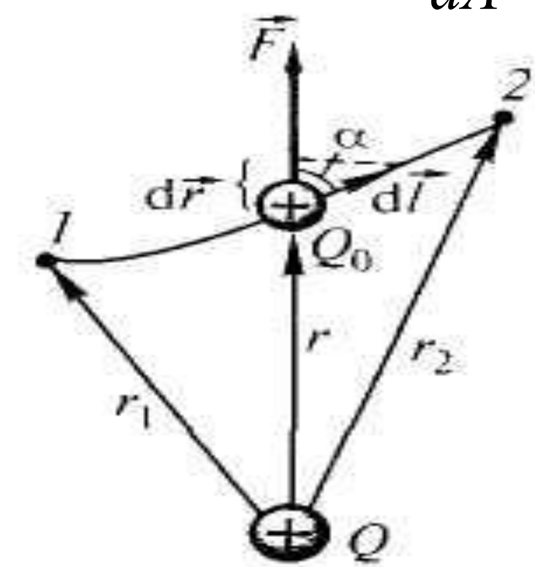
Работа сил электрического поля. Циркуляция вектора напряженности электрического поля.

Рассмотрим электростатическое поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом *Q*. В любой точке этого поля на точечный заряд *Qo* действует кулоновская сила. Тогда работа, совершаемая этой силой над зарядом *Qo* на элементарном перемещении *dl*, или:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r^2}dl\cos\alpha$$



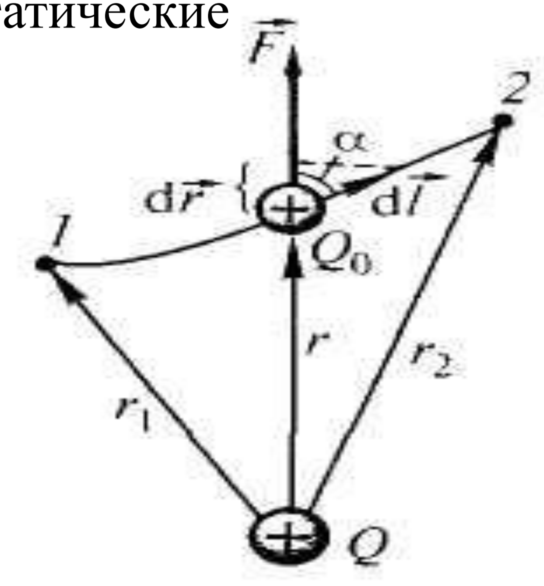
Так как $dl\cos\alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r^2}dr$$

- Работа при перемещении заряда *Qo* вдоль произвольной траектории из точки 1 в точку *2*

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2}\right)$$

Работа, как следует из формулы, не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной *2* точек. Следовательно, *электростатическое поле* точечного заряда является *потенциальным*, а электростатические силы - *консервативными*



Из выражения следует также, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле *по любому замкнутому пути L,* равна нулю, т. е.

$$\oint_L dA = 0$$

Если в электростатическом поле заряда Q переносить *единичный точечный положительный заряд*, то работа сил поля на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна ,

$$\vec{E}d\vec{l} = E_l dl$$

где $E_l = E\cos\alpha$ - проекция вектора E на направление элементарного перемещения.

Тогда:

$$\oint_L dA = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$$

Теорема о циркуляции электростатического поля

- Интеграл $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl$$

называют ***циркуляцией вектора напряженности,***

- а выражение

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$$

- ***теоремой о циркуляции вектора*** *напряженности электростатического поля.*

Следствия теоремы

- 1. Из теоремы следует, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. *Силовое поле **E*** называют ***потенциальным,*** если циркуляция вектора ***E*** по любому замкнутому контуру равна нулю.
- 2. Теорема справедлива только для электростатического поля.
- 3. Линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и кончаются на зарядах (соответственно на положительных или отрицательных) или же уходят в бесконечность.

Предположим, что линия напряженности замкнута. Если выбрать ее в качестве контура интегрирования *L,* то при обходе этого контура в положительном направлении линии напряженности, подынтегральное выражение в интеграле

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}$$

и сам интеграл положительны. Это, однако, противоречит теореме, что и доказывает, что линии напряженности вектора ***E** замкнутыми быть не могут*.

Потенциал электростатического поля разность потенциалов

- Работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд *Qo* в начальной и конечной точках поля, создаваемого зарядом *Q*:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r_2} = W_1 - W_2$$

- Следовательно: потенциальная энергия заряда *Qo* в поле заряда *Q* равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r} + C$$

- Потенциальная энергия *W* определяется с точностью до постоянной *C*. Значение постоянной обычно выбирается так, чтобы при удалении заряда на бесконечность $(r \to \infty)$ потенциальная энергия обращалась в нуль $(W = 0)$, тогда $C = 0$ и потенциальная энергия заряда *Qo,* находящегося в поле заряда *Q* на расстоянии *r* от него, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r}$$

- Для одноименных зарядов $Q_0 Q > 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов $Q_0 Q < 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.
- Если поле создается системой n точечных зарядов Q_1, Q_2 ..., Q_n, то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом Q_0, равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия W заряда Q_0, находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий W_i. каждого из зарядов:

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_0}{r}$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_0}{r} = Q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r}$$

- Введем общую энергетическую характеристику точки поля, в которой находится пробный заряд Q_0

$$\varphi = \frac{W}{Q_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r}$$

Потенциал

- ***Потенциалом*** ϕ в какой-либо точке электростатического поля называется физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.
- Если поле создается системой *n* точечных зарядов, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической* сумме потенциалов полей этих зарядов, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r}$$

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом *Q*,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

- Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда *Q*о из точки 1 в точку *2*, может быть записана в виде

$$A_{12} = W_1 - W_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

- Таким образом, работа, совершаемая силами поля над зарядом *Q*о*,* равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках (на убыль потенциала).
- Из формулы следует, что ***разность потенциалов*** двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку *2.*
- Если заряд *Q*о перемешать из произвольной точки *1* за пределы поля, т. е. на бесконечность (где, по условию, потенциал равен нулю), то работа сил электростатического поля, и следовательно

$$\varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

Потенциал - скалярная физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Размерность потенциала *вольт* (В).

1В - потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж (1В = 1Дж/Кл). Учитывая размерность вольта, единицу напряженности электростатического поля можно выразить как В/м:

$$\frac{Н}{Кл} = \frac{Н \times м}{Кл \times м} = \frac{Дж}{Кл \times м} = \frac{В}{м}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

эквипотенциальные поверхности

Рассмотрим, как связаны между собой напряженность электростатического поля *E (силовая векторная* характеристика) и потенциал *ϕ (энергетическая скалярная* характеристика).

Консервативная сила и потенциальная энергия связаны между собой соотношением:

$$\vec{F} = -gradW$$

Для заряда, находящегося в потенциальном поле, а так как электростатическое поле потенциально, получим,

$$F = Q_0 E \text{ и } W = Q_0 \phi.$$

Подставив эти выражения в $\vec{F} = -gradW$

и учитывая, что множитель Q_0 не зависит от координат, значит можно на него сократить, получим формулу

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

устанавливающую связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Знак «минус» указывает на то, что вектор напряженности $\vec{E}$ поля направлен в *сторону убывания* потенциала

Согласно определению градиента, в каждой точке поля проекции вектора ***E*** на оси декартовой системы координат

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Проекция вектора ***E*** на произвольное направление *l* равна

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

быстроте убывания потенциала на единицу длины в этом направлении.

Работа сил поля при перемещении заряда Q_0 из точки *1* в точку *2* может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 Q_0 \vec{E} d\vec{l}$$

Из формул $\varphi = \dfrac{A_\infty}{Q_0}$ и $E_l = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial l}$

следует, что разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, поскольку работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Формула $\vec{E} = -grad\varphi$

позволяет по известным значениям ϕ определить ***E***,

Формула $$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl$$

позволяет решить обратную задачу по заданным значениям ***E*** найти разность потенциалов между произвольными точками поля.

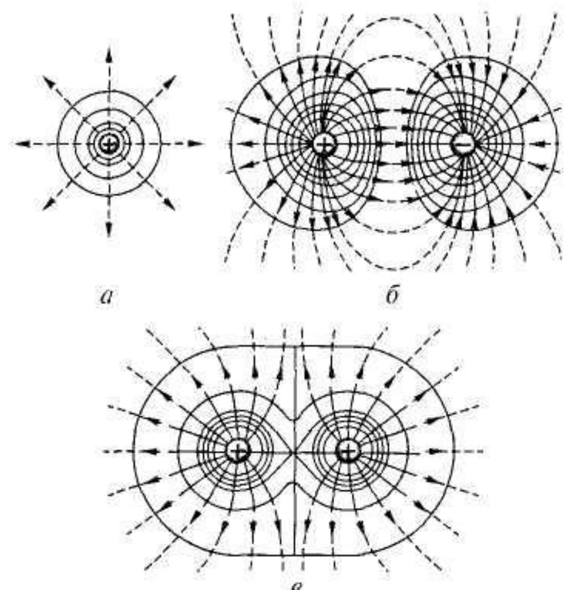
Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называют ***эквипотенциальной поверхностью.***

Линии напряженности *всегда нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю. Иными словами электростатические силы, действующие на заряд, *всегда* направлены по нормалям к эквипотенциальным поверхностям.

Следовательно, вектор ***E*** *всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям,* а поэтому линии вектора ***E*** ортогональны этим поверхностям.

Вид линий напряженности (штриховые линии) и сечений эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) полей положительного точечного заряда (слева*),* разноименных точечных зарядов (справа) и одноименных положительных точечных зарядов (внизу*)*.

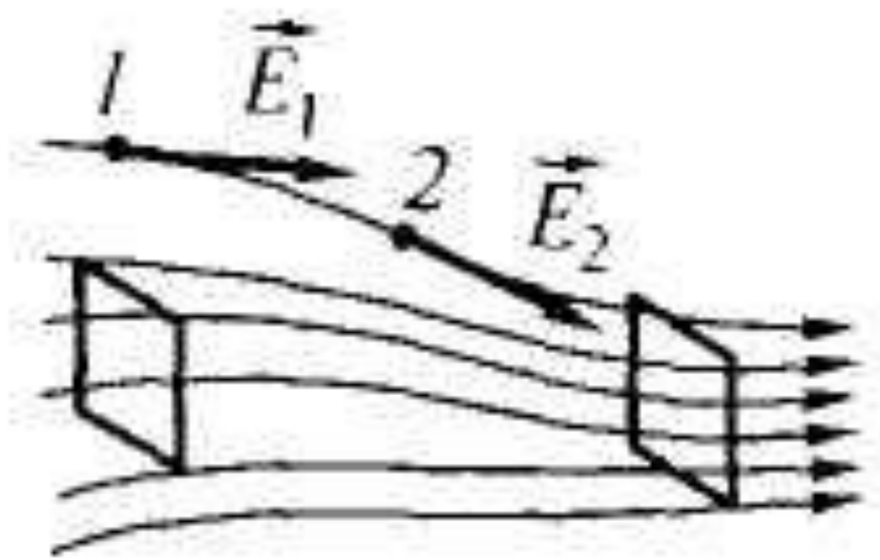
Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.



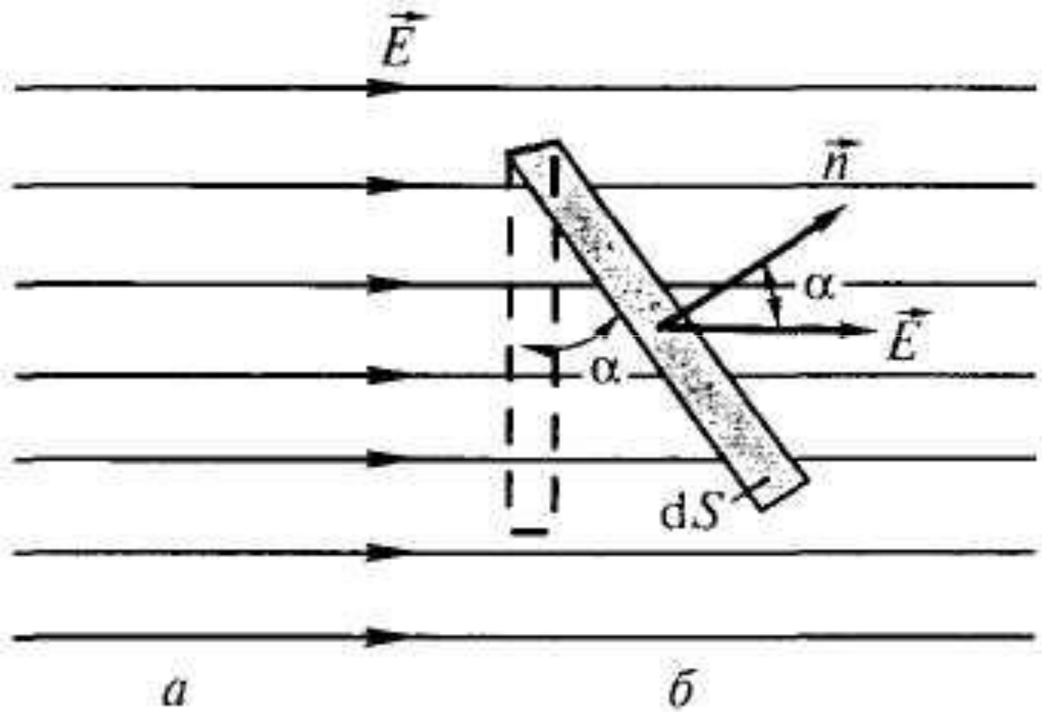
ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

- Поток вектора напряженности электростатического поля

С помощью линий напряженности электростатического поля можно охарактеризовать не только направление вектора $\vec{E}$, но и его модуль. Для этого линии напряженности проводят с определенной густотой: число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$.



Рассмотрим элементарную площадку *dS*, которую пронизывают линии напряженности однородного электростатического поля напряженностью $\vec{\boldsymbol{E}}$.
Если напряженность $\vec{E}$ перпендикулярна площадке, то число линий, пронизывающих площадку *dS*, равно ***E****dS*.



Если площадка составляет с $\vec{\boldsymbol{E}}$ некоторый угол α, то число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS, нормаль $\vec{\boldsymbol{n}}$ к которой образует угол α с вектором $\boldsymbol{E}$, равно $\vec{E}\vec{d}S\cos\alpha = E_n dS$, где E_n — проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\vec{d}S$.

Величину

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{\boldsymbol{E}}d\vec{\boldsymbol{S}}$$

называют ***потоком вектора напряженности*** сквозь площадку dS.

Здесь $d\vec{\boldsymbol{S}} = dS\vec{\boldsymbol{n}}$ - вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{\boldsymbol{n}}$ к площадке. $d\vec{S}$ не является истинным вектором - это псевдовектор. Выбор направления вектора $\vec{\boldsymbol{n}}$ (а следовательно, и $\vec{\boldsymbol{dS}}$) условен, так как его можно направить в любую сторону.

Единица потока вектора напряженности электростатического поля в СИ - ***вольт* ■ *метр*** (**В**•м).

1 вольт•метр равен потоку напряженности сквозь поверхность площадью 1 м^2, перпендикулярную линиям напряженности поля напряженностью 1 В/м.

.

Для произвольной *замкнутой* поверхности *S* (во многих случаях в дальнейшем будут рассматриваться именно такие поверхности) поток вектора *E* сквозь эту поверхность

$$\Phi_E = \oiint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

Часто в учебниках встречается запись

$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

тем не мене подразумевается, что интеграл двойной , так как берется по переменной второго порядка, по площади. Кольцо на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности *S*.

Поток вектора $\vec{E}$ - *алгебраическая величина:*
зависит не только от конфигурации поля $\vec{E}$, но и от выбора направления $\vec{n}$.
Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимают *внешнюю нормаль,* т. е. нормаль, на правленную *наружу* области, охватываемой поверхностью.