Методы линейной алгебры в экономическом анализе
Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

1.Балансовый характер экономики.

2.Модель Леонтьева

3.Продуктивные модели Леонтьева

4.Модель равновесных цен

Балансовые таблицы

- Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используются таблицы, которые называются таблицами межотраслевого баланса. Идея таких таблиц была сформулирована в работах советских экономистов, а первая таблица опубликована ЦСУ в 1926 г. Формализованная модель межотраслевого баланса, обеспечивающая широкие возможности анализа, была разработана в 1936 г. Русско- американским экономистом В. Леонтьевым .

Условия анализа

- Народное хозяйство разбито на некоторое число и отраслей, которые производят свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Такое представление является абстракцией, так как в реальной экономике отрасль определяется не только названием выпускаемого продукта, но и ведомственной принадлежностью своих предприятий. Такое представление об отрасли целесообразно, так как позволяет изучить функционирование народного хозяйства «в первом приближении».

Условия моделирования

- Имеется n различных отраслей O_1,,..., *On*, каждая из которых производит свой продукт. Отрасль Oi будем коротко называть «i-я отрасль». В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Рассмотрит определенный промежуток времени $[T_0, T_1]$ (обычно таким промежутком служит плановый год) и введем следующие обозначения:

Исходные данные модели

- X_i,- общий объем продукции *i* отрасли за данный промежуток времени - *валовой выпуск* отрасли *i;*
- x_{ij} - объем продукции отрасли *i,* расходуемый отраслью j в процессе производства;
- *Yi* - объем продукции отрасли *i,* предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере - объем *конечного потребления.*

Балансовая таблица

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
x_{11}, x_{12}, . . x_{1n}	Y_1	X_1
x_{21}, x_{22} . . ., x_{2n}	Y_2	X_2
x_{n1} x_{n2} . . ., x_{nn}	Y_n	X_n

Баланс отраслей

- Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом i = 1, ..., *n* должно выполняться соотношение
- Xi=xi1+xi2+…….+xin + Yi, означающее, что валовой выпуск *Xi* расходуется на производственное потребление, равное *xi1 +xi2 + ... +xin,* и непроизводственное потребление, равное Yi, называют *соотношениями баланса.*

Формализация балансовой модели

- Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т. п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают *натуральный* и *стоимостной* межотраслевой балансы. Будем рассматривать стоимостные балансы.

Формализация балансовой модели

- Величины aij=xij/Xj остаются постоянными в течение ряда лет. Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.
- Т.О. для выпуска любого объема *Xj*-продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве *aij*Xj*.-, где *aij -* постоянный коэффициент. Материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение предполагает *линейность* существующей технологии.

Формализация балансовой модели

- Согласно гипотезе линейности имеем

$xij = aij*Xj$ (i,j= l,...,n).

Коэффициенты ***aij*** **называют *коэффициентами прямых затрат* (коэффициентами материалоемкости).**

Формализация балансовой модели

- В предположении линейности соотношения модели принимают вид:
- $X_1 = a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + ... + a_{1n}*x_n + Y_1$
- $X_2 = a_{12}*x_1 + a_{22}*x_2 + ... + a_{2n}*xn+Y_2$
- ……………………………………
- $Xn = a_{1n}*x_1 + a_{2n}*x_2 + … + a_{nn}*x_n + Y_n$

Матричная форма модели

- $X = Ax + y,$
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_n \end{bmatrix}$

Модель Леонтьева

- Вектор X называется *вектором валового выпуска,*
- вектор Y - *вектором конечного потребления,* а матрица *А - матрицей прямых затрат.* Соотношение называется *уравнением линейного межотраслевого баланса.*
- **Данную математическую модель называют *моделью Леонтьева.***

Планирование с помощью балансовой модели

- Уравнения межотраслевого баланса используют для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для планового периода [T0, T1] задается вектор y конечного потребления. Требуется определить вектор x валового выпуска.

- Нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? **В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений с неизвестным вектором *x* при заданных матрице *A* и векторе *y*.**

Ограничения модели

- **При этом нужно иметь в виду следующие особенности системы**
- **1. Все компоненты матрицы *A* и вектора *y* неотрицательны (определяется экономическим смыслом *A и y).* Обычно говорят о неотрицательности самой матрицы *A* и вектора *y* : *A*>= 0, y>= 0.**
- **2. Все компоненты вектора *x* также должны быть неотрицательными: *x* >= 0.**

Продуктивные модели Леонтьева

- ***Определение.*** *Матрица A>0 называется продуктивной, если для любого вектора y>0 существует решение x > 0 уравнения X= Ax + y.*
- *В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется продуктивной.*
- *Т.О. модель Леонтьева продуктивна, если любой вектор y>=0 конечного потребления можно получить при подходящем валовом выпуске X >= 0.*

Условия продуктивности

- *Теорема 1* (первый критерий продуктивности).

Если A >= 0 и для некоторого положительного вектора Y уравнение имеет решение x>=0, то матрица A продуктивна.*

Условия продуктивности

- *Теорема 2* (второй критерий продуктивности).

Матрица A2>=0 продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E\text{-}A)^{-1}$ *существует и неотрицательна.*

Условия продуктивности

- *Теорема 3* (третий критерий продуктивности). *Матрица A >= 0 продуктивна тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд*

$E + A + A^2 + A^3 \ldots$

Правила проверки продуктивности

- Если сумма элементов любого столбца неотрицательной матрицы *A* меньше 1 , то *A* продуктивна.
- Если в неотрицательной матрице *A* сумма элементов любой строки меньше 1 , то матрица *A* продуктивна.

Запас продуктивности

- Пусть *A* >= 0 - продуктивная матрица. ***Запасом продуктивности*** матрицы *A* назовем такое число α > 0, что все матрицы *λA*, где 1 < λ < 1+α, продуктивны, а матрица *(1+ α)A* - не продуктивна.

Модель равновесных цен

- Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева - равновесных цен. Пусть, *A* - матрица прямых затрат, $x = (x_1, x_2, \ldots, xn)$ - вектор валового выпуска.

- Обозначим *через p=(p1,p2,pn)* - вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, первая отрасль получит доход, равный p_1x_1, *вторая* – p_2x_2 и т.д.

Модель равновесных цен

- Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, n-й отрасли в объеме a_n, и т. д. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{n1}p_n$.

Модель равновесных цен

- Тогда для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x1*(a_{11}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n1}p_n)$. Обозначим оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, через V1, (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Модель равновесных цен

- Получим равенство:
- $X_1 P_1 = X_1(a_{11} p_1 + a_{21} P_2 + .. + a_{n1} Pn) + V1.$ Разделив это равенство на X1, получаем
- $P1 = (a_{11} P_1 + a_{21} P_2 + .. + a_{n1} P_n) + V_1$
- где $V1 = P1/X1$ норма добавленной стоимости (величина **добавленной** стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Модель равновесных цен

- Аналогично получим для остальных отраслей
- $P2 = (a_{12} p_1 + a_{22} P_2 + .. + a_{n2} P_n) + V_2$
- …..
- $Pn = (a_{1n} p1 + a_{2n} P_2 + .. + a_{nn} Pn) + Vn$
- *Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме :* $P = A^T P + V$
- *где* $V = (V_1, V_2, \ldots, Vn)$ *- вектор норм добавленной стоимости.*

Модель равновесных цен

- Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Метод наименьших квадратов

- **Метод наименьших квадратов (часто называемый МНК) обычно упоминается в двух контекстах. Во-первых, использование в регрессионном анализе, как метода построения моделей статистических данных.** Во-вторых, **МНК часто применяется просто как метод аппроксимации, без какой-либо привязки к статистике.**

Общий линейный метод наименьших квадратов

- **При аппроксимации методом наименьших квадратов аппроксимируемая функция *f* задается набором *N* точек *(xi , yi)*. Аппроксимирующая функция *g* строится, как линейная комбинация базисных функций *Fj* (количество функций *M* обычно меньше числа точек *N*)**

$$g = \sum_{j=0}^{M-1} c_j F_j(x)$$

- При этом коэффициенты *cj* выбираются таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений аппроксимирующей функции от заданных значений

$$E=\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i-\sum_{j=0}^{M-1}c_jF_j(x_i)\right)^2$$

Методы поиска коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. \\ a_{21} & a_{22} & .. \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = w_i F_j(x_i)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}, \quad b_i = w_i y_i$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ .. \\ .. \\ c_m \end{pmatrix}$$

Задачу минимизации функции *E* можно записать в матричной форме, как поиск

$$\min_c \|Ac - b\|_2$$