Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Математическая статистика это наука изучающая методы обработки результатов наблюдения массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, с целью выявления этих закономерностей

История возникновения теории вероятностей

Развитие теории вероятностей с момента зарождения этой науки и до настоящего времени было несколько своеобразным. На первом этапе истории этой науки она рассматривалась как занимательный “пустячок”, как собрание курьезных задач, связанных в первую очередь с азартными играми в кости и карты.

Этапы развития

Д. Кардано

Н. Тарталья

❶ Предыстория теории вероятностей.

В этот период, начало которого теряется в веках, ставились и решались элементарные задачи, которые позже будут отнесены к теории вероятностей. Никаких специальных методов в этот период не возникает. Этот период кончается работами Кардано, Пачоли, Тарталья и др. С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. У Демокрита, Лукреция Кара и других античных ученых и мыслителей мы находим глубокие предвидения о строении материи с беспорядочным движением мелких частиц (молекул), мы встречаем рассуждения о равновозможных исходах (равновероятных) и т. п.

Этапы развития

❷ Возникновение теории вероятностей как науки.

К середине, XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдений и в других областях, привлекли внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами. В первую очередь это относится к Б. Паскалю, П. Ферма и Х. Гюйгенсу. В этот период вырабатываются первые специфические понятия, такие, как математическое ожидание и вероятность (в форме отношения шансов), устанавливаются и используются первые свойства вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей. В это время теория вероятностей находит свои первые применения в демографии, страховом деле, в оценке ошибок наблюдения, широко используя при этом понятие вероятности.

Основатели теории вероятностей

- Основателями теории вероятностей были французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, и голландский ученый Х. Гюйгенс

Б. Паскаль

П.Ферма

Х. Гюйгенс

Этапы развития

❸ Классическое определение вероятности.
Следующий период начинается с появления работы Я. Бернулли "Искусство предположений" (1713), в которой впервые была строго доказана первая предельная теорема — простейший случай закона больших чисел. К этому периоду, который продолжался до середины XIX в., относятся работы Муавра, Лапласа, Гаусса и др. В центре внимания в это время стоят предельные теоремы. <u>Теория вероятностей начинает широко применяться в различных областях естествознания.</u> И хотя в этот период начинают применяться различные понятия вероятности (геометрическая вероятность, статистическая вероятность), господствующее положение занимает, в особенности после работ Лапласа, так называемое классическое определение вероятности.

Якоб **Бернулли**

Этапы развития.

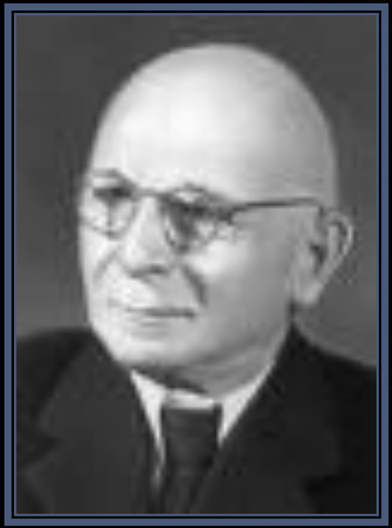
4 Следующий период развития теории вероятностей связан прежде всего с Петербургской математической школой. За два столетия развития теории вероятностей главными ее достижениями были предельные теоремы. Но не были выяснены границы их применимости и возможности дальнейшего обобщения. Наряду с огромными успехами, достигнутыми теорией вероятностей в предыдущий период, были выявлены и существенные недостатки в ее обосновании, это в большой мере относится к недостаточно четким представлениям о вероятности.

Этапы развития

❺ **Современный период развития теории вероятностей** начался с установления аксиоматики. Этого прежде всего требовала практика, так как для успешного применения теории вероятностей в физике, биологии и других областях науки, а также в технике и военном деле необходимо было уточнить и привести в стройную систему ее основные понятия. Благодаря аксиоматике теория вероятностей стала абстрактно-дедуктивной математической дисциплиной, тесно связанной с другими математическими дисциплинами. Это обусловило небывалую широту исследований по теории вероятностей и ее применениям, начиная от хозяйственно-прикладных вопросов и кончая самыми тонкими теоретическими вопросами теории информации и теории случайных процессов.

Основатели теории вероятностей

Строгое логическое обоснование теории вероятностей произошло в XX в. и связано с именами советских математиков С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова.



С. Н. Бернштейн

А. Н. Колмогоров

Выводы:

Возникновение и развитие теории вероятностей продиктовано необходимостью ее применениям, начиная от хозяйственно-прикладных вопросов и заканчивая самыми тонкими теоретическими вопросами теории информации и теории случайных процессов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

РЕБУС

«СОБЫТИЕ»

СОБЫТИЕ

- Под СОБЫТИЕМ понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий.

ПРИМЕР. Бросаем шестигранный игральный кубик.
Определим события:
А {выпало четное число очков};
В {выпало число очков, кратное 3};
С {выпало более 4 очкков}.

Эксперимент(опыт)

- ЭКСПЕРИМЕНТ (или опыт) заключается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерении значений заранее определенных признаков этих объектов (явлений).

ПРИМЕРЫ

* сдача экзамена,
* наблюдение за дорожно-транспортными происшествиями,
* выстрел из винтовки,
* бросание игрального кубика,
* химический эксперимент,
* и т.п.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ

- Эксперимент называют СТАТИСТИЧЕСКИМ, если он может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное число раз.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

- СЛУЧАЙНЫМ называют событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта). Обозначают заглавными буквами А, В, С, Д,… (латинского алфавита).

Рассмотрим несколько наиболее «излюбленных» в теории вероятностей примеров случайных экспериментов.

Опыт 1:

Подбрасывание монеты.

Испытание – подбрасывание моне … ыт … ета упал … » … кой».

«решка» - лицевая сторона монеты (аверс)

«орел» - обратная сторона монеты (реверс)

Опыт 2:

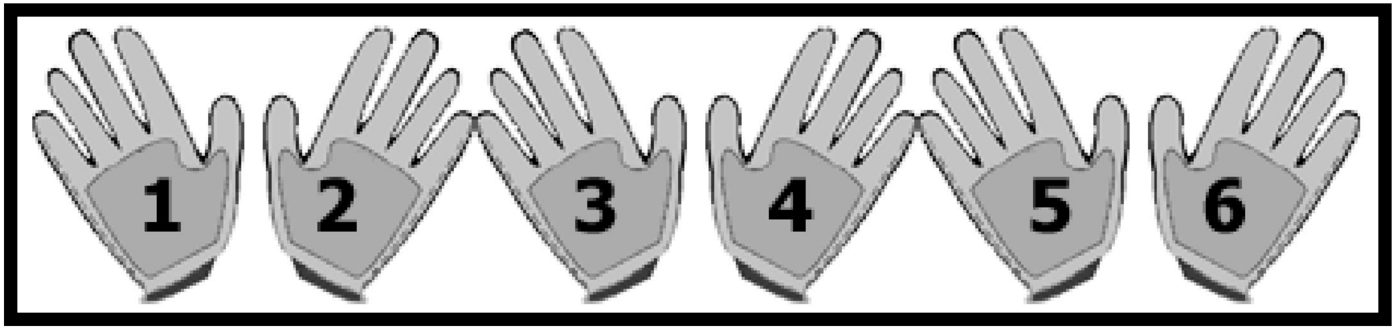
Подбрасывание кубика.

Это следующий по популярности после монеты случайный эксперимент.

Испытание – подбрасывание кубика; события – выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (и другие).

Опыт 3:

Выбор перчаток. В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки.

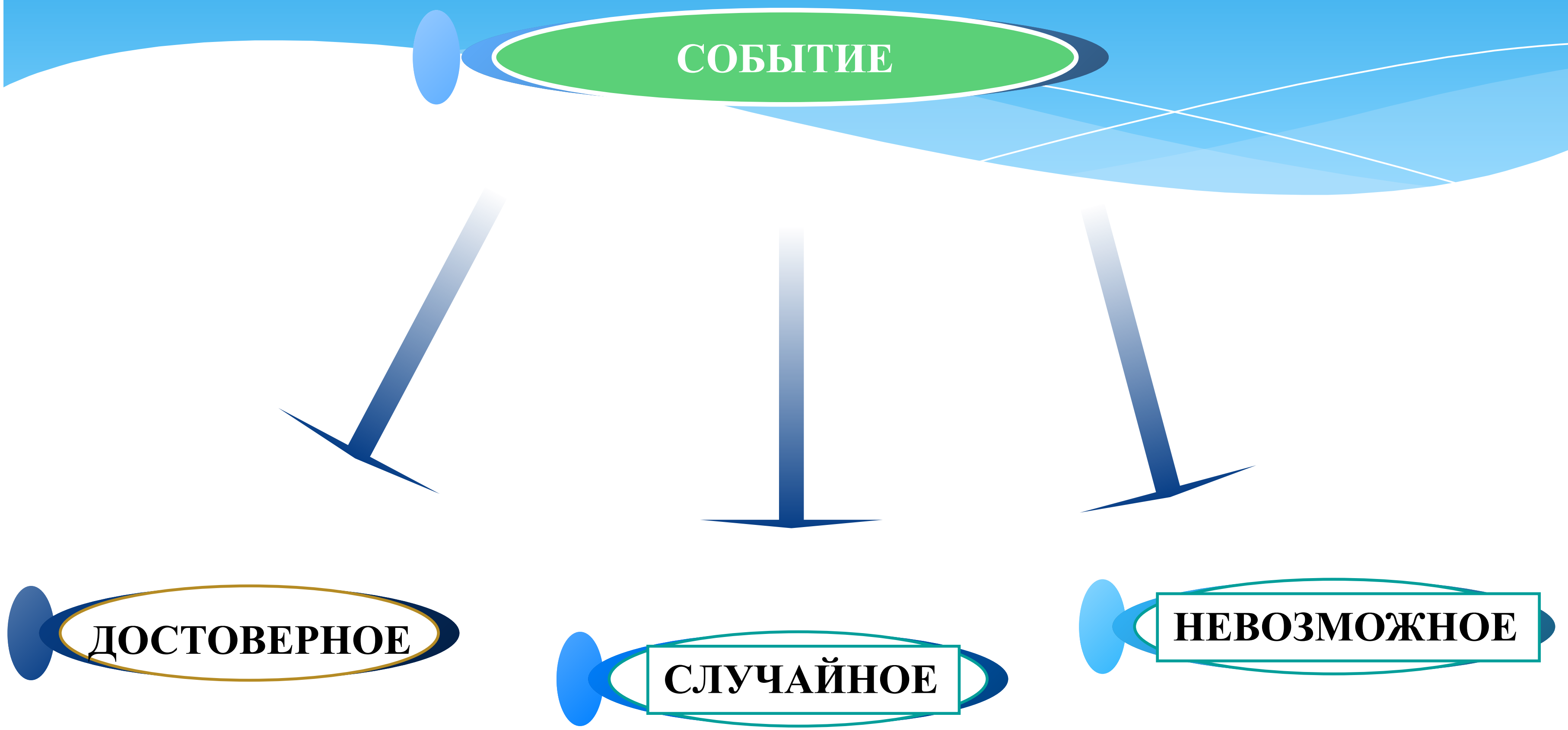


Опыт 4:

«Завтра днем – ясная погода».

Здесь наступление дня – испытание, ясная погода – событие.

Типы событий



Типы событий

ДОСТОВЕРНОЕ | **СЛУЧАЙНОЕ** | **НЕВОЗМОЖНОЕ**

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Случайным называют событие которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Примеры событий

досто-верные	слу-чайные	невоз-можные
1. ПОСЛЕ ЗИМЫ НАСТУПАЕТ ВЕСНА. 2. ПОСЛЕ НОЧИ ПРИХОДИТ УТРО. 3. КАМЕНЬ ПАДАЕТ ВНИЗ. 4. ВОДА СТАНОВИТСЯ ТЕПЛЕЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ.	1. НАЙТИ КЛАД. 2. БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ. 3. В ШКОЛЕ ОТМЕНИЛИ ЗАНЯТИЯ. 4. ПОЭТ ПОЛЬЗУЕТСЯ ВЕЛОСИПЕДОМ. 5. В ДОМЕ ЖИВЕТ КОШКА.	1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ. 2. ПРИ ПОДБРАСЫВАНИИ КУБИКА ВЫПАДАЕТ 7 ОЧКОВ. 3. ЧЕЛОВЕК РОЖДАЕТСЯ СТАРЫМ И СТАНОВИТСЯ С КАЖДЫМ ДНЕМ МОЛОЖЕ.

Задание 1

Охарактеризуйте события, о которых идет речь в приведенных заданиях как достоверные, невозможные или случайные.

Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число;

б) задумано нечетное число;

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным;

г) задумано число, являющееся четным или нечетным.

Задание 2

В мешках лежит 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных.

Охарактеризуйте следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара и они все синие;
б) из мешка вынули 4 шара и они все красные;
в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета;
г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного
цвета.

РЕБУС

«ИСХОД»

ИСХОД

- **Исходом** (или элементарным исходом, элементарным событием) называется один из взаимоисключающих друг друга вариантов, которым может завершиться случайный эксперимент.

Число возможных исходов в каждом из рассмотренных выше опытах.

- <u>Опыт 1.</u> – 2 исхода: «орел», «решка».
- <u>Опыт 2.</u> – 6 исходов: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- <u>Опыт 3.</u> – 3 исхода: «обе перчатки на левую руку», «обе перчатки на правую руку», «перчатки на разные руки».

* <u>**Однозначные исходы**</u> **предполагают единственный результат того или иного события:** смена дня и ночи, смена времени года и т.д.

<u>Неоднозначные исходы</u> **предполагают несколько различных результатов того или иного события:**

при подбрасывании кубика выпадают разные грани; выигрыш в Спортлото; результаты спортивных игр.

Задание 3

Запишите множество исходов для следующих испытаний.

а) В урне четыре шара с номерами два, три, пять, восемь. Из урны наугад извлекают один шар.

б) В копилке лежат три монеты достоинством в 1 рубль, 2 рубля и 5 рублей. Из копилки достают одну монету.

в) В доме девять этажей. Лифт находится на первом этаже. Кто-то из жильцов дома вызывает лифт на свой этаж. Лифтовый диспетчер наблюдает, на каком этаже лифт остановится.

Задание 4

Найдите количество возможных исходов.

а) За городом N железнодорожные станции расположены в следующем порядке: Луговая, Сосновая, Озёрная, Дачная, Пустырь. Событие А – пассажир купил билет не далее станции Озёрная.

б) Один ученик записал целое число от 1 до 5, а другой ученик пытается отгадать это число. Событие В – записано чётное число.

в) Вини Пух думает, к кому бы пойти в гости: к Кролику, Пяточку, ослику Иа-Иа или Сове? Событие А – Вини Пух пойдёт к Пяточку; событие В – Вини Пух не пойдёт к Кролику.

Задание 5

В каждом из следующих опытов найдите количество возможных исходов:

а) подбрасывание двух монет;

б) подбрасывание двух кнопок;

в) подбрасывание двух кубиков;

г) подбрасывание монеты и кубика;

д) подбрасывание монеты, кнопки и кубика.

*ТЕСТ

«Случайные исходы, события, испытания».

1. О каком событии идёт речь? «Из 25 учащихся класса двое справляют день рождения 30 февраля».

А) достоверное; В) невозможное; С) случайное

2. Это событие является случайным:

А) слово начинается с буквы«ь»;
В) ученику 9 класса 14 месяцев;
С) бросили две игральные кости: сумма выпавших на них очков равна 8.

3. Найдите достоверное событие:

А) На уроке математики ученики делали физические упражнения;
В) Сборная России по футболу не станет чемпионом мира 2005 года;
С) Подкинули монету и она упала на «Орла».

4. Среди пар событий, найдите несовместимые.

А) В сыгранной Катей и Славой партии шахмат, Катя проиграла и Слава проиграл.

В) Из набора домино вынута одна костяшка, на ней одно число очков больше 3, другое число 5.

С) Наступило лето, на небе ни облачка.

5.Охарактеризуйте случайное событие:

«новая электролампа не загорится».

Это событие:

А) менее вероятно ;

В) равновероятное ;

С) более вероятное.

6. Какие события из перечисленных ниже являются противоположными? В колоде карт лежат четыре туза и четыре короля разных мастей. Достают карту наугад.

Событие:

А) достанут трефового туза;

В) достанут туза любой масти;

С) достанут любую карту кроме трефового туза.

7. Колобок катится по лесным тропкам куда глаза глядят. На полянке его тропинка расходится на четыре тропинки, в конце которых Колобка поджидают Заяц, Волк, Медведь и Лиса. Сколько исходов для выбора Колобком наугад одной из четырёх тропинок.

А) 1; **В) 4;** **С) 5.**

8. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Сколько исходов двух совместных выстрелов?

А) 4; **В) 3;** **С) 2.**

9. Два шахматиста играют подряд две партии. Сколько исходов у этого события?

A) 4; **B) 2;** **C) 9.**

10*. Случайный опыт состоит в выяснении пола детей в семьях с тремя детьми. Сколько возможных исходов у этого опыта?

А) 8; **В) 9;** **С) 6.**

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В толковом словаре С.И. Ожегова и Н.Ю. Шведовой:

«Вероятность – возможность исполнения, осуществимости чего-нибудь».

Основатель современной теории вероятностей А.Н. Колмогоров:

«Вероятность математическая – это числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях».

Понятие вероятности

- Известно, по крайней мере, шесть основных схем определения и понимания вероятности. Не все они в равной мере используются на практике и в теории, но, тем не менее, все они имеют за собой разработанную логическую базу и имеют право на существование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

КЛАССИЧЕСКОЕ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ВЕРОЯТНОСТЬ

– ЭТО ЧИСЛЕННАЯ МЕРА ОБЪЕКТИВНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДАЕТ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

А – некоторое событие,

m – количество исходов, при которых событие А появляется,

n – конечное число равновозможных исходов.

Р – обозначение происходит от первой буквы французского слова *probabilite – вероятность.*

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Вероятностью *P* наступления случайного события *A* называется отношение , где *n* – число всех возможных исходов эксперимента, а *m* – число всех благоприятных исходов: $\frac{m}{n}$

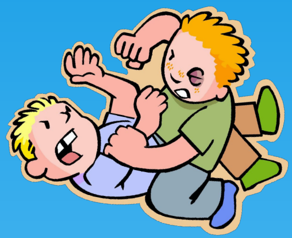
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пьер-Симо́н Лапла́с

Классическое определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа.

ЭКСПЕРИМЕНТ	ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТА (n)	СОБЫТИЕ А	ЧИСЛО ИСХОДОВ, БЛАГОПРИЯТ-НЫХ ДЛЯ ЭТОГО СОБЫТИЯ (m)	ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ А P(A)=m/n
Бросаем монетку	2	Выпал «орел»	1	$\frac{1}{2}$
Вытягиваем экзаменаци-онный билет	24	Вытянули билет №5	1	$\frac{1}{24}$
Бросаем кубик	6	На кубике выпало четное число	3	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Играем в лотерею	250	Выиграли, купив один билет	10	$\frac{10}{250}=\frac{1}{25}$

Пример 1



В школе 1300 человек, из них 5 человек хулиганы. Какова вероятность того, что один из них попадётся директору на глаза?

Решение

Вероятность:

$P(A) = 5/1300 = 1/250.$

Пример 2

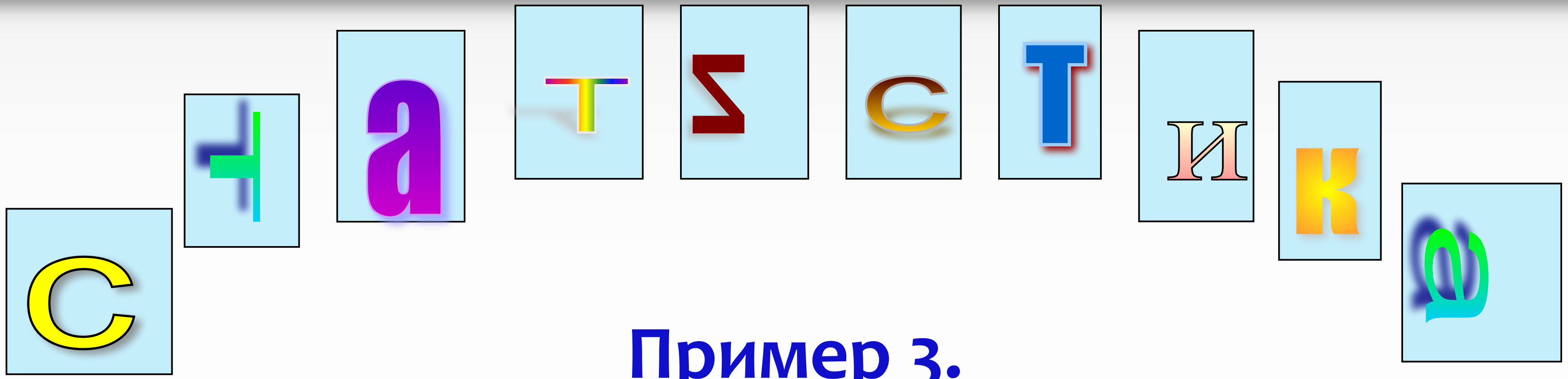
При игре в нарды бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на обоих кубиках выпадут одинаковые числа?

Решение

Составим следующую таблицу

	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

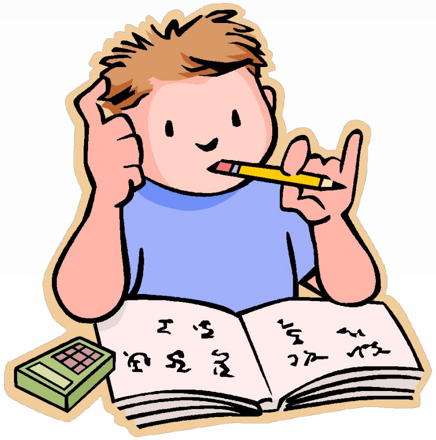
Вероятность:
$P(A)=6/36=$
$=1/6.$



Пример 3.

Из карточек составили слово «статистика». Какую карточку с буквой вероятнее всего вытащить? Какие события равновероятные?

Решение



Всего 10 букв.
Буква «с» встречается 2 раза –
Р(с) = 2/10 = 1/5;
буква «т» встречается 3 раза –
Р(т) = 3/10;
буква «а» встречается 2 раза –
Р(а) = 2/10 = 1/5;
буква «и» встречается 2 раза –
Р(и) = 2/10 = 1/5;
буква «к» встречается 1 раз –
Р(к) = 1/10.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1
2. Вероятность невозможного события равна 0
3. Вероятность события А не меньше 0 , но не больше 1

1. $P(u) = 1$ (u – достоверное событие);
2. $P(v) = 0$ (v – невозможное событие);
3. $0 \le P(A) \le 1$.

Основные элементы комбинаторики.

1. **Размещение** $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

   Это любое упорядоченное подмножество m из элементов множества n.

   (Порядок важен).

2. **Перестановки** $P_n = n!$

   Если m = n, то эти размещения называются перестановками.

3. **Сочетания** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

   Это любое подмножество из m – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.

   (Порядок не важен).

Следствие. Число сочетаний из n элементов по n – m равно число сочетаний из n элементов по m, т.е. $C_n^{n-m} = C_n^m$

Основные элементы комбинаторики.

Задача.1.

Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

1) $A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 5040$.

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти: $A_{9}^{3} = \frac{9!}{6!} = 504$

3) $A_{10}^{4} - A_{9}^{3} = 5040 - 504 = 4536$.

Основные элементы комбинаторики.

Решение задач.

Задача.2.

Пусть имеется множество, содержащие 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три.

Решение:

Здесь в число сочетаний не включены, например АВС, ВСА, т.к. у нас уже есть АВС, потому что порядок элементов в сочетании не учитываются.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Основные элементы комбинаторики. Решение задач.

Задача.3.

Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять

$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$ способами.

4 определенные книги можно переставлять

$P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$ способами.

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$$P_6 * P_4 = 720 * 24 = 17280.$$

Основные элементы комбинаторики.

Решение задач.

Задача.4.

Нужно выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!(10-4)!}=\frac{10!}{4!*6!}=210.$

Задача.5.

Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение: $7_{ш}=3_{ч}+4_{б}$ Белые шары: $C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!*6!}=210.$

Черные шары: $C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!*2!}=10$. Тогда $C_{10}^{4}*C_{5}^{3}=20*10=2100.$

Основные элементы комбинаторики.
Решение задач.

Задача.6.

Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на 2 подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5, а во второй – не более 9 человек?

Решение:

Первая подгруппа может состоять либо из 3, либо из 4, либо из 5 человек:

C_{12}^{3}

C_{12}^{4}

C_{12}^{5}

$C_{12}^{3}+C_{12}^{4}+C_{12}^{5}=1507$

Основные элементы комбинаторики.

Задача.7.

Десять команд участвуют в разыгрывание первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может будут учитывать, если только положение первых трех и последних 2-х команд?

Решение:

1-е три места может будут распределены: $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$ способ

Остается 7 команд, две из которых выбывают из следующего первенства т.к. порядок выбывших команд не учитывается

=> $C_7^2 = \frac{7!}{2!*5!} = 21$ способом.

Тогда число возможных результатов = $A_{10}^3 * C_7^2 = 15120$

Решение задач.

Задача.8.

Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет вызван дважды и на занятии может будет опрошено любое количество учащихся, порядок опроса не важен?

Решение:

1)может не спросить ни одного, т.е. C_{11}^{0},

2)если только 1, то C_{11}^{1},

если только 2-х, то C_{11}^{2} и т.д.

Тогда он всего опросит $C_{11}^{0} + C_{11}^{1} + C_{11}^{2} + ...C_{11}^{11}$