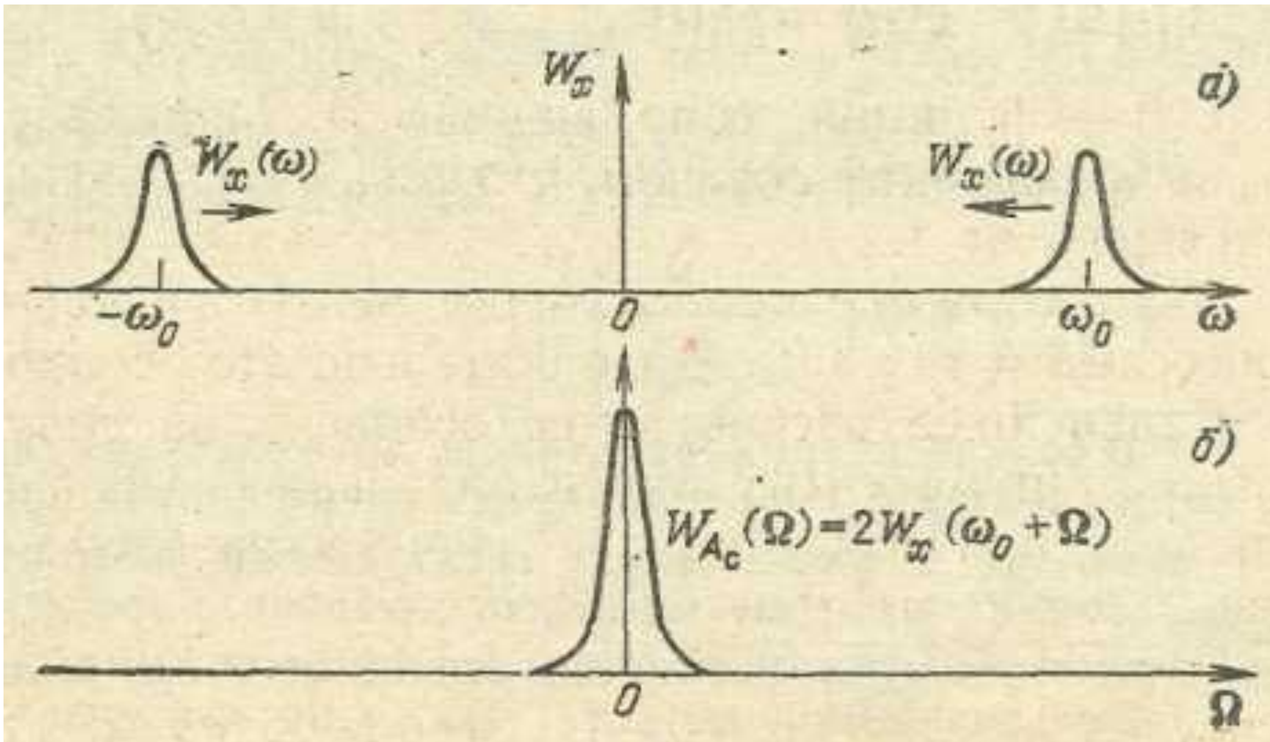
$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos\theta(t)\cos\omega_0 t - A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0 t = \\ &= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{4.60`}$$

$$A_c(t) = A(t)cos\,\theta(t), \quad A_s(t) = A(t)sin\,\theta(t) \tag{4.62}$$

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \theta(t) = arctg\; A_s / A_c \tag{4.63}$$

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)], \quad A_c(t) = A(t)\cos\theta(t)$$

$$W_{A_c}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega) \tag{4.64}$$



Спектры: *а*) узкополосного процесса с центральной частотой ω_0;
б) косинусной составляющей комплексной огибающей

Аналогично для $A_s(t)$ и $W_{A_s}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega)$

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_x^2$$

$$\langle A^2 \rangle = \overline{A^2(t)} = D_{A_c} + D_{A_s} = 2D_x = 2\sigma_x^2 \qquad (4.65)$$

$$w(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$$w(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_x^2}\right) \qquad (4.66)$$

Взаимная корреляция между функциями $A_c(t)$ и $A_s(t)$ равна нулю при $\tau=0$. Действительно, возводя (4.60') в квадрат и усредняя по множеству, получаем

$$M\{x^2(t)\} = M\{[A_c(t) cos\, \omega_0 t - A_s(t) sin\, \omega_0]^2\} =$$

$$= M\{A_c^2(t)\} cos^2\, \omega_0 t + M\{A_s^2(t)\} sin^2\, \omega_0 t - 2M\{A_c(t) A_s(t)\} sin\, \omega_0 t\, cos\, \omega_0 t$$

$$R_x(0) = D_x$$

$$M\{A_c^2(t)\} = M\{A_s^2(t)\} = D_x = R_{A_s}(0)$$

$$M\{A_c(t) A_s(t)\} = R_{A_c A_s}(0)$$

$$R_x(0) = R_{A_c}(0) - R_{A_c A_s}(0) sin\, 2\omega_0 t = \sigma_x^2 - R_{A_c A_s}(0) sin\, 2\omega_0 t \qquad (4.67)$$

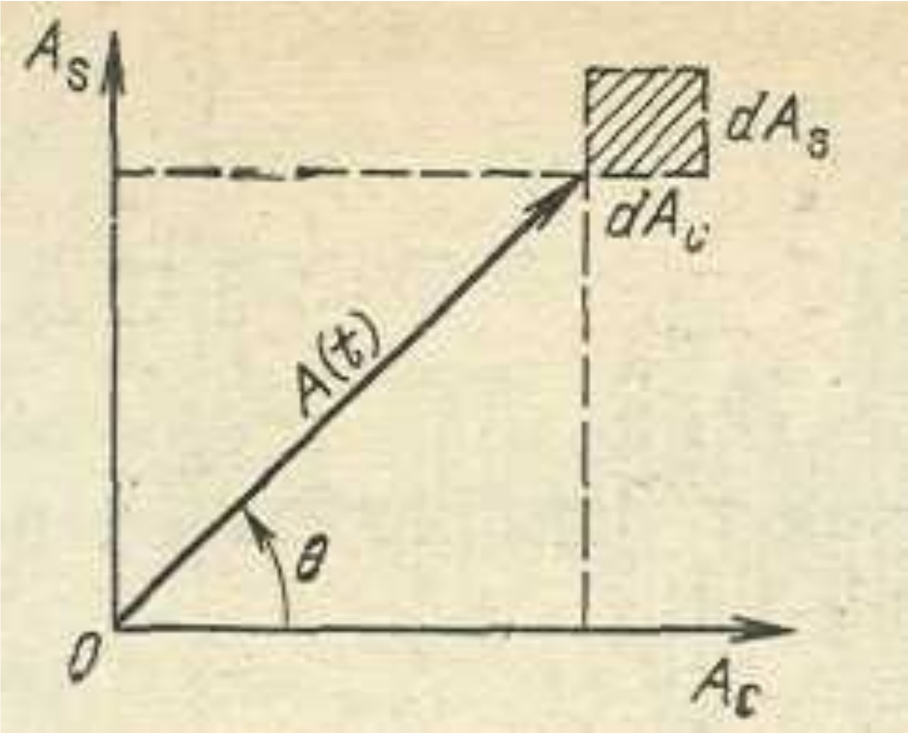
Следовательно, $R_{A_c A_s}(0) = 0$

Итак, $A_c(t)$ и $A_s(t)$, отсчитываемые в один и тот же момент времени, – статистически независимые величины. Поэтому совместную плотность вероятности $w(Ac,As)$ можно определить выражением

$$w(A_c,\mathrm{A_s}) = w(A_c)w(\mathrm{A_s}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} exp\left(\frac{-A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{4.68}$$

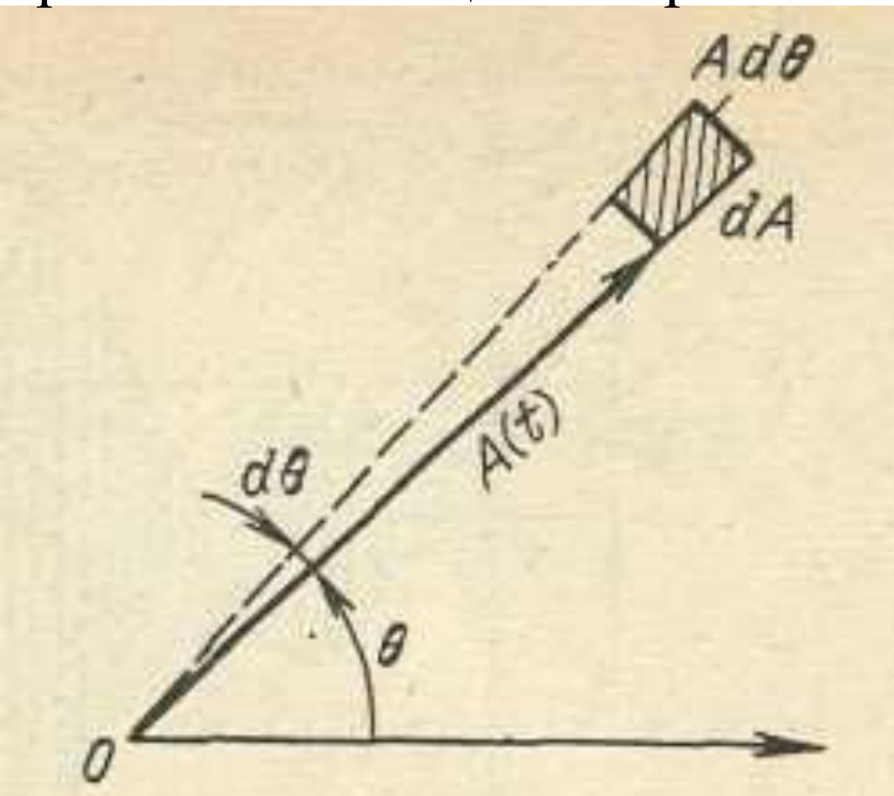
Это положение вытекает также из соотношения (4.65), показывающего, что средний квадрат огибающей $A(t)$ является аддитивной суммой средних квадратов функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$

Вероятность того, что конец вектора $A(t)$ лежит в прямоугольнике $dA_c dA_s$ равна произведению вероятностей пребывания A_c в интервале dA_c и A_s в интервале dA_s:



$$w(A_c)dA_c w(A_s)dA_s = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA_c dA_s$$

При переходе от прямоугольных координат к полярным площадь заштрихованного на рис. 4.15 элемента будет $Ad\theta dA$, а вероятность пребывания конца вектора в этом элементе равна



$$\frac{1}{2\pi\sigma_x^2} exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)Ad\theta dA$$

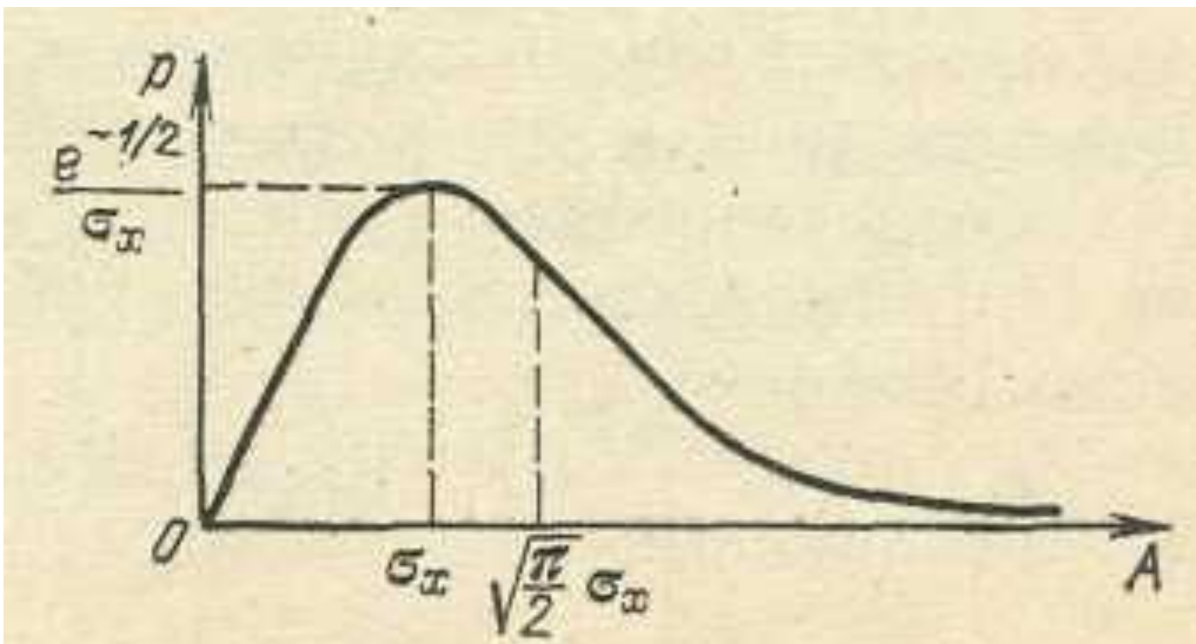
Из этого выражения следует, что двумерная плотность вероятности

$$w(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \qquad (4.69)$$

Интегрируя по переменной θ, получаем одномерную плотность вероятности

$$w_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w(A,\theta)\, d\theta = \frac{A}{\sigma_x^2} exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad 0 < A < \infty \tag{4.70}$$

Распределение огибающей, характеризуемое плотностью вероятности (4.70), называется ***распределением Рэлея***

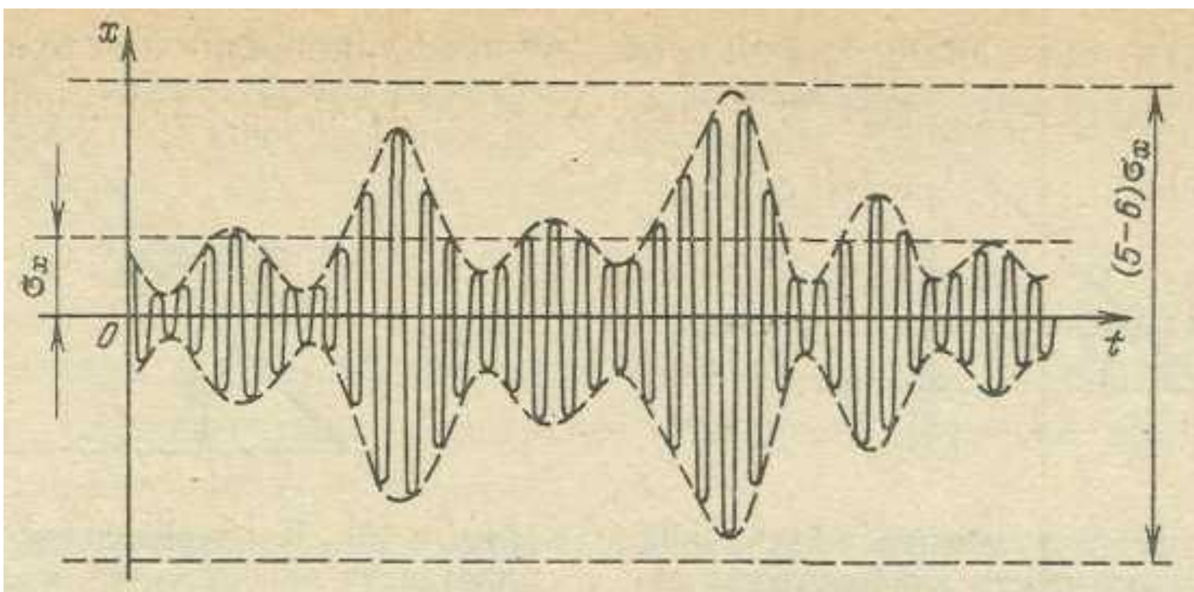


$$M\{A\}=\int_0^\infty A w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_x \tag{4.71}$$

$$M\{A^2\}=\int_0^\infty A^2 w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^3 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=2\sigma_x^2 \tag{4.72}$$

$$P(A>C)=\int_C^\infty w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=\exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{4.73}$$

$$P(A<C)=1-\exp\left(-C^2/2\sigma_x^2\right) \tag{4.74}$$



$$K_A(\tau)=\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0^2(\tau)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right]^2 r_0^{2n}(\tau)\right\} \quad (4.75)$$

$$r_x(\tau)=R_x(\tau)/\sigma_x^2=r_0(\tau)cos\,\omega_0\tau \quad (4.76)$$

Так как $r_0 \leq 1$

$$K_A(\tau)\approx\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1+\frac{1}{4}r_0^2(\tau)\right] \quad (4.77)$$

$$W_A(\Omega)=\frac{\pi\sigma_x^2}{2}2\pi\delta(\Omega)+\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}r_0^2(\tau)e^{-i\Omega\tau}d\tau \quad (4.78)$$

2. Фаза

$$w_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^\infty A\,exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^\infty \frac{1}{2}exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)d\left(A^2\right) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \theta \le \pi. \tag{4.79}$$

$$w(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2}exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) = \left[\frac{A}{\sigma_x^2}exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi}\right) = w_A(A)w_\theta(\theta)$$

Произведение вида $x=A\cos\theta$, в котором A и θ – независимые случайные величины, причем A распределена по Рэлею, а θ равновероятна в интервале (–π, π), обладает нормальной плотностью вероятности

Корреляционная функция фазы

$$R_{\theta}(\tau)=\frac{\pi}{2}r_0(\tau)+\frac{\pi}{4}r_0^2(\tau)+\frac{\pi}{12}r_0^3(\tau)+\ldots \tag{4.80}$$

$$D_{\theta}=\int_{-\pi}^{\pi}\theta^2 w_{\theta}(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3} \tag{4.81}$$

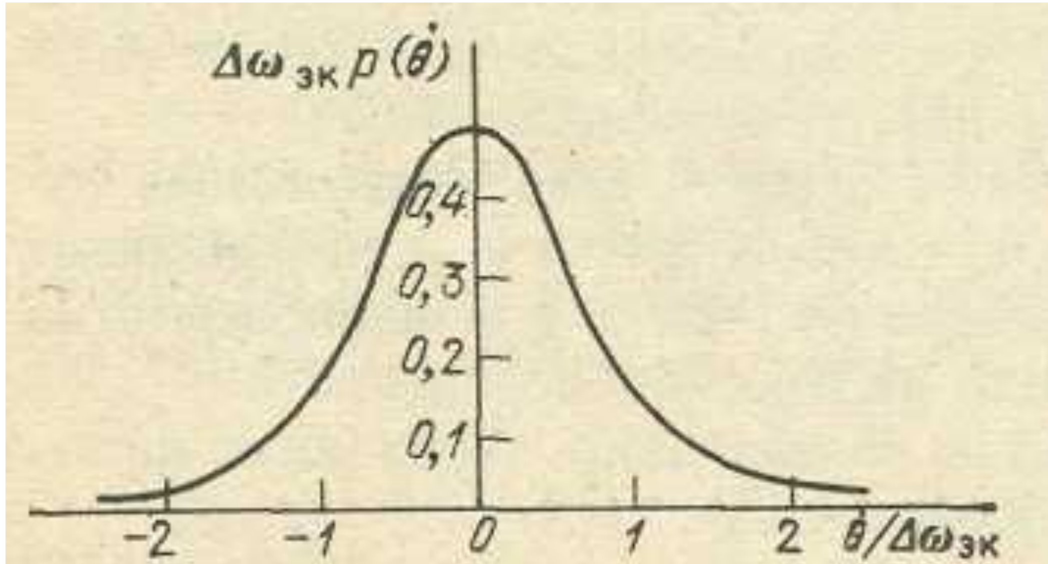
3. Частота

$$\omega(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}=\omega_0+\frac{d\theta(t)}{dt}=\omega_0+\theta'(t)$$

$$w(\theta')=\left[2\Delta\omega_{экв}\left(1+\frac{\theta'^2}{(\Delta\omega_{экв})^2}\right)^{3/2}\right]^{-1} \tag{4.82}$$

$$(\Delta\omega_{экв})^2=\int_0^{\infty}(\omega-\omega_0)^2 W(\omega)d\omega\Big/\int_0^{\infty}W(\omega)d\omega \tag{4.83}$$

$|\theta'|$



$$\left|\theta'\right| = \Delta\omega_{эк}$$