Энергетические характеристики

- Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения *s*(*t*):

$$p(t) = s^2(t)$$

Энергия сигнала на интервале t_2, t_1 определяется как интеграл от мгновенной мощности:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt$$

Отношени
е

$$\frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt = \overline{s^2(t)} = P_{ср}$$

имеет смысл средней на интервале t_2, t_1 мощности сигнала.

Разложение колебаний по системам ортогональных функций

$$s(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(t)$$

Если совокупность функций

$$\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots,\phi_n(t),\ldots \qquad (1.1)$$

удовлетворяет на некотором отрезке времени ($t1$, $t2$) условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m(t)dt=0, \quad \text{при} \quad n\neq m \qquad (1.2)$$

то ее называют системой ортогональных на отрезке (t_1, t_2) функций. При этом предполагается, что никакая из функций системы (1.1) не равна тождественно нулю, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t)dt\ 0$$

Величина

$$\|\phi_n\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t)\,dt} \qquad (1.3)$$

называется нормой функции $\phi_n(t)$

Функция $\phi_n(t)$, для которой $\|\phi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t)\,dt = 1$,

называется ***нормированной***, а соответствующая система ортогональных нормированных функций называется ***ортонормированной*** (***ортонормальной***).

Заданное колебание можно ***разложить по системе ортогональных функций***, если можно записать

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(t), \qquad (1.4)$$

и при конечном числе членов ряда разница между

(1.5)

$s(t)$ и $\sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(t)$ *будет* достаточна мала.

Одним из возможных критериев величины этой разности является интеграл от квадрата разности колебания и его разложения:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{n} x_n \phi_n(t) \right]^2 dt \qquad (1.5)$$

Если для непрерывной функции $s(t)$ можно выбрать x_n так, что путем увеличения количества членов в ряде Δ можно сделать сколь угодно малым, то совокупность ортогональных (ортонормальных) функций (1.1) называют ***полной***. Ряд (1.4) называют в этом случае ***сходящимся в среднем***.

Для определения коэффициентов c_n, обеспечивающих минимум Δ, умножим обе части (1.4) на $\phi_n(t)$
и произведем
интегрирование:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\phi_n(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\sum_m c_m\phi_m(t)dt\,.$$

.

В силу свойств ортогональности в правой части уравнения все слагаемые при $m\neq n$ обращаются в ноль, остается лишь член, соответствующий $n=m$. В результате получаем формулу для любого коэффициента c_n

$$c_n=\frac{1}{\|\phi_n(t)\|^2}\int_{t_1}^{t_2} s(t)\phi_n(t)dt \qquad (1.6)$$

Разложение периодических колебаний в ряд Фурье по системе тригонометрических функций

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}},$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}t, \qquad (1.7)$$

$$\phi_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\phi_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\frac{2\pi}{T}t,$$

……………………………….

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\frac{2}{T}t+b_n\sin n\frac{2}{T}t\right]$$

или

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\frac{2}{T}t+\theta_n\right), \tag{1.8}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\cos n\omega_1 t\,dt;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\sin n\omega_1 t\,dt; \tag{1.9}$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2};$$

$$\theta_n=-\operatorname{arctg} b_n/a_n.$$

Ряд Фурье в комплексной форме

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n).$$

$$a_n = A_n \cos\theta_n, \quad b_n = A_n \sin\theta_n$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = -\,\mathrm{arctg}\, b_n / a_n. \tag{1.10}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Положим $\alpha = n\omega_1 t + \theta_n$ и обозначим $\dot{A}_n = A_n e^{i\theta_n}.$ (1.11)

Эту величину назовем ***комплексной амплитудой n-й гармоники***.
Она содержит данные и об амплитуде и о начальной фазе *n-й* гармоники.

После этого ряд (1.8) можно записать в таком виде:

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{in\omega_1 t}, \qquad (1.12)$$

где $\dot{A}_{-n} = A_n e^{-i\theta_n} = A_n$ - величина, комплексно-сопряжённая $\dot{A}_n$

Комплексную амплитуду $\dot{A}_n$ можно вычислить непосредственно по заданному
$s(t)$, минуя вычисления a_n и b_n и применение выражений (1.10). Действительно,

$$\dot{A}_n = A_n e^{i\theta_n} = A_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = a_n - ib_n.$$

Подставляя сюда (1.9) и объединяя интегралы, получаем

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt. \qquad (1.13)$$

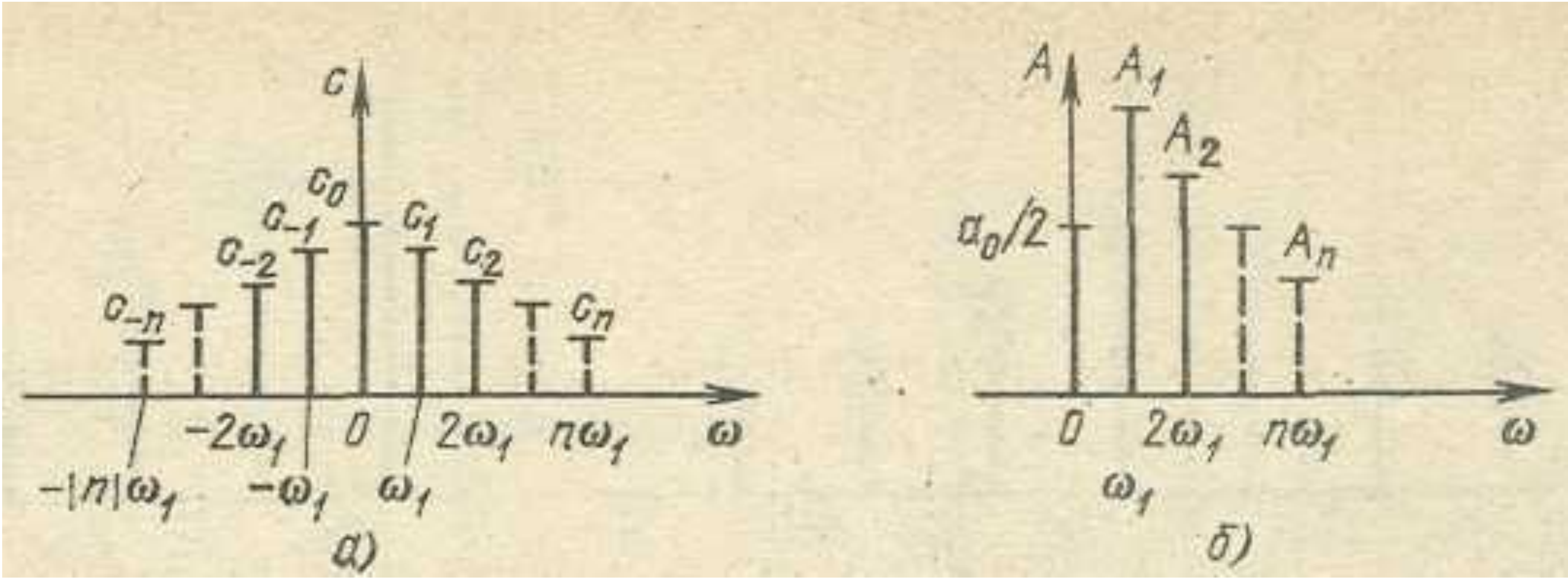
Формулы (1.12) и (1.13) можно называть ***парой преобразований Фурье***. Вторая из них позволяет найти ***спектр***, т. е. совокупность гармонических составляющих, образующих в сумме $s(t)$; первая – вычислить $s(t)$, если заданы гармонические составляющие (гармоники)

Формулу (1.12) можно представить в другом виде

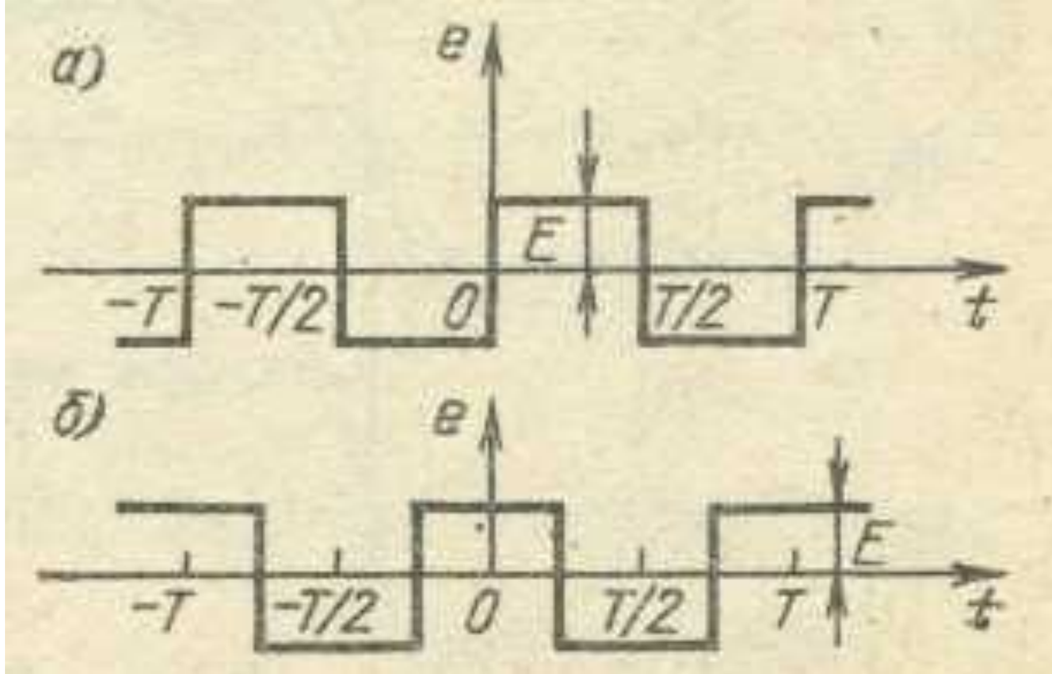
$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n e^{in\omega_1 t}. \quad (1.12a)$$

Две характеристики – амплитудная и фазовая, т. е. модули и аргументы комплексных коэффициентов ряда Фурье, полностью определяют структуру частотного спектра периодического колебания.

Спектр периодической функции называется ***линейчатым*** или ***дискретным***, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам 0, ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$ и т. д.



Коэффициенты комплексного (а) и тригонометрического (б) рядов Фурье периодической функции времени



$$e(t) = E \quad \text{при} \quad 2m\frac{T}{2} < t < (2m+1)\frac{T}{2};$$

$$e(t) = -E \quad \text{при} \quad (2m+1)\frac{T}{2} < t < 2(m+1)\frac{T}{2},$$

(m − целое число)

a)

(1.13): $$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e(t)\, e^{-in\omega_1 t}\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} (-E)\, e^{-in\omega_1 t}\, dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} E\, e^{-in\omega_1 t}\, dt =$$

$$= -\frac{2E}{T}\,\frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1}\Bigg|_{-T/2}^{0} + \frac{2E}{T}\,\frac{e^{-in\omega_1 t}}{-in\omega_1}\Bigg|_{0}^{T/2} = \frac{2E}{in\pi}(1-\cos n\pi).$$

$$\dot{A}_1 = \frac{2E}{i\pi}(1+1) = \frac{4E}{\pi}e^{-i\pi/2} \quad (-i = e^{-i\pi/2}).$$

$$\dot{A}_3 = \frac{2E}{i3\pi}(1+1) = \frac{4E}{3\pi}e^{-i\pi/2},$$

$$\dot{A}_5 = \frac{2E}{i5\pi}(1+1) = \frac{4E}{5\pi}e^{-i\pi/2},$$

....

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4E}{3\pi}\cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4E}{5\pi}\cos\left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots =$$

$$\frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots\right) \quad (1.13)$$

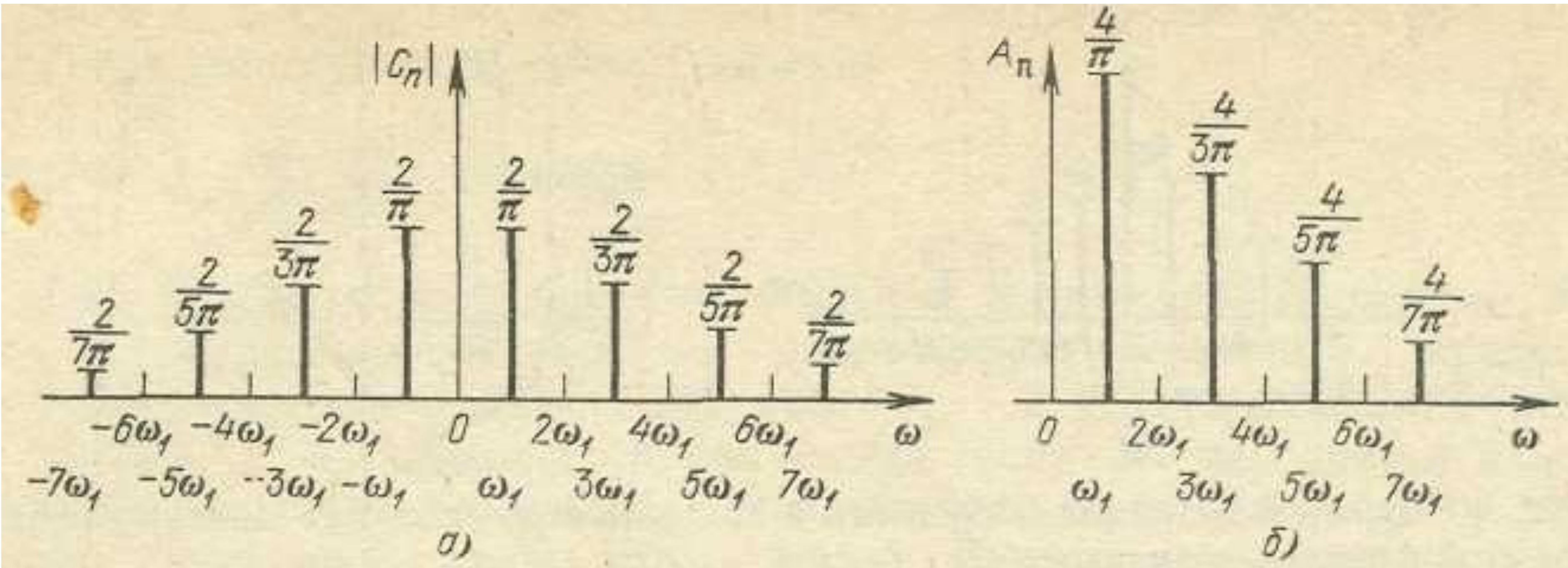
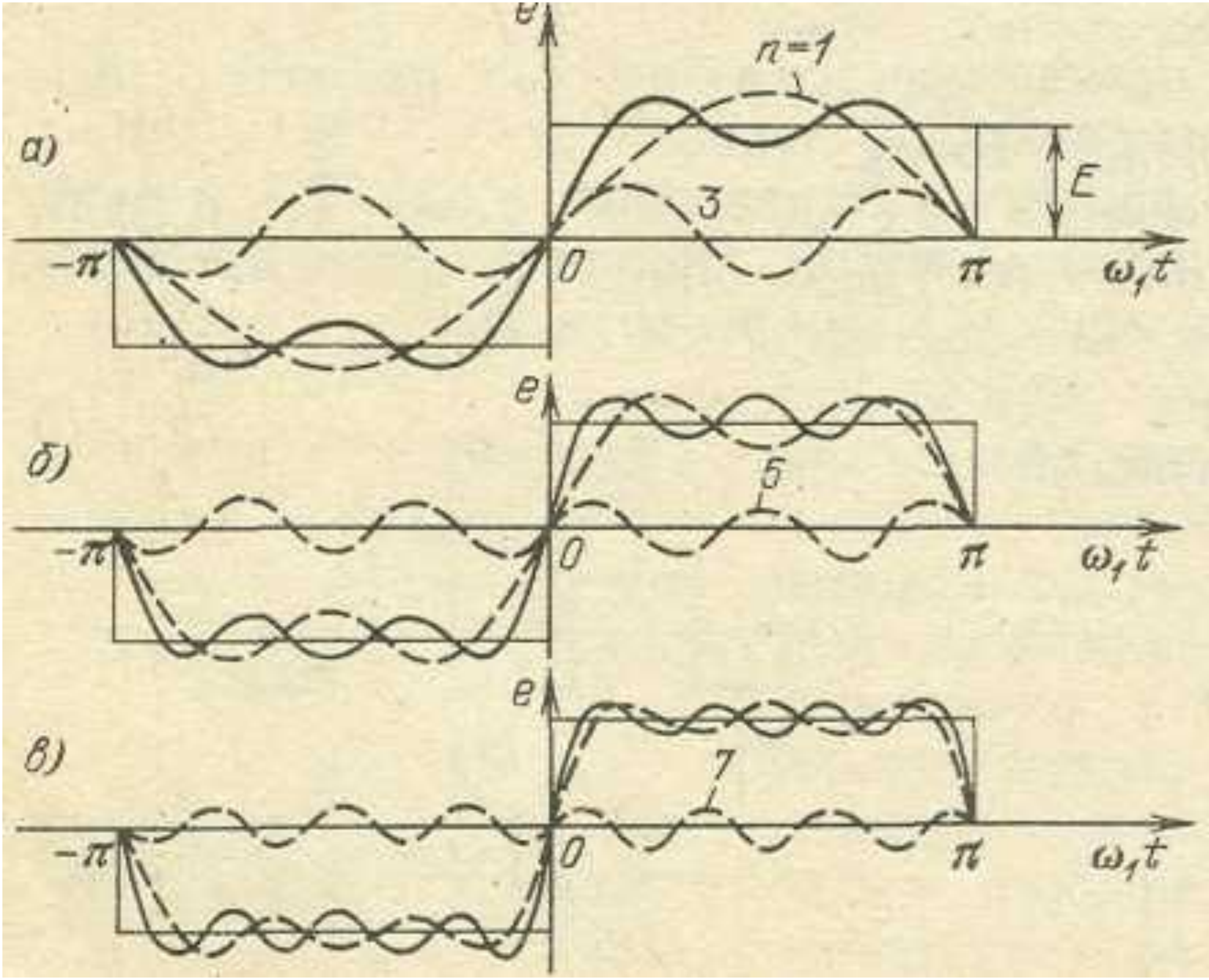
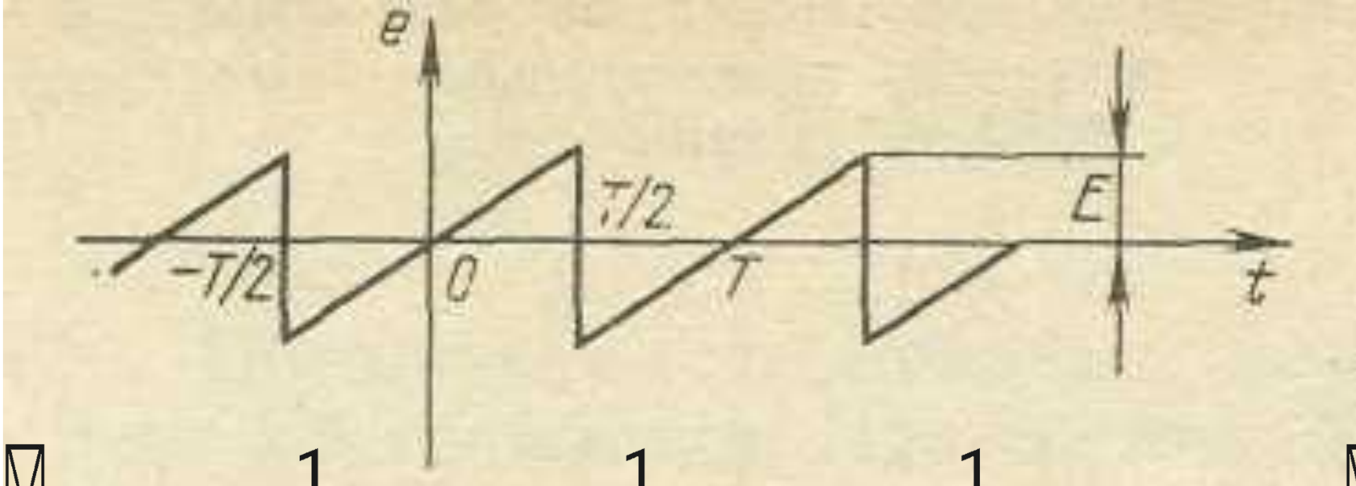


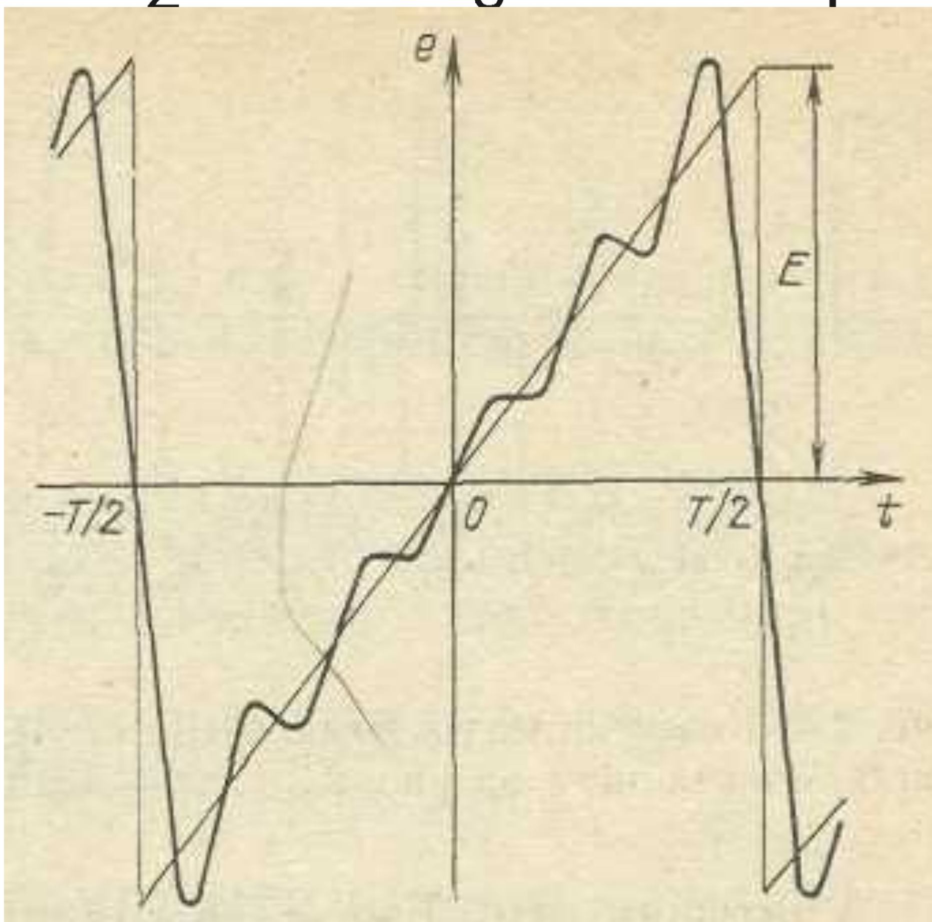
Рис. 3. Коэффициенты комплексного (*а*) и тригонометрического (*б*) ряда Фурье

б) $$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t - \ldots\right] \qquad (1.14)$$

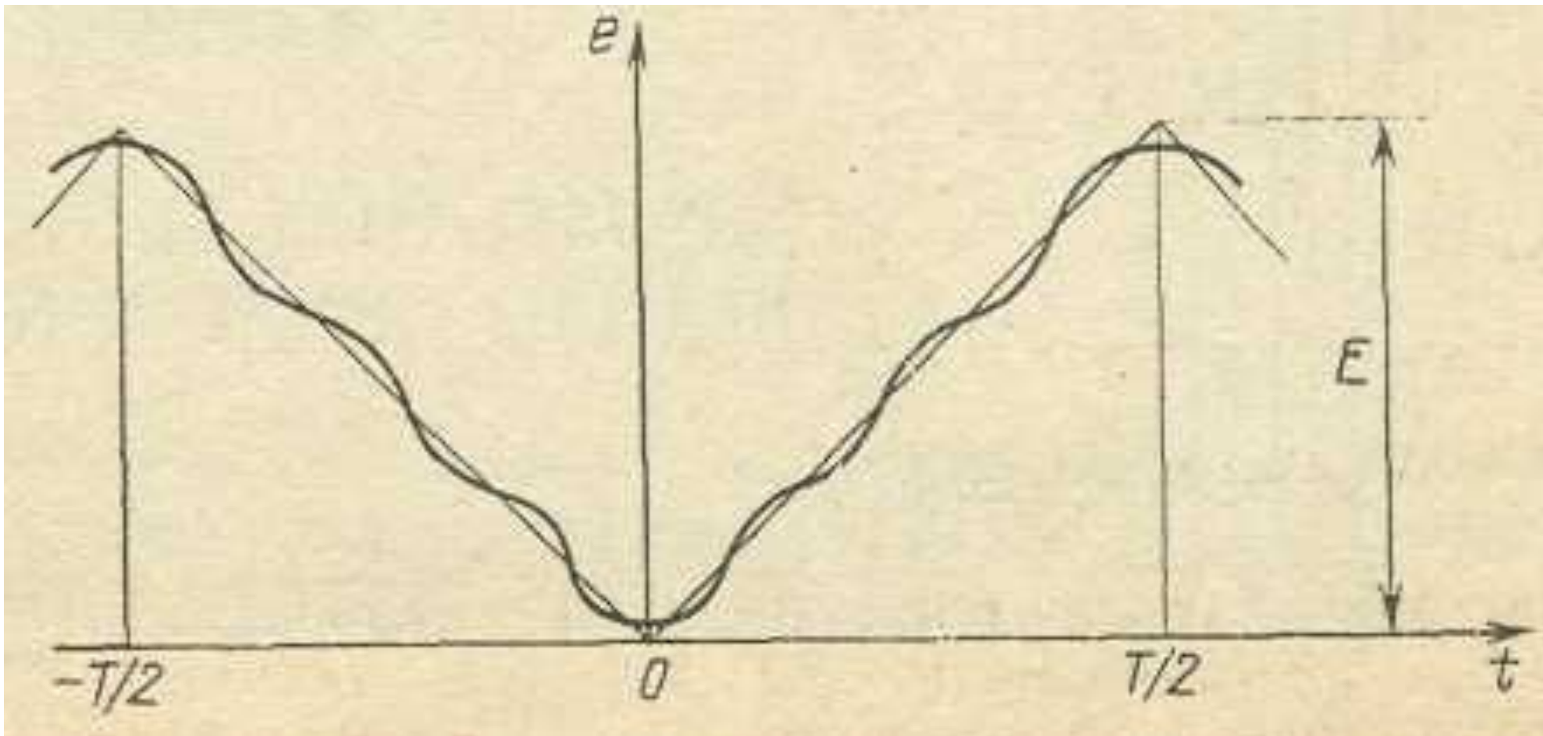


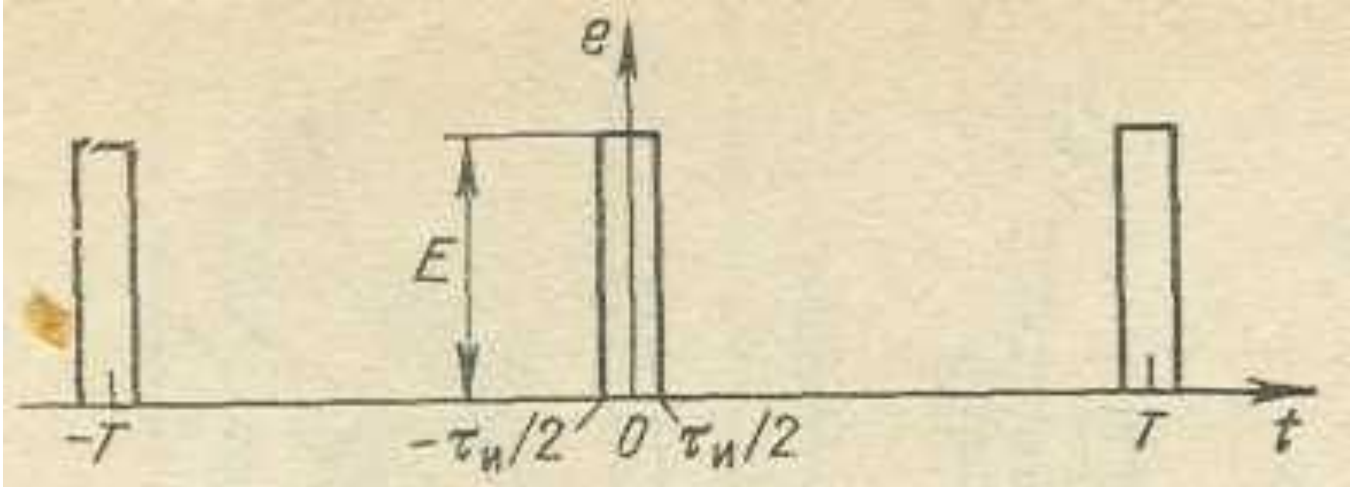


$$e(t) = \frac{2E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t - \frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t + \ldots\right) \qquad (1.15)$$



$$e(t) = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_1 t + \ldots\right)\right] \qquad (1.16)$$

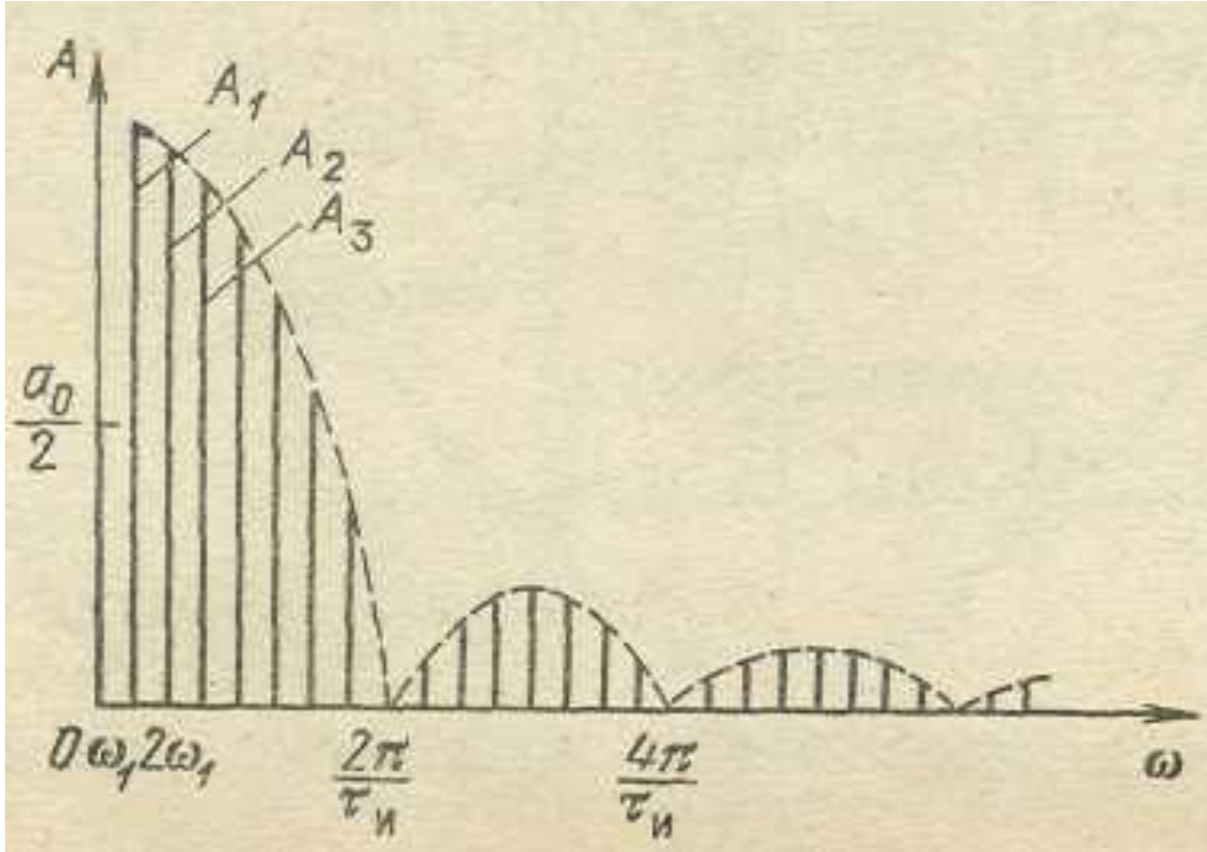




$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e(t)\,dt=\frac{\tau_и}{T}E \qquad (1.17)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e(t)\cos n\omega_1\,dt=\frac{2E}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1\tau_и}{2}. \qquad (1.18)$$

$$e(t)=E\left(\frac{\tau_и}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\omega_1\tau_и}{2}\cos n\omega_1 t\right). \qquad (1.19)$$



$$|a_n| = A_n = \frac{2E}{\pi n}\left|\sin\left(n\pi\frac{\tau_и}{T}\right)\right|. \qquad A_n \approx \frac{2E}{\pi n} n\pi \frac{\tau_и}{T} = E\frac{2\tau_и}{T}.$$

(1.20)

$$s^2(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \qquad (1.21)$$

$$P = r i^2(t) = r\left(I_0^2 + I_1^2/2 + I_2^2/2 + \dots\right)$$