Геометрическое представление сигналов

Пространство сигналов

$$s(t) = \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(t) \qquad (4.91)$$

$$E = \|s\|^2 = \int_T s^2(t)\,dt \qquad (4.92)$$

$$\|s\|^2 = \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 \|\varphi_n\|^2 \qquad (4.93)$$

$$\|s\|^2 = \|\vec{S}\| = \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 = E \qquad (4.93`)$$

$$\vec{S} = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right) \tag{4.94}$$

Всем сигналам с одинаковой энергией, ***независимо от их формы***, соответствуют точки, расположенные на многомерной сфере радиуса $E^{1/2}$.

$$E = \int_T s^2(t)\,dt$$

$$c_n = \int_T s(t)\varphi_n(t)\,dt$$

$$\vec{S} = \left[s(\Delta t), s(2\Delta t), \ldots, s(m\Delta t)\right] \tag{4.95}$$

«расстояние между сигналами»

$$\vec{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \qquad \vec{Y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

Скалярное произведение

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \beta_n \tag{4.96}$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = \int_T x(t) y(t) dt. \tag{4.97}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n(t) \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{m} \beta_n \varphi_n(t)$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = B_{xy}(0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \beta_n \tag{4.98}$$

$$(\vec{X}, \vec{X}) = B_{xx}(0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^2 = \left\| \vec{X} \right\|^2 = E_x \tag{4.99}$$

$$d_{xy} = \left\| \vec{X} - \vec{Y} \right\|$$

$$d_{xy} = \left\| \vec{X} - \vec{Y} \right\| = \left(\vec{X} - \vec{Y}, \vec{X} - \vec{Y} \right)$$

$$d_{xy} = \left(\vec{X}, \vec{\mathrm{X}} \right) + \left(\vec{Y}, \vec{Y} \right) - \left(\vec{Y}, \vec{X} \right) - \left(\vec{X}, \vec{Y} \right) = E_x + E_y - 2E_{xy}$$

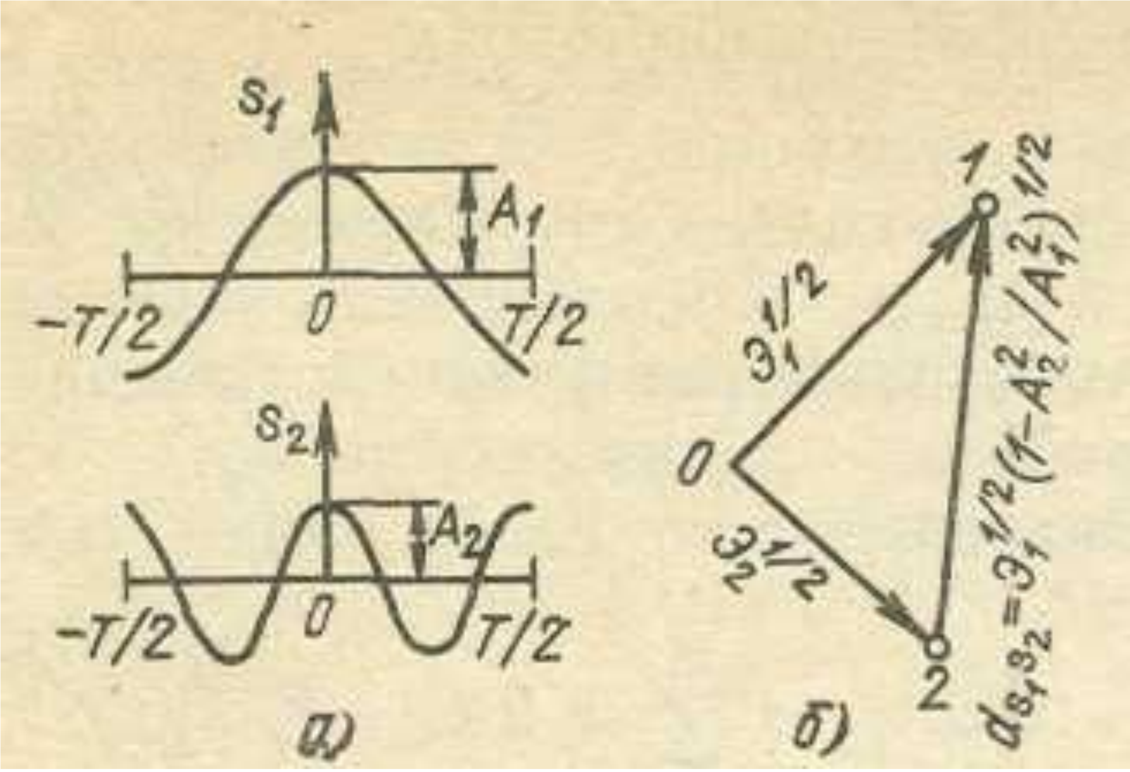
$$d_{xy} = B_{xx}(0) + B_{yy}(0) - 2B_{xy}(0) = E_x + E_y - 2E_{xy} \tag{4.100}$$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y} \right) = \left\| \vec{X} \right\| \cdot \left\| \vec{Y} \right\| cos\,\gamma$$

$$cos\,\gamma = \frac{\left(\vec{X}, \vec{Y} \right)}{\left\| \vec{X} \right\| \cdot \left\| \vec{Y} \right\|} \tag{4.101}$$

$$cos\,\gamma = \frac{B_{xy}(0)}{E_x^{1/2} E_y^{1/2}} = \frac{E_{xy}}{E_x^{1/2} E_y^{1/2}} \tag{4.102}$$

Итак, расстояние между сигнальными точками и угол между соответствующими им векторами полностью определяются энергиями сигналов $x(t)$, $y(t)$ и энергией взаимодействия между ними.



$$d_{s_1 s_2}^2 = E_1 + E_2 = \frac{T}{2}\left(A_1^2 + A_2^2\right) = E_1\left(1 + A_2^2 / A_1^2\right),$$

$$d_{s_1 s_2} = E_1^{1/2}\left(1 + A_2^2 / A_1^2\right)^{1/2}.$$

$$s_1(t) = A_0 \cos \omega t\,, \quad |t| \le T/2,$$
$$s_2(t) = A_0 \cos(\omega t - \theta_0), \quad |t| \le T/2$$

$$E_1 = E_2 = A_0^2 T/2$$

$$B_{s_1 s_2}(0) = \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t) dt = A_0^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \theta_0) =$$
$$= \frac{A_0^2 T}{2} \cos \theta_0 .$$

Рассмотрим частные случаи $\qquad \theta_0 = 0, \quad \pi/4, \quad \pi/2, \quad \pi.$

1. $\qquad \theta_0 = 0; B_{s_1s_2}(0) = A_0^2 T/2 = E_1; d_{s_1s_2} = 0; cos\,\gamma = 0;$

Сигнальные точки 1 и 2 совпадают.

2. $\qquad \theta_0 = \pi/4; B_{s_1s_2}(0) = \dfrac{A_0^2 T}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{E_1}{\sqrt{2}};$

$$d_{s_1s_2}^2 = 2E_1 - 2B_{s_1s_2}(0) = 2E_1\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) = 0{,}293; d_{s_1s_2} = 0{,}54$$

$$cos\,\gamma = B_{s_1s_2}(0)/E_1 = 1/\sqrt{2}; \gamma = \pi/4.$$

3. $\qquad \theta_0 = \pi/2; B_{s_1s_2}(0) = 0; d_{s_1s_2}^2 = 2E_1; d_{s_1s_2} = \sqrt{2}E_1^{1/2};$

$$cos\,\gamma = 0; \gamma = \pi/2.$$

4. $\qquad \theta_0 = \pi; B_{s_1s_2}(0) = -E_1; d_{s_1s_2}^2 = 2E_1 - (-2E_1) = 4E_1; d_{s_1s_2} = 2E$

$$cos\,\gamma = -1; \gamma = \pi.$$

В заключение найдем смещение сигнальной точки, соответствующее сдвигу сигнала во времени на τ. Для этого требуется определить расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t) = s_1(t-\tau)$.

$$B_{s_1 s_2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_1(t-\tau) dt = B_{s_1}(\tau)$$

$$d_{s_1 s_2} = \{2[B_{s_1}(0) - B_{s_1}(\tau)]\}^{1/2}$$

Если под $s_1(t)$ подразумевается, например, импульс с длительностью $\tau_и$, то при $\tau > \tau_и$ корреляционная функция $B_{s_1}(\tau) = 0$ и $d_{s_1 s_2} = [2B_{s_1}(0)]^{1/2}$.

Иными словами, неперекрывающиеся во времени сигналы ***ортогональны***.