Методы математического анализа при исследовании СЭП

1. Понятие предельных величин в экономике.
2. Эластичность и ее свойства
3. **Ценовая эластичность спроса.**
4. **Задачи *оптимального потребительского выбора***

1.Элементарные функции

1. Степенная $Y=X^n$
2. Показательная $Y=a^X$
3. Логарифмическая $Y=\log_a X$
4. Тригонометрические $Y=\sin X$;
5. Обратные тригонометрические функции $Y=\arcsin X$….

Элементарными функциями называются такие, которые получаются из основных с помощью допустимых действий

1.Предельные величины в экономике

- Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд *предельных величин.* Основными являются: предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению и т.д. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной. Рассмотрим предельные издержки.

Предельные величины в экономике

- Пусть q - количество произведенной продукции, $C(q)$ - издержки соответствующие данному выпуску. Обозначим предельные издержки MC, которые определяются как дополнительные издержки, связанные с производством еще одной единицы продукции. Тогда $MC= C(q+\Delta q)-C(q)$

Используя равенство $\Delta C \approx dC$, получим

$MC =\Delta C \approx dC = C'(q) \bullet \Delta q = C'(q).$

Поэтому $MC \approx C'(q).$

Предельные величины в экономике

- *Пример.*
- Пусть $C(q) = 1500q - 2q^2 + 0{,}002q^3$. Тогда дополнительные издержки, связанные с увеличением выпуска от q до $q + 1$, составят $\Delta C = C(q + 1) - C(q)$, что приближенно равно
- $C'(q) \approx 1500 - 4q + 0{,}006\, q^2$.

2.Эластичность и ее свойства

Для исследования предельных величин используется понятие эластичности.

Понятие эластичности было введено Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Это понятие является чисто математическим и может применяться при анализе любых дифференцируемых функций.

Эластичность

Определение.

- ***Эластичностью*** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел*

$$E_{yx}(x_0) = \lim_{\Delta X \to 0} [(\Delta y/y] / [(\Delta x/x)]$$

- *$Eyx\ (X_0)$ - называют* ***коэффициентом эластичности у по Х.***

Эластичность

Если ясно, в какой точке определяется эластичность и какая переменная является независимой, то могут опускаться отдельные символы. Часто используются сокращенные обозначения *Ey и Eyx .*

Из определения эластичности вытекает, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$\Delta y/y : \Delta x/x \approx Ey \text{ или}$$

$$\Delta y/y \approx Ey * \Delta x/x$$

Эластичность

Т.О. эластичность Еу - это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин у и х. Если, например, *х* увеличится на один процент, то *у* увеличивается ≈ *на Еу* процентов.

$$Ey \approx (x/y)*y'$$

Свойства эластичности

1. *Эластичность в точке* X_0 *суммы* $y=y_1+...+y_n$ *положительных функций* $Y_i=fi(X)$ (i= 1, 2, ..., n) *удовлетворяет соотношению Emin <=Ey<=Emax*

где Emin(Emax) - это минимальная (максимальная) эластичность в точке x_0 *функций yt.*

Свойства эластичности

2. *Эластичность произведения функций* $U = U(x)$ и $V = V(x)$ *в точке* X_0 *равна сумме эластичностей функций u и v в той же точке:*

$$Euv=Eu+Ev$$

Свойства эластичности

3. *Эластичность частного функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в точке x_0 ($v(x_0) \neq 0$) равна разности эластичностей функций u и v в той же точке:*

$$E_{u/v} = E_u - E_v$$

Свойства эластичности

4. *Для функций* $y = f(x)$ и $x = g(t)$ *эластичность* y *по* t *в точке* t_0 *удовлетворяет следующему равенству:*

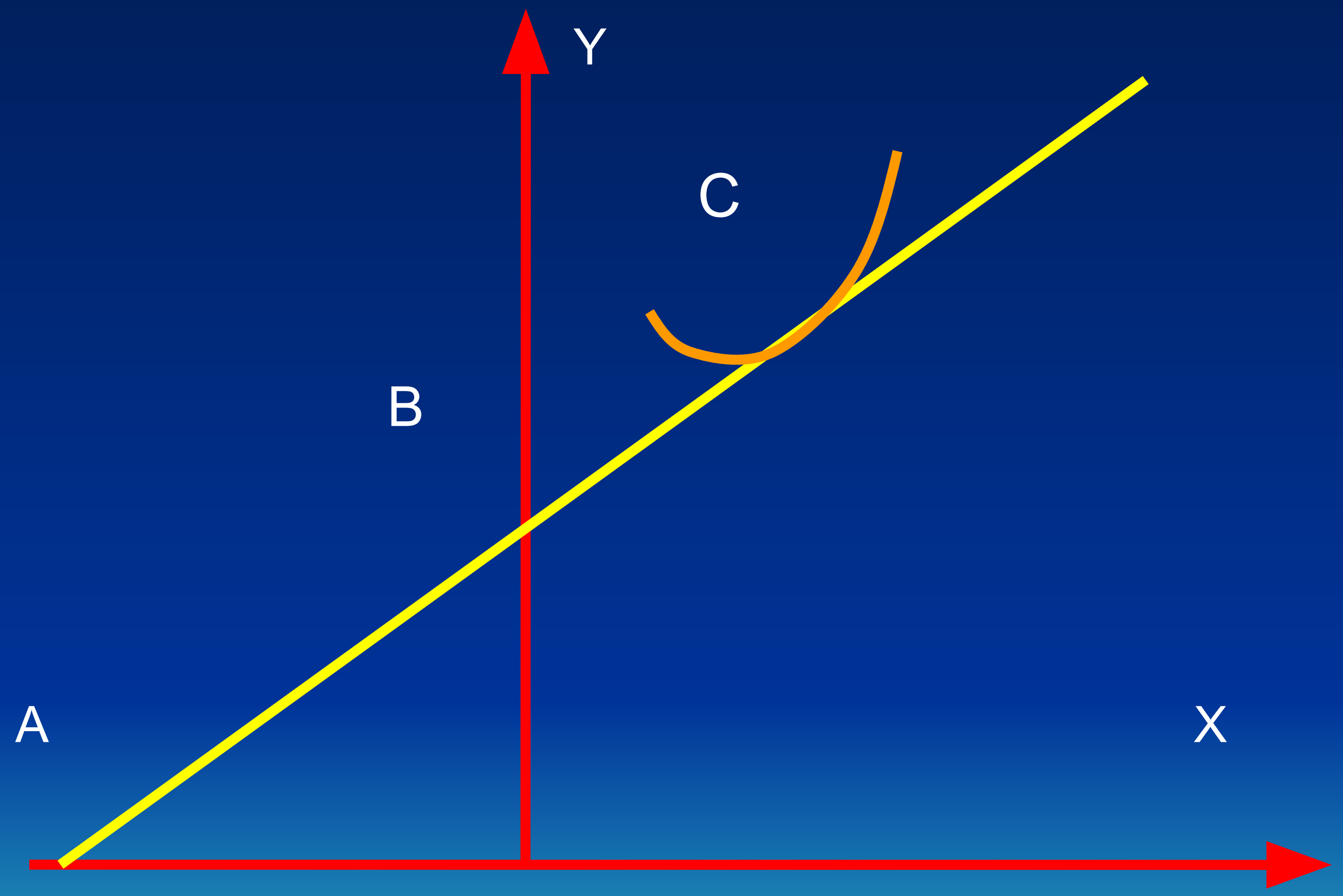
$$Yet(t_0)=Eyx(g(t_0))*Ext(t_0)$$

Задания:

- Найти эластичность функции $y=C$ – const
- Найти эластичность функции $y=x+C$
- Найти эластичность функции $y=x^a$

Геометрический смысл эластичности.

Геометрический смысл производной: $f'(X_0)$ - это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $C(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$. Геометрический смысл эластичности функции $f(x)$ в точке x_0 связан с разбиением данной касательной на отрезки точками *A*, *B* и С, где $A(X_0, 0)$ - точка пересечения касательной с осью *Ox*, $B(0, y_b)$ - точка пересечения касательной с осью *Oy*


Y
C
B
A
X

- Если эластичность Y по X положительна, то она совпадает с отношением длин отрезков BC и AC

$$E_{yx}(x_0)=BC/AC$$

Если эластичность Y по X отрицательна , то выполняется следующее соотношение

$$E_{yx}(x_0)=-BC/AC$$

3.Ценовая эластичность спроса.

- Пусть $D = D(p)$ - спрос (в натуральных единицах) на некоторый товар при цене Р. Так как при увеличении цены спрос уменьшается, то эластичность спроса $E_D < 0$. Спрос называется ***эластичным,*** если $|E_D| > 1$, и ***неэластичным,*** если $|E_D| < 1$.

Совершенно неэластичный спрос

- Термин означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса. В этом случае $E_D = 0$. В другом крайнем случае, когда самое малое снижение цены побуждает покупателя увеличивать покупки от нуля до предела своих возможностей, говорят, что спрос является *совершенно эластичным.* Можно считать, что для совершенно эластичного спроса $|E_D| = \infty$.

Эластичность спроса

- Если имеется достаточный запас товара, то $D = D(p)$ – то он характеризует количество проданного товара. В этом случае общая выручка всех продавцов

$$R = P*D.$$

Находим эластичность выручки по цене

$$E_R=R'/R *P= ((D + PD')/PD)*P=$$

$$1+ (D'/D)*P=1+E_D$$

Т.О., при эластичном спросе $E_R < 0$, а при неэластичном спросе $E_R > 0$.

Вывод

Если спрос эластичен, то изменение цены вызывает изменение общей выручки в противоположном направлении. Если же спрос неэластичен, то изменение общей выручки происходит в том же направлении, что и изменение цены.

Цена, предельные издержки и объем производства

- Пусть q - выпуск продукции (в натуральных единицах); $R(q)$ - выручка от продаж; $C(q)$ - издержки производства, связанные с выпуском q единиц продукции. Тогда прибыль

$$П(q)=R(q)-C(q)$$

Цена, предельные издержки и объем производства

1)Функции $R(q)$,$C(q)$ определены на полуинтервале $[0, +\infty)$ и дифференцируемы при $q > 0$.

2) Тогда максимум прибыли достигается в некоторой точке $q^* \neq 0$.

Цена, предельные издержки и объем производства

- Пусть условия 1), 2) выполнены. Тогда функция П$(q) = R(q) - C(q)$ дифференцируема и имеет на интервале $(0, +\infty)$ максимум в точке $q^* \neq 0$. По теореме Ферма П$'(q^*) = 0$. Так как

П$'(q) = R'(q) - C'(q)$ то в точке $q = q^*$ имеем равенство

$$R'(q^*) = C'(q^*)$$

Цена, предельные издержки и объем производства

В экономической теории равенство объясняется как правило, согласно которому фирма, максимизирующая свою прибыль, устанавливает объем производства таким образом, чтобы предельная выручка была равна предельным издержкам.

В случае, когда объем производства q не влияет на цену продукции p, имеем $R(q) = pq$, $R'(q) = p$.

Тогда $p = C'(q^*)$

4. Задачи *оптимального потребительского выбора*

- Пусть x - количество единиц первого продукта в наборе, y - количество единиц второго продукта в наборе, p_1 -цена единицы первого продукта, p_2 -цена единицы второго продукта, $U(x,y)$ - полезность набора (x,y)) выраженная числом, $x*p_1 + y*p_2$ -стоимость набора (x, y);
- I - количество средств, которое можно суммарно потратить на первый и второй продукты

- **Функцией полезности U(x,y) называется функ**ция, задающая степень полезности набора товаров, состоящего из x единиц товара X и y единиц товара У.

- Данная функция удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых двух наборов товаров X и Y , таких, что $x \succ y$ выполняется $u(x) > u(y)$

- 2. Для любых двух наборов товаров X и Y , таких $x \sim y$, что выполняется $u(x) = u(y)$.

Теорема Дебре

Для стандартных предпочтений потребителя всегда можно построить функцию полезности.

Основные виды функций полезности

$$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

- Данное семейство функций полезности описывает предпочтения потребителя соответствующие полностью *взаимозаменяемым товарам*, т. е. ситуации, когда уменьшение потребление, какого либо вида товара может быть компенсировано потреблением дополнительных единиц любого другого товара.

Задание на самостоятельную подготовку

- Найти и проанализировать другие виды функций полезности.

1. Функцию полезности с полным дополнением благ (функция полезности Леонтьева)
2. Неоклассическую функцию полезности (функция полезности Кобба-Дугласа)
3. Функции безразличия.

Общая постановка задачи состоит в поиске набора (x,y) максимизирующего функцию полезности и не превосходящего при этом по стоимости величины I.

$$U\,(x,y) \longrightarrow max$$

$$P_1\ {*}X + P_2\text{У}{*} \le I,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

Задача минимизации стоимости.

- Общая постановка задачи состоит в поиске набора (X,Y) минимальной стоимости, обеспечивающего заданную полезность Uзад.

$$I = P_1 x + P_2 y \rightarrow \min,\ U(x,y) >= U_{зад},$$

$$x >= 0,\ y >= 0.$$

Нахождение функций спроса.

- Определение. Пусть функция полезности $U(x,y)$ при любых положительных P_1, P_2 и I имеет на множестве $(P_1 * X + P_2 * Y) \leq I$, $x \geq 0$, $y \geq 0)$ единственную точку глобального максимума (x^*, y^*).

Функции спроса.

- Тогда x*, y* - функции от P_1, P_2, I.

$$X^* = X^{D*}(P_1, P_2, I)$$

$$Y^* = Y^{D*}(P_1, P_2, I)$$

Эти функции называются функциями спроса.

Доказано, что

$$\begin{cases} U'x(x,y) / U'y(x,y) = P_1/P_2 \\ P_1 * X + P_2 * Y = I \end{cases}$$