Спектры некоторых неинтегрируемых функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| s(t) \right| dt < \infty. \qquad (2.53)$$

$$s(t) = A_0 cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{A_0 e^{i\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{A_0 e^{-i\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt.$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{A_0}{2} \left[2\pi e^{i\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi e^{-i\theta_0} \delta(\omega + \omega_0) \right] =$$

$$= A_0 \pi \left[e^{i\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\theta_0} \delta(\omega + \omega_0) \right]. \qquad (2.54)$$

Гармоническому колебанию с ***конечной*** амплитудой соответствует ***бесконечно большая*** спектральная плотность при дискретных частотах ω_0 и $-\omega_0$.

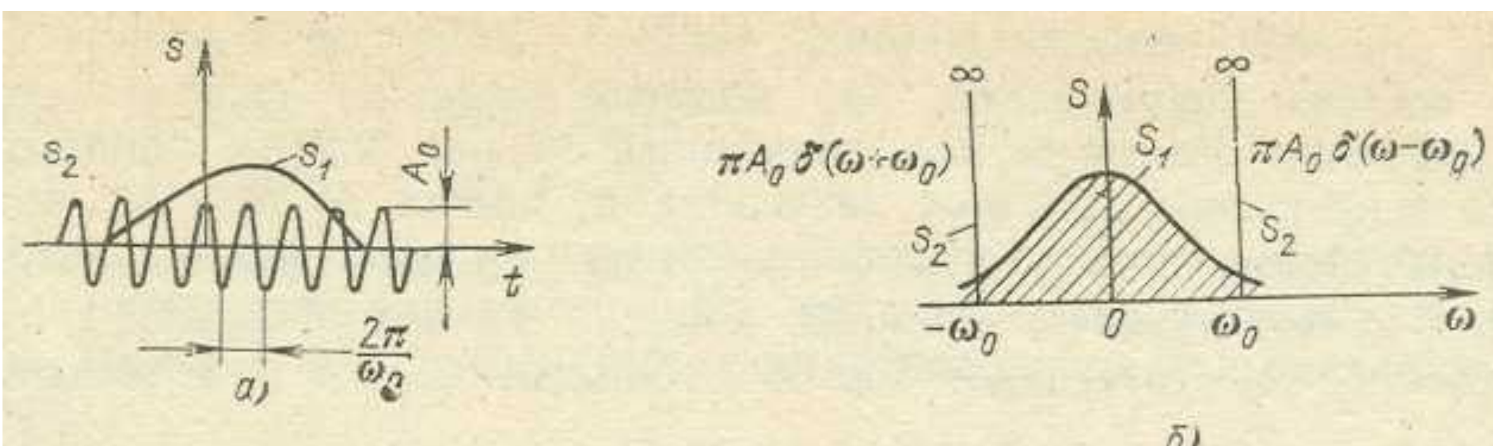
При ω_0 =0

$$\dot{S}(\omega) = A_0 2\pi\delta(\omega). \tag{2.55}$$

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_1 t + \theta_0),$$

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) = A_0 2\pi\delta(\omega) + A_1\pi\left[e^{i\theta_1}\delta(\omega-\omega_1) + e^{-i\theta_1}\delta(\omega+\omega_1)\right] + \\ + A_2\pi\left[e^{i\theta_2}\delta(\omega-\omega_2) + e^{-i\theta_2}\delta(\omega+\omega_2)\right] + \ldots \\ \ldots + A_n\pi\left[e^{i\theta_n}\delta(\omega-\omega_n) + e^{-i\theta_n}\delta(\omega+\omega_n)\right] + \ldots\end{aligned} \tag{2.56}$$

Например, отыскивается спектр суммы двух сигналов: импульсного $s_1(t)$ и гармонического $s_2(t)=A_0 cos\omega_0 t$



Спектральная плотность единичного скачка

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sign(t), \tag{2.57}$$

sign(*t*)– сигнум-функция, равная единице, знак которой изменяется при переходе переменной *t* через нуль.

$$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega. \tag{2.58}$$

Если передаточная функция цепи при ω=0 равна нулю, спектральную плотность можно определять по формуле

$$\dot{S}(\omega) = 1/i\omega. \tag{2.59}$$

Представление сигналов на плоскости комплексной частоты

$$s(t) = s_+(t) + s_-(t)$$

$$e^{-\sigma_1 t} s_+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2.7`)$$

$\dot{S}_+(\omega)$ является спектральной плотностью функции $s_+(t) exp(-\sigma_1 t)$.

Подставим в (2.7') $i\omega = p - \sigma_1$ и $\omega = (p - \sigma_1)/i$:

$$e^{-\sigma_1 t} s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \dot{S}_+\left(\frac{p - \sigma_1}{i}\right) e^{(p - \sigma_1)t} dp,$$

откуда

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \dot{S}_+\left(\frac{p - \sigma_1}{i}\right) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + \infty} L_{s_+} e^{pt} dp, \qquad (2.59)$$

Новая функция $L_{s_+}(p)$, являющаяся не чем иным, как спектральной
плотностью сигнала $s_+(t)exp(-\sigma_1 t)$, определяется выражением

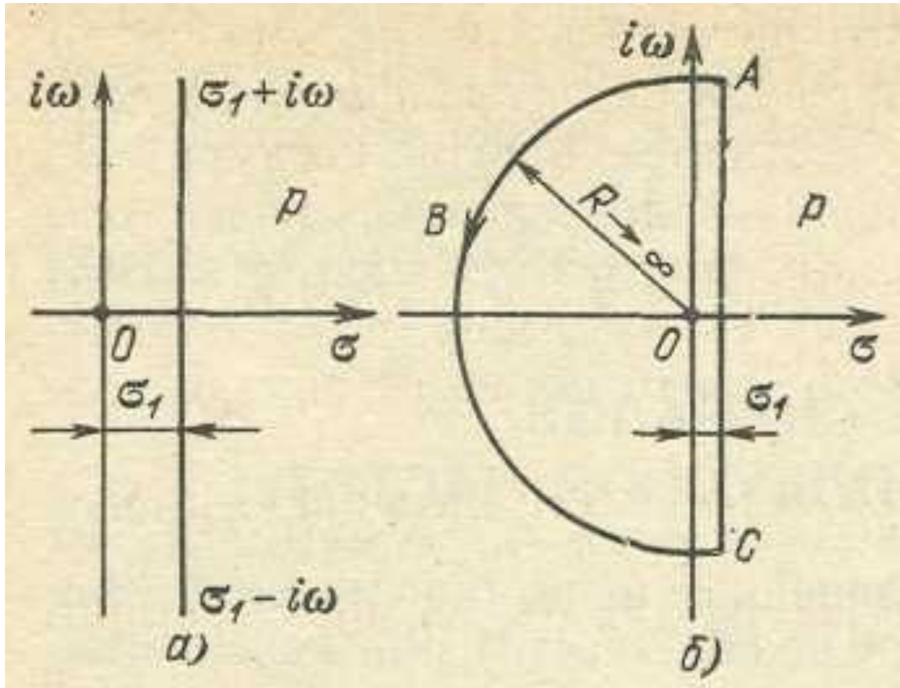
$$L_{s_+}(p) = S_+\left(\frac{p-\sigma_1}{i}\right) = S_+(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\sigma_1 t} s_+(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$L_{s_+}(p) = \int_0^\infty s_+(t) e^{-pt} dt, \qquad (2.60)$$

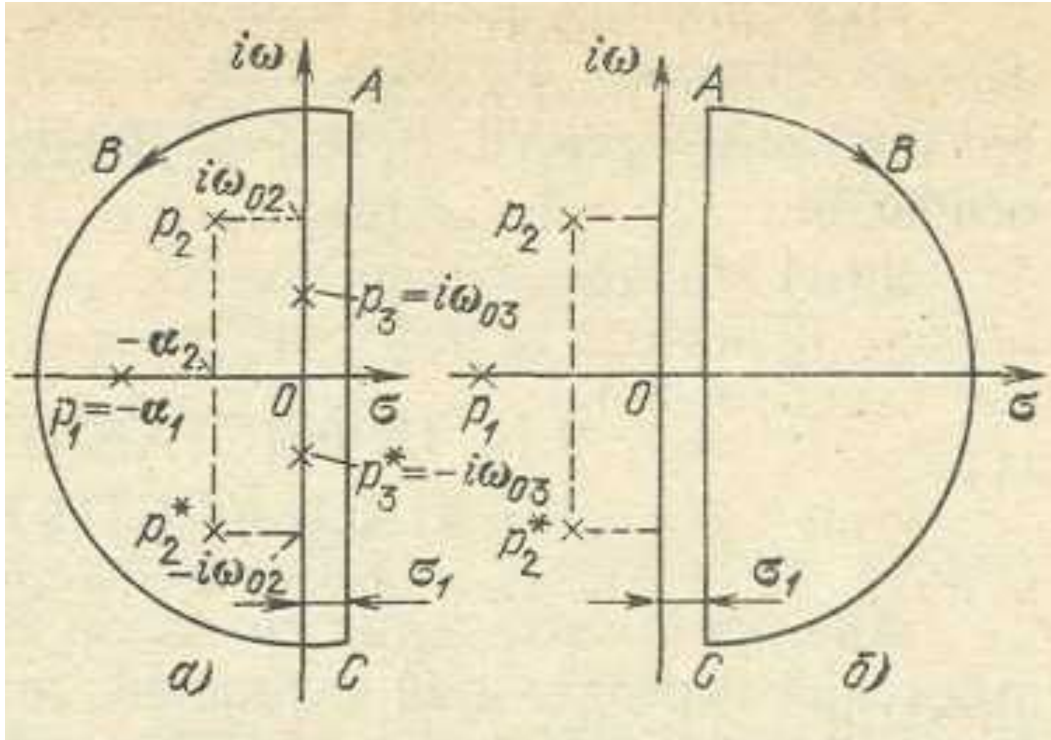
Полученное соотношение называется ***преобразованием*** (односторонним) ***Лапласа функции s+(t).***

Соотношение (2.59) по аналогии с выражением (2.7) часто называют
обратным преобразованием Лапласа.

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + \infty} L_{s_+} e^{pt} dp. \qquad (2.59)$$



Путь интегрирования по прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$ на *p*-плоскости (*а*); образование замкнутого контура добавлением дуги ABC при $R \to \infty$ (*б*)



Замыкание контура интегрирования для представления функции $s_{+}(t)$:

а) при $t > 0$; *б*) при $t < 0$.

При t>0 контур интегрирования охватывает все полюсы подынтегральной функции (лежащие левее прямой $\sigma 1-i\infty$, $\sigma 1+i\infty$) и в соответствии с теорией вычетов интеграл (2.59) определяется как

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + \infty} L_{s_+}(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i}\oint_{ABCA} L_{s_+}(p) e^{pt} dp = \sum res \qquad (2.61)$$

$\sum res$ - сумма вычетов в полюсах подинтегральной функции

При t<0, т.е. при проведении дуги в правой полуплоскости

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + \infty} L_{s_+}(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i}\oint_{ABCA} L_{s_+}(p) e^{pt} dp = 0. \qquad (2.62)$$

Правилах перехода от изображения Лапласа к преобразованию Фурье $\breve{S}(\omega)$ (имеются в виду односторонние преобразования Лапласа).

Если на оси $i\omega$ функция $L_s(p)$ не имеет полюсов, то для такого перехода достаточно в (2.62) положить σ_1=0, т. е. перейти от переменной p к переменной $i\omega$. В противном случае, чтобы избежать ошибки, необходимо определить вклад этих полюсов в спектральную плотность сигнала.

Дело в том, что интегрирование функции $L_s(p)e^{pt}$ по полуокружности в

полюсе $p_1=i\omega$ приводит к гармоническому колебанию с частотой ω_1 и амплитудой 1/2. Спектральная плотность такого колебания, равная $\pi\delta(\omega-\omega 1)$, должна быть прибавлена к сплошному спектру, обусловленному интегрированием по оси ω.

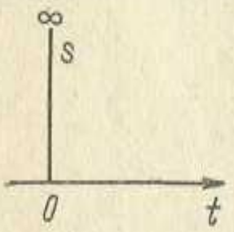
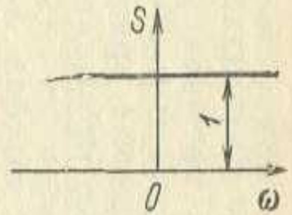
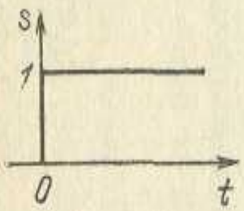
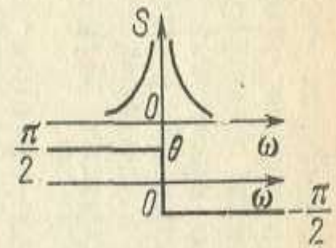
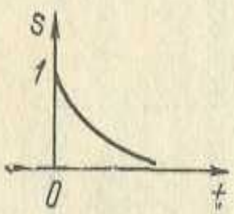
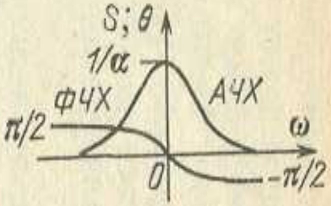
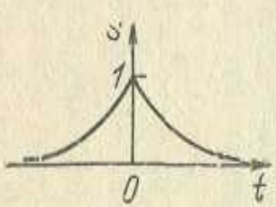
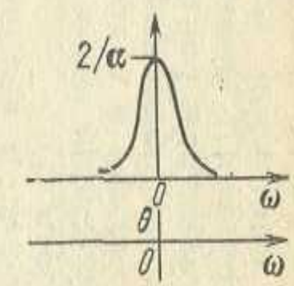
Так, для функции $Ls(p)$ с одним полюсом в точке $p_1=0$ [$s(t)=1$, $t>0$] мы ранее получили

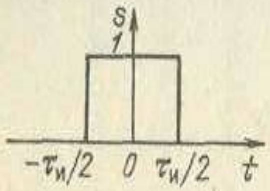
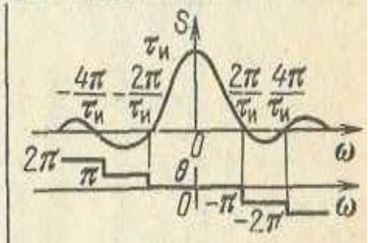
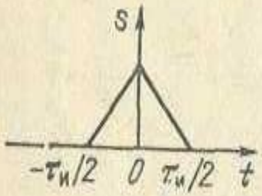
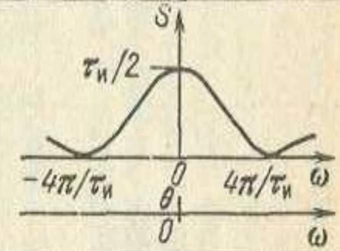
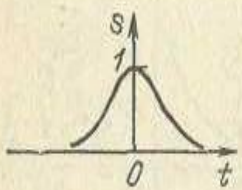
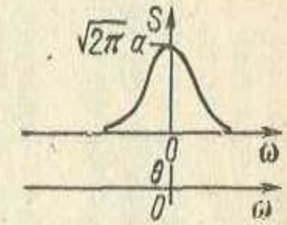
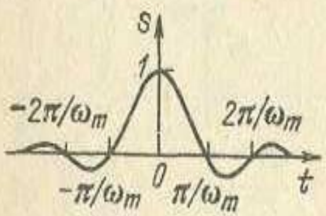
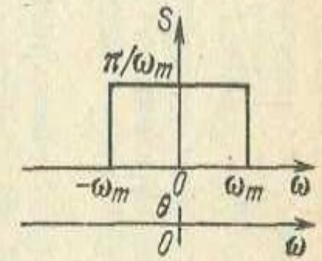
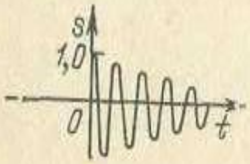
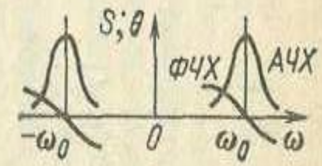
$$\tilde{S}(\omega)=\pi\delta(\omega)+1/i\omega.$$

Для функции $L_s(p)$ с двумя комплексно-сопряженными полюсами $p_{1,2}=\pm i\omega$ [$s(t)=cos\omega_0 t$, $t>0$] спектральная плотность будет

(2.71)

$$\tilde{S}(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \qquad (2.71)$$

Сигнал		Изображение по Лапласу	Спектральная плотность	
	$\delta(t)$	1	1	
	$s(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } t \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } t<0, \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}$	
	$s(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} \text{ при } t \geqslant 0, \\ 0 \quad \text{ при } t<0 \end{cases}$ $\alpha>0$	$\dfrac{1}{\alpha+p}$	$\dfrac{1}{\alpha+i\omega}$	
	$s(t)=e^{-\alpha\|t\|},\ \alpha>0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-p^2}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	

<table>
<tr><td></td><td>$$s(t)=\begin{cases}1 \text{ при } |t| \leqslant \tau_и/2,\\ 0 \text{ при } |t| > \tau_и/2\end{cases}$$</td><td>$$\frac{1}{p}\left(e^{p\tau_и/2}-e^{-p\tau_и}\right)$$</td><td>$$\tau_и\,\frac{\sin\omega\,\tau_и/2}{\omega\tau_и/2}$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$s(t)=\begin{cases}1-|t|/2 \text{ при } |t| \leqslant \tau_и/2,\\ 0 \qquad\quad \text{при } |t| > \tau_и/2\end{cases}$$</td><td>$$-\frac{4}{\tau_и p}\left[1-\frac{1}{2}\times\left(e^{p\tau_и/2}+e^{-p\tau_и/2}\right)\right]$$</td><td>$$\frac{\tau_и}{2}\left(\frac{\sin\omega\tau_и/4}{\omega\tau_и/4}\right)^2$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$s(t)=e^{-t^2/2a^2}$$</td><td>$$\sqrt{\pi}\;a\,e^{a^2p^2/2}$$</td><td>$$\sqrt{\pi}\;a\,e^{-a^2\omega^2/2}$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$s(t)=\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t}$$</td><td>—</td><td>π/ω_m при $|\omega|<\omega_m$
0 при $|\omega|>\omega_m$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$s(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t \text{ при } t\geqslant 0,\\ 0 \qquad\qquad\quad \text{при } t<0\end{cases}$$</td><td>$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha^2)+\omega_0^2}$$</td><td>$$\frac{i\omega+\alpha}{(i\omega+\alpha)^2+\omega^2}$$</td><td></td></tr>
</table>