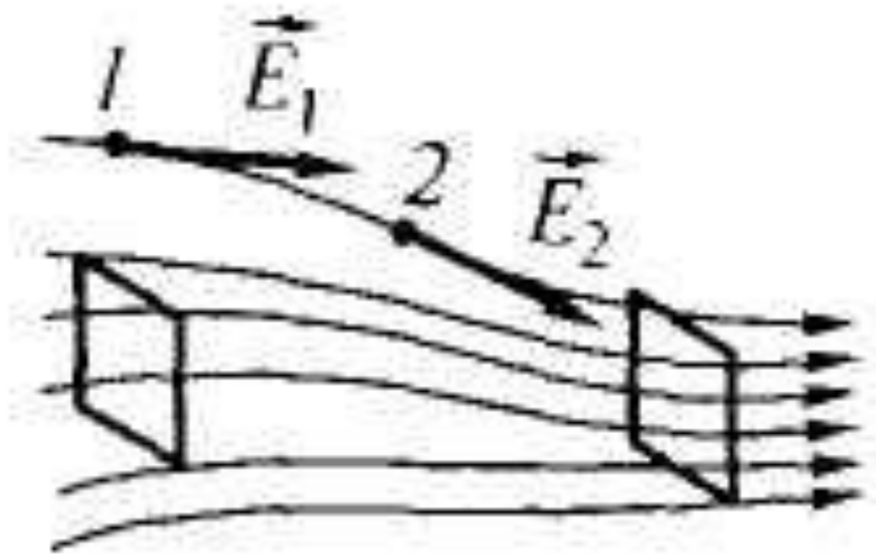
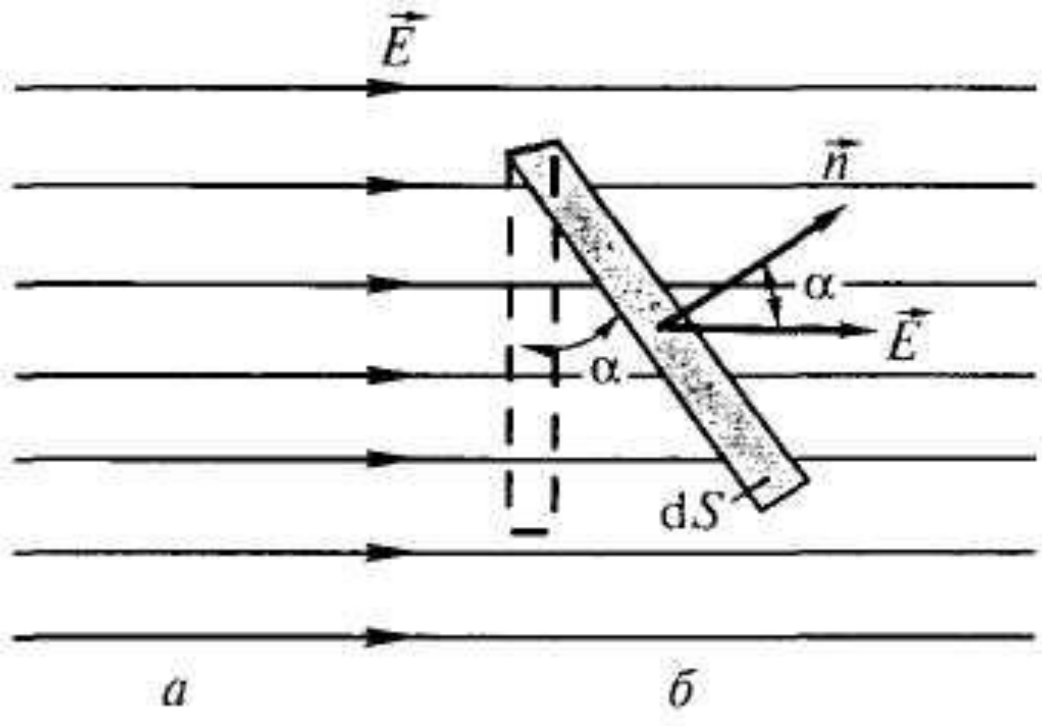
ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Поток вектора напряженности электростатического поля

С помощью линий напряженности электростатического поля можно охарактеризовать не только направление вектора $\vec{E}$, но и его модуль. Для этого линии напряженности проводят с определенной густотой: число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$.



Рассмотрим элементарную площадку *dS,* которую пронизывают линии напряженности однородного электростатического поля напряженностью $\vec{\boldsymbol{E}}$.
Если напряженность $\vec{E}$ перпендикулярна площадке, то число линий, пронизывающих площадку *dS,* равно $\boldsymbol{E}dS$.



Если площадка составляет с $\vec{\boldsymbol{E}}$ некоторый угол α, то число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS, нормаль $\vec{\boldsymbol{n}}$ к которой образует угол α с вектором $\boldsymbol{E}$, равно $\vec{E}\vec{d}Scos\alpha = E_n dS$, где E_n — проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\vec{d}S$.

Величину

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{\boldsymbol{E}}d\vec{\boldsymbol{S}}$$

называют ***потоком вектора напряженности*** сквозь площадку dS.

Здесь $d\vec{\boldsymbol{S}} = dS\vec{\boldsymbol{n}}$ - вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{\boldsymbol{n}}$ к площадке. $d\vec{S}$ не является истинным вектором - это псевдовектор. Выбор направления вектора $\vec{\boldsymbol{n}}$ (а следовательно, и $\boldsymbol{d\vec{S}}$) условен, так как его можно направить в любую сторону.

Единица потока вектора напряженности электростатического поля в СИ - ***вольт* ■ *метр*** (**В**•м).

1 вольт•метр равен потоку напряженности сквозь поверхность площадью 1 м^2, перпендикулярную линиям напряженности поля напряженностью 1 В/м.

Для произвольной *замкнутой* поверхности S (во многих случаях в дальнейшем будут рассматриваться именно такие поверхности) поток вектора E сквозь эту поверхность

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} d\vec{S}$$

Часто в учебниках встречается запись

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

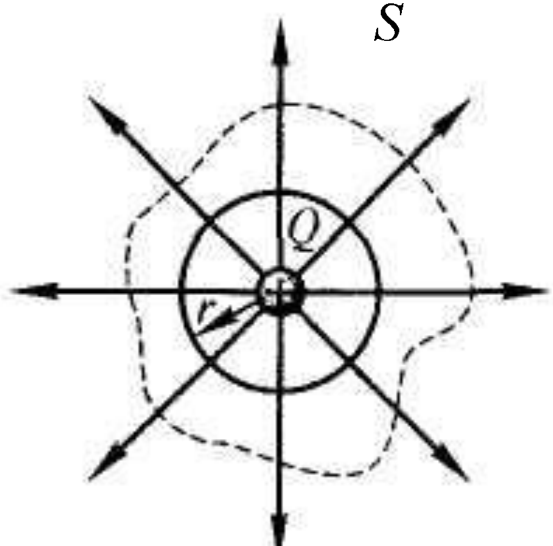
тем не мене подразумевается, что интеграл двойной , так как берется по переменной второго порядка, по площади. Кольцо на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности S.

Поток вектора $\vec{E}$ - *алгебраическая величина:*
зависит не только от конфигурации поля $\vec{E}$, но и от выбора направления $\vec{n}$.
Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимают *внешнюю нормаль,* т. е. нормаль, на правленную *наружу* области, охватываемой поверхностью.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса r, охватывающую точечный заряд Q, пропорционален заряду Q

$$\Phi_E = \oint\limits_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Если окружить сферу произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Докажем, что для замкнутой поверхности любой формы, заключающей в себе точечный заряд Q, поток вектора $\boldsymbol{E}$ будет равен $\frac{Q}{\varepsilon_0}$

Пусть произвольная поверхность окружает n зарядов. Тогда, согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

напряженность $\boldsymbol{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E, полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

Поэтому $$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint\!\!\oint_S \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\oint_S \vec{E}_i\,d\vec{S}$$

Каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен $\frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

Следовательно,

$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\oint_S \vec{E}_i\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i}$$

Формула выражает теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме:

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, коэффициент пропорциональности: единица, деленная на электрическую постоянную ε_0.

Эта теорема выведена для векторного поля любой природы русским математиком Михаилом Васильевичем Остроградским (1826), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю Карлом Фридрихом Гауссом (1839).

Объемная плотность заряда

Скалярная физическая величина, характеризующая количество заряда, приходящегося на единицу объема, называется объемной плотностью заряда.

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

Суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности *S*, охватывающей некоторый объем *V*,

$$Q = \oiiint_V \rho dV$$

Используя этот результат, получим

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} Q = \frac{1}{\varepsilon_0}\oiiint_V \rho dV$$

и окончательно

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oiiint_V \rho dV$$

Теорема Гаусса устанавливает точное соотношение между потоком вектора: напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность и суммарным зарядом, заключенным внутри этой поверхности.

Применяя теорему Гаусса, во многих случаях можно рассчитать электростатическое поле, проще, чем применяя принципа суперпозиции.

Применение теоремы Гаусса к расчету поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

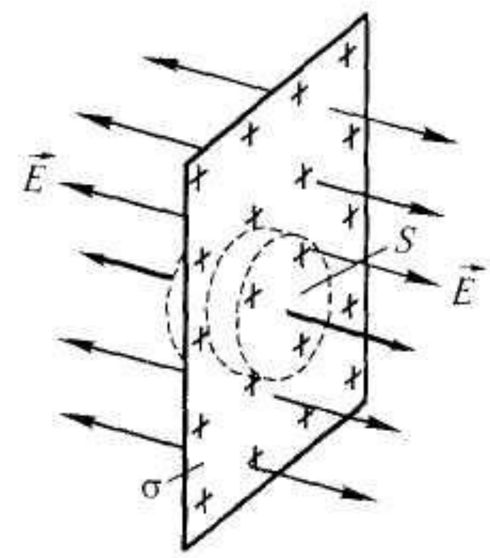
Поверхностная плотность заряда

Скалярная физическая величина, характеризующая плоскость с распределенным на ней зарядом, называется поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

Рассмотрим бесконечную плоскость, равномерно заряженную *с поверхностной плотностью* $\boldsymbol{\sigma}$. В силу симметрии вектор $\boldsymbol{E}$ по обе стороны плоскости перпендикулярен ей и постоянен. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим небольшой замкнутый цилиндр с площадью основания S. Ось цилиндра перпендикулярна плоскости

Образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю. $\boldsymbol{E_n}$ совпадает с $\boldsymbol{E}$. Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания $\boldsymbol{E_n}$ совпадает с $\boldsymbol{E}$. Площади оснований равны. Полный поток, считая обе стороны плоскости, равен $\boldsymbol{2ES}$



согласно теореме Гаусса

$$2ES = \Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

выразив ***E*** из этого уравнения получим:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Из этой формулы следует, что поле равномерно заряженной плоскости однородно. Эта формула справедлива только для малых (по сравнению с размерами плоскости) расстояний от плоскости, так как только тогда плоскость можно считать бесконечной. Потенциал и напряженность электростатического поля связаны между собой соотношением

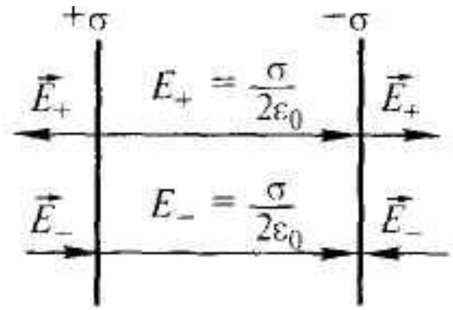
$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{X_1}^{X_2} E dx = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{X_1}^{X_2} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

Применение теоремы Гаусса к расчету поля двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

Рассмотрим две бесконечные параллельные плоскости, заряженные разноименными зарядами с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$.Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности.



Верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние - от отрицательно заряженной.

Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля E= 0.

В области между плоскостями

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad , \quad E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Результирующая напряженность

$$E_{\Sigma} = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Таким образом, результирующая напряженность поля в области между плоскостями равна удвоенной напряженности единичной плоскости, а вне объема, ограниченного плоскостями, напряженность поля равна нулю

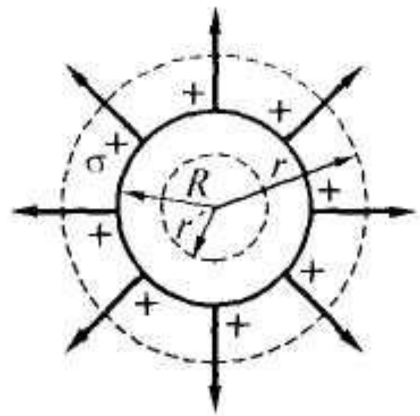
Электростатическое поле между пластинами, линии напряженности которого «проявлены» с помощью железных опилок (опыты, известные из школьного курса). За пределами пластин поле отсутствует, оно сосредоточено между пластинами.

Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно d равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E_{\sum} \, dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^d dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (d - 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Применение теоремы Гаусса к расчету поля равномерно заряженной сферической поверхности

Рассмотрим сферическую поверхность радиусом R заряженную зарядом Q, равномерно с поверхностной плотностью $+\sigma$.



Благодаря равномерному распределению заряда поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально.
Мысленно построим сферу радиусом r, имеющую общий центр с заряженной сферой.
Напряженность является функцией расстояния r от центра сферы. Она одинакова во всех точках, равноудаленных от ее поверхности.
Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд Q, создающий рассматриваемое поле. По теореме Гауссa,

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ при условии $$r \geq R$$

Если $r < R$, замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов.
Внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ($E = 0$).

Таким образом, при $r > R$ поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда, а при $r < R$ поле внутри заряженной сферы отсутствует.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы

при условии $r > R$

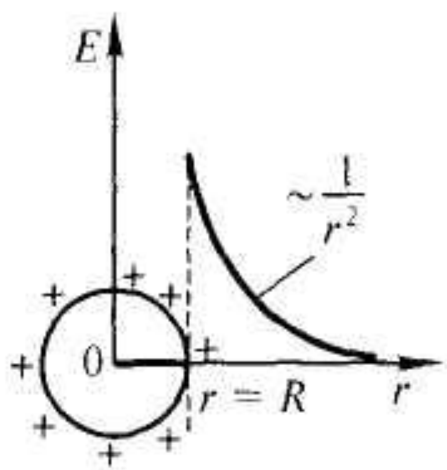
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_{\sum}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{\varepsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

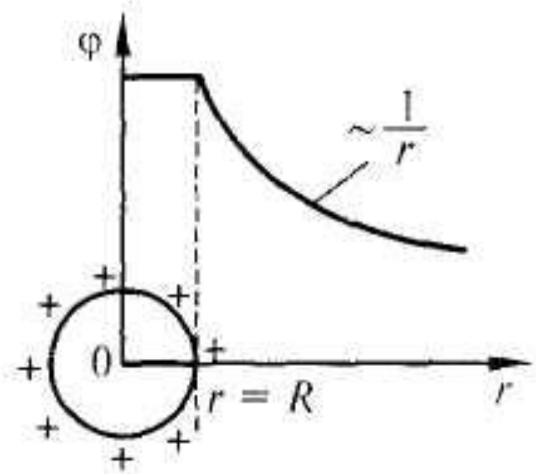
если r_1=r, а r_2 лежит в бесконечности, то

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Внутри сферы заряд отсутствует, напряженность нулевая, значит потенциал постоянен и равен значению на поверхности сферы

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$





Применение теоремы Гаусса к расчету поля объемно-заряженного шара

Рассмотрим шар радиусом R (общий заряд Q), заряженный с объемной плотностью ρ. Построим вспомогательную сферу радиусом r, имеющую общий центр с заряженным шаром.

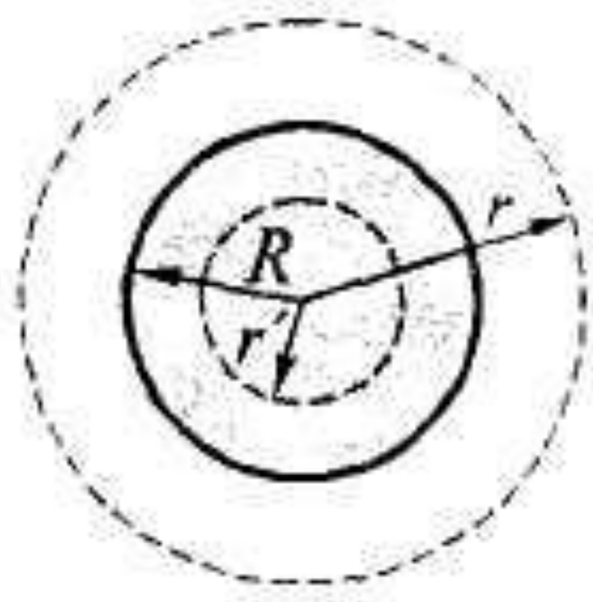
Электростатическое заряженного шара имеет центральную симметрию (центр шара - центр симметрии поля). Напряженность одинакова во всех точках вспомогательной сферы радиусом r.

Если $r > R$, то внутрь вспомогательной сферы поверхности попадает весь заряд Q, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

откуда при условии $r \geq R$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Таким образом, напряженность поля вне объемно-заряженного шара такая же, как и вне заряженной сферической поверхности, что можно было и ожидать исходя из соображений симметрии.

Внутри шара напряженность поля будет другая. Вспомогательная сфера радиусом $r' < R$ охватывает заряд

$$Q' = \rho V(r')$$, где $$V(r') = \frac{4}{3}\pi (r')^3$$

Подставив эти условия в теорему Гаусса получим

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q'$$

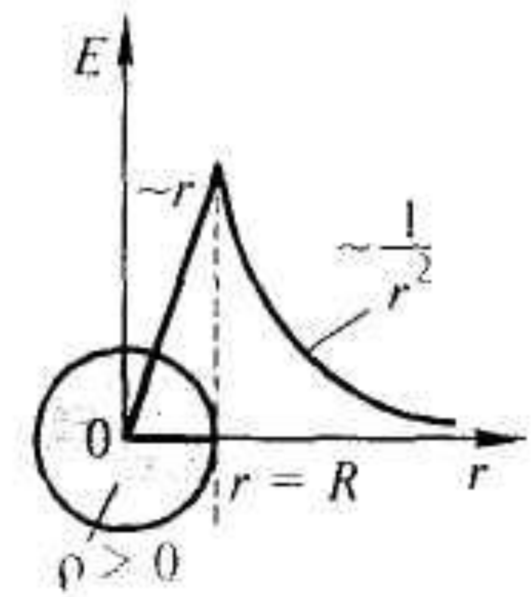
$$E \times 4\pi (r')^2 = \frac{4\rho\pi (r')^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{3Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$ Учитывая $$Q' = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

Получим *Напряженность поля внутри шара изменяется линейно с расстоянием r*

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



Разность потенциалов между поверхностями r_1 и r_2определяется , в зависимости от того как эти расстояния соотносятся с радиусом шара R.

при $R < r_1 < r_2$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr == \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

при $r_1 < r_2 < R$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} dr == \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

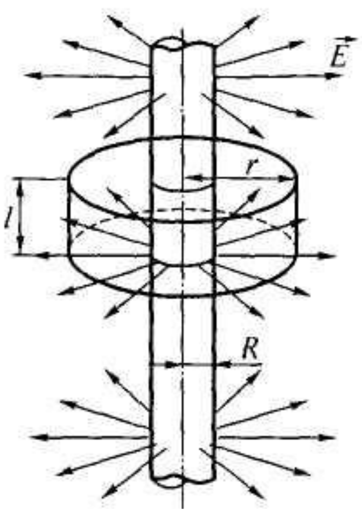
Применение теоремы Гаусса к расчету поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра

Рассмотрим бесконечный цилиндр радиусом R, равномерно заряженный с линейной плотностью $\boldsymbol{\tau}$.

Линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{dQ}{dl}$$

- скалярная физическая величина, определяемая зарядом, приходящимся на единицу длины.



Линии напряженности будут направлены с одинаковой густотой вдоль радиальных прямых, перпендикулярных оси цилиндра. Напряженность $\boldsymbol{E}$ может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра.

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный цилиндр радиусом r и высотой l.

Поток вектора $\boldsymbol{E}$ сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность равен $2\pi r l \boldsymbol{E}$.

По теореме Гаусса $\quad \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, при $r > R$

$$2\pi r l E = \frac{\int_0^l \tau dl}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\tau l}{2\pi r l \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Если $r < R$. то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$.

Напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением

$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

внутри цилиндра поле отсутствует.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1, и r_2, от оси заряженного цилиндра ($r_2 > r_1 > R$),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$