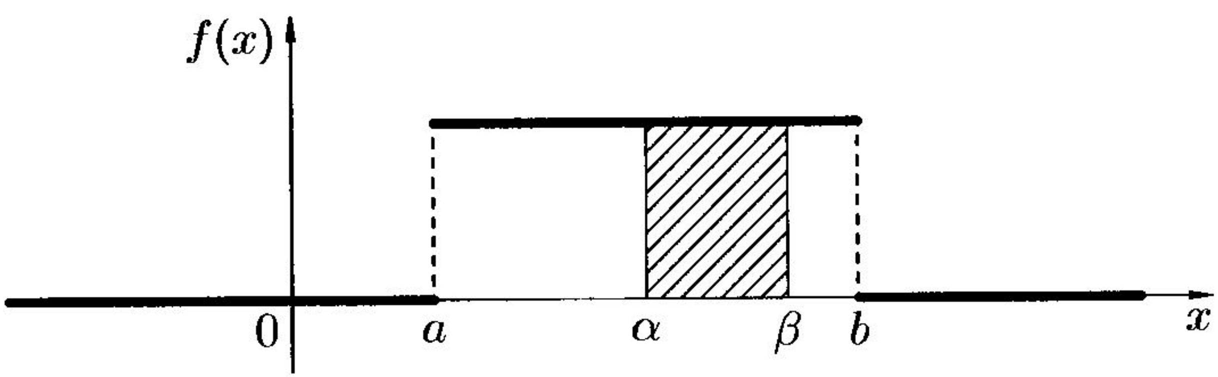
Решение задач и по случайным величинам и законам их распределения

1) Пусть СВ X ~ (a,b). Найти вероятность попадания СВ X в интервал (α,β), принадлежащий полностью интервалу (a,b).

$$P\{X \in (\alpha, \beta)\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т. е. $P\{X \in (\alpha, \beta)\} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника, заштрихованного на рис. 30.



2. Случайная величина **Y** распределена по нормальному закону с математическим ожиданием **a=75** и среднеквадратическим значением равным **28**. Используя функцию Лапласа найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале **[+147,+231]**

Решение:

a=75;

σ=28;

Используя формулу

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

Найдем искомую вероятность

$$P(147 < Y < 231) = \Phi\left(\frac{231-75}{28}\right) - \Phi\left(\frac{147-75}{28}\right) = \Phi(5.57) - \Phi(2.57) = 0.5 - 0.49461 = 0.00539$$

(Значения функции Ф(x) были взяты из справочника по высшей математике).

3. Случайная величина X имеет распределение

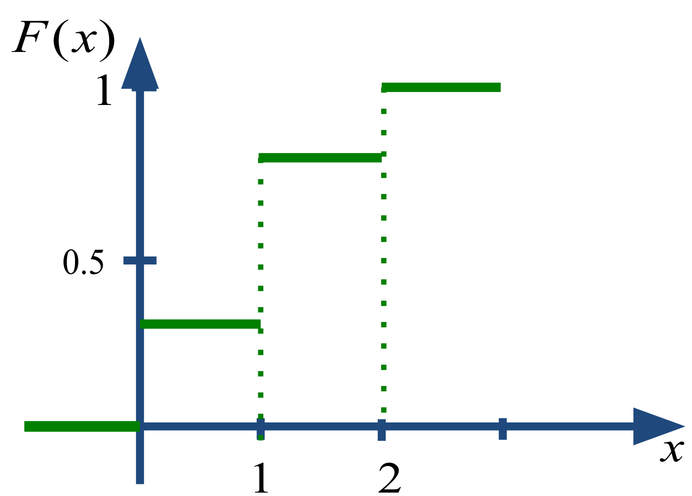
X	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
P	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,16	0,081	0,016

Найти: а) $P\left(|x| \le \frac{1}{2}\right)$; б) $P(X<0)$; в) $P(1 \le X \le 2)$

Ответ: а) 0,738; б) 0,091; в) 0,257

4. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым 0,4. Составить закон распределения числа попаданий при двух выстрелах, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2



$$M[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9;$$

$$Д[X] = M(X^2) - m_x^2 = 1{,}3 - 0{,}81 = 0{,}49$$

5. Случайная величина X имеет следующее распределение:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти выражение и построить график функции распределения случайной величины X

Найти математическое ожидание и дисперсию. Ответ: $P=0{,}4;\ M[X]=0{,}2;\ Д[X]=1{,}36.$

Пример. Дана функция плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A(x+2), & 0<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$$

Найти: 1) параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения;
3) $P(1 < x < 4)$; 4) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, получаем $\int\limits_{0}^{2} A(x+2)dx=1$, так как

$$\int\limits_0^2 A(x+2)d(x+2)=A\frac{(x+2)^2}{2}\Bigg|_0^2=A(8-2)=6A\text{, тогда } 6A=1\Rightarrow A=\frac{1}{6}.$$

Итак, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{6}(x+2), & 0<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$

Найдём $F(x)$, функцию распределения по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

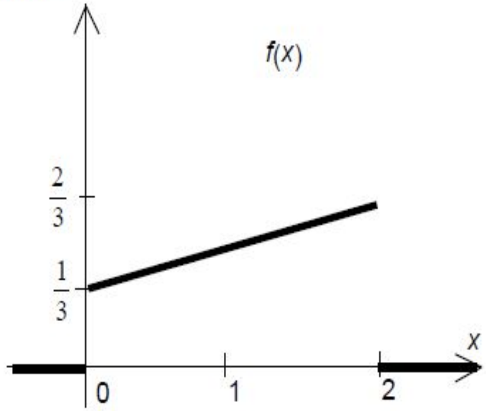
если $x\le 0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0,$

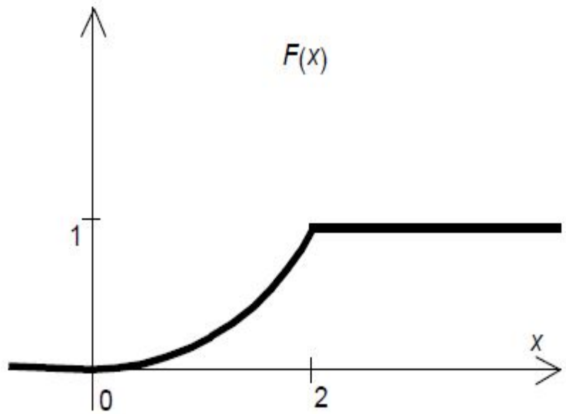
если $0<x<2$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\dfrac{1}{6}(t+2)dt=\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x}{3},$

если $2\le x<\infty$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{2}\dfrac{1}{6}(x+2)dx+\int\limits_{2}^{x} 0dt=\left.\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x}{3}\right|_0^2=\dfrac{4}{12}+\dfrac{2}{3}=1.$

Итак, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x}{3}, & 0<x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

Построим оба графика





Найдём $P(1 < x < 4)$.

Так как $P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$,

$$F(1) = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}\Big|_{x=1} = \frac{5}{12},\ F(4) = 1,$$

$$P(1 < x < 4) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Найдём $M(X)$ по формуле $M(X) = \int\limits^{\infty} x f(x) dx$.

$$M(X) = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x(x+2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{10}{9}.$$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X);$$

$$M(X^2) = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x^2(x+2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{14}{9};$$

$$D(X) = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{26}{81}} \approx 0,57.$$