Тема лекции:
Основные теоремы теории вероятностей

Размещения

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов

Теорема: число размещений из n по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1) Студенты изучают 6 различных дисциплин. Если ежедневно в расписание включается по три дисциплины, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день?

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

2)Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{сп}$$

$$Ответ: 5040 - 504 = 4536_{способов}$$

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок n различных элементов равно n!

$$P_n = n!$$

1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить десять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$

Сочетания

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов

Теорема: Число сочетаний из n по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Следствие: Число сочетаний из n элементов по n-m равно числу сочетаний из n элементов по m

$$C_n^{m-n} = C_n^m$$

1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Скольким способами можно выбрать 7 шаров , что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$ Способов выбора былых шаров

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$ Способов выбора черных шаров

По правилу умножения искомое число способов равно $C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{3} = 2100$

2) Скольким способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5 , а во второй- не более 9 человек ?

$$C_{12}^{3} = 220$$ Подгруппа из 3 человек

$$C_{12}^{4} = 495$$ Подгруппа из 4 человек

$$C_{12}^{5} = 792$$ Подгруппа из 5 человек

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно:

$$C_{12}^{3} + C_{12}^{4} + C_{12}^{5} = 1507$$

Правило умножения

Если требуется выполнить одно за другим какие то К действий при чем 1 действие можно выполнить a_1 способами, 2 действие – a_2 способами, и так до К-го действия , которое можно выполнить $a_к$ способами, то все К действий вместе могут быть выполнены $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_к$ способами.

4 мальчика 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать ?

Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24 = 576$ способами.

Правило сложения

Если два действия взаимно исключают друг друга, при чем одно из них можно выполнить m способами, а другое – n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $m+n$ способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий

Основные понятия

События А и В называются несовместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени ; А-выбивание четного числа очков; В- не четного).

События А и В называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого(А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется полной группой событий.

События называются равновозможными , если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (А-орел; В-решка).

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Пусть А и В - события, связанные с каким-либо опытом.

Событие называется <u>противоположным</u> событию А, если оно происходит только тогда, когда не происходит событие А.

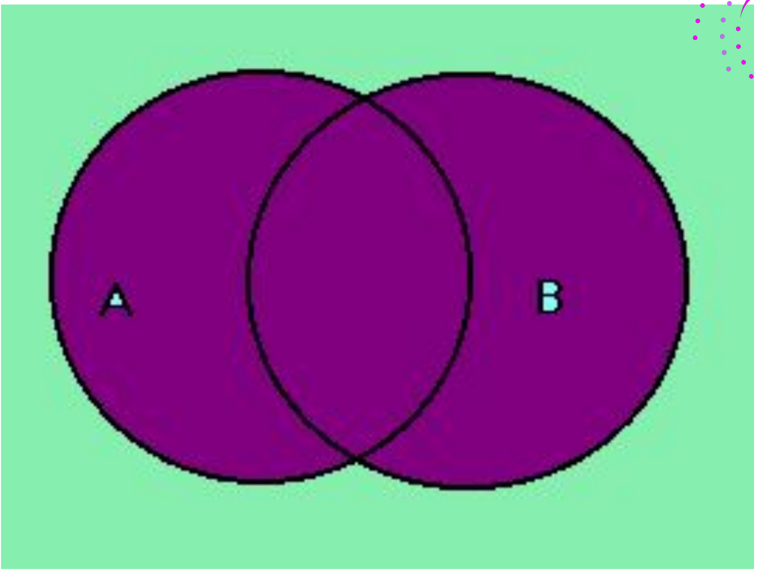
$\bar{A}$ - событие, противоположное событию А.

<u>Пример</u>: выпадение герба при бросании монеты - событие, противоположное выпадению решки.

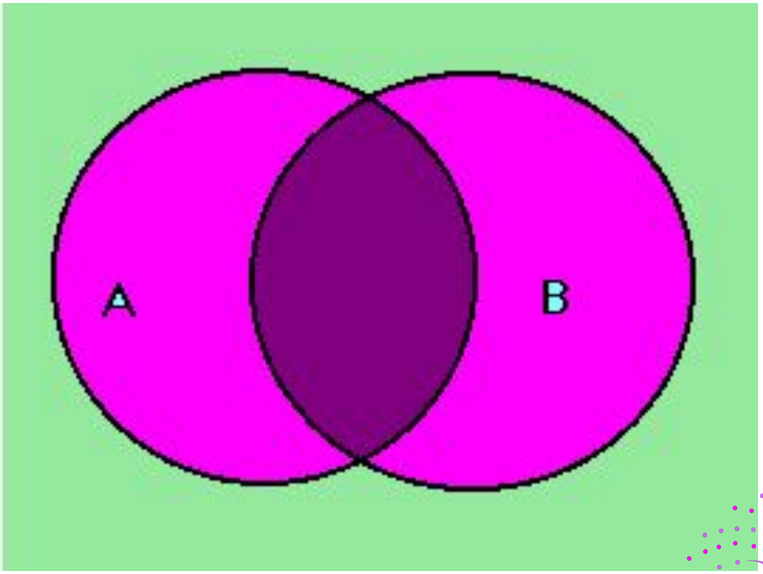
<u>Суммой</u> двух событий А и В называется событие С=А+В, состоящее в наступлении события А, или события В, или событий А и В вместе.

<u>Произведением</u> двух событий А и В называется событие С=АВ, состоящее в одновременном наступлении событий А и В.

Сумма событий A и B



Произведение событий A и B

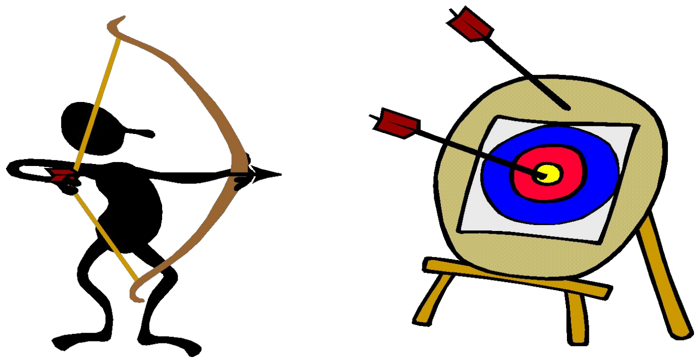


Пример.

Событие *A* - попадание при первом выстреле, событие *B* - попадание при втором выстреле.

Событие *A*+*B* - хотя бы одно попадание.

Событие *AB* - попадание при обоих выстрелах.



Пусть событие

A_1 - попадание в цель при первом выстреле;

$\bar{A}_1$ - промах при первом выстреле;

A_2 - попадание в цель при втором выстреле;

$\bar{A}_2$ - промах при втором выстреле;

A_3 - попадание в цель при третьем выстреле;

$\bar{A}_3$ - промах при третьем выстреле;

Рассмотрим событие В - в результате трех выстрелов состоялось одно попадание в цель.

Событие B выразится в виде комбинации событий A и Ā:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

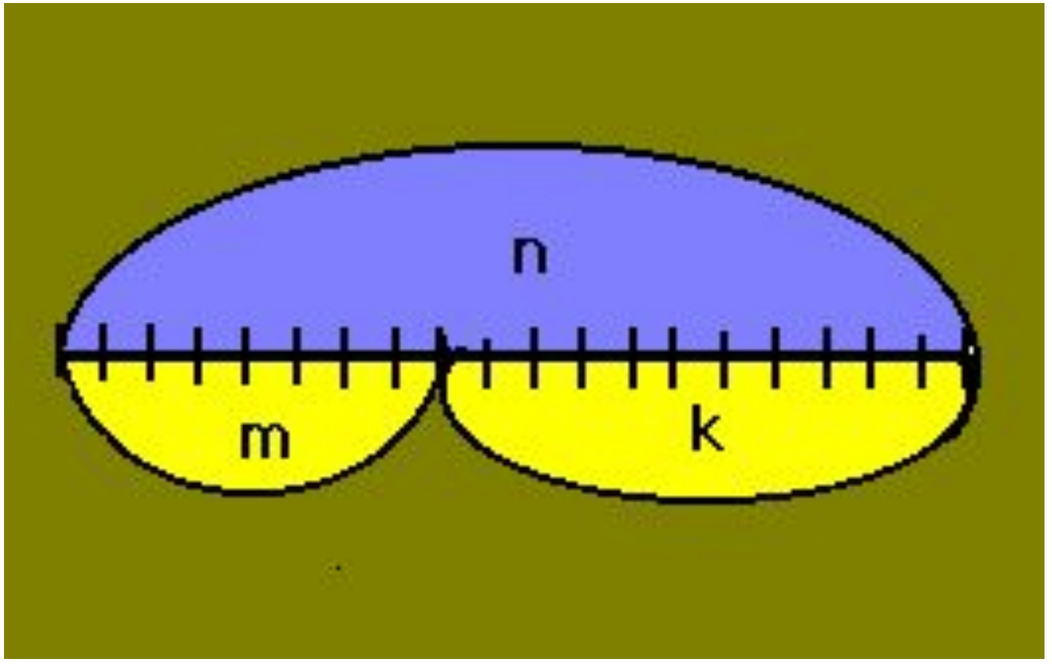
Доказательство:

Пусть все возможные исходы опыта сводятся к *n* случаям, из которых m случаев благоприятны событию *А*, а *k* - случаев благоприятны событию *В*.

Тогда вероятности событий *А* и *В* будут равны соответственно:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(B) = \frac{k}{n}$$

Так как события А и В несовместны, то нет таких случаев, которые были бы благоприятны событиям А и В вместе.



Следовательно, событию *A+B* будет благоприятно *m+k* случаев.

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$$

Эту теорему можно обобщить на произвольное число несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Следствие 1.

Если события A_1, A_2,…A_n образуют полную группу несовместных событий, то их суммарная вероятность равна 1.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1}$$

Доказательство:

Так как события A_1, A_2,…A_n образуют полную группу, то появление в опыте хотя бы одного из них будет достоверным событием. Поэтому

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1$.

Так как эти события несовместны, то к ним применима теорема о сложении вероятностей:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$

Следствие 2.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Если события А и В совместны, то теорема о сложении вероятностей обобщается следующим образом:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Отсюда можно выразить вероятность произведения событий А и В:

$$P(AB)= P(A)+P(B)- P(A+B)$$

Пример 1.

В коллективе 40 % сотрудников принадлежат к партии любителей пива, и 20 % принадлежат к партии зеленых, причем 10 % являются одновременно членами обеих этих партий. Остальные сотрудники беспартийные. Найти вероятность того, что наугад выбранный работник будет партийным.

Решение.

Пусть событие А заключается в том, что случайно выбранный сотрудник принадлежит к партии любителей пива, а событие В - что сотрудник принадлежит к партии зеленых.

События А и В будут совместными. Поэтому по теореме о сложении вероятностей вероятность того, что наугад выбранный сотрудник будет партийным определится по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

P(A)=0.4, P(B)=0.2, P(AB)=0.1

Следовательно,

$$P(A+B) = 0.4 + 0.2 - 0.1 = 0.5$$

Пример 2.

Молодой человек рассматривает три возможности уклониться от службы в армии.

Во-первых, он может поступить учиться в ВУЗ,
во-вторых, он может быть освобожден от армии по состоянию здоровья, и в третьих,
он может жениться и к моменту призыва обзавестись двумя детьми. Вероятности этих
событий для него равны, соответственно, 0.5,
0.2 и 0.01. Считая эти события несовместными,

Решение.

Пусть событие А заключается в том, что молодой человек поступит в ВУЗ, событие В - что он получит освобождение по состоянию здоровья и событие С - что он женится и обзаведется двумя детьми.

Т.к. эти события несовместны, то применяем теорему о сложении вероятностей в виде:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

Так как

P(A)=0.5

P(B)=0.2

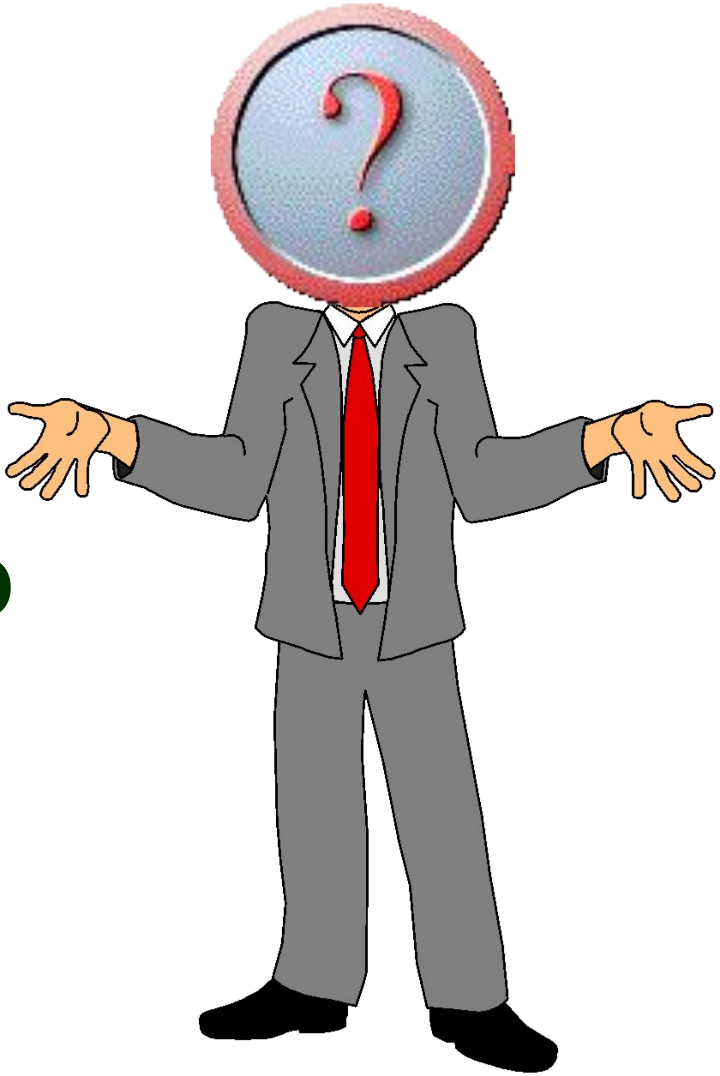
P(C)=0.01

то

P

(A+B+C)=0.5+0.2+0.01=0

.7



Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A1}(A_2)P_{A1A2}(A_3)\ldots P_{A1A2A3\ldots An-1}(A_n);$$

$P_{A1A2A3\ldots An-1}(A_n)$ – вероятность появления события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ произошли

$$\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\ldots\,\overline{A}_n$$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1A_2A_3\ldots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\ldots\,\overline{A}_n$

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P\ldots(\overline{A}_n)$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Формула полной вероятности является следствием теорем о сложении и умножении вероятностей.

Пусть требуется определить вероятность события *А*, которое может произойти только вместе с одним из событий H_1, $H_2 \ldots H_n$ образующих полную группу несовместных событий.

Эти события называются гипотезами.

Так как гипотезы образуют полную группу, то событие А может появиться только в комбинации с одной из этих гипотез. Поэтому,

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A$$

Так как гипотезы $H_1, H_2 \ldots H_n$ несовместны, то и комбинации H_1A, H_2A … H_nA тоже несовместны. Тогда по теореме о сложении вероятностей

Формула полной вероятности.

Вероятность события A, которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P_{H_i}(A)$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

ПРИМЕР.

Студент, выйдя из дома за 30 минут до начала занятий, может приехать в институт автобусом, троллейбусом или трамваем. Все эти варианты равновозможны. Вероятность приехать на занятия вовремя для этих видов транспорта соответственно равна 0.99, 0.98 и 0.9. Какова вероятность, что студент приедет на учебу вовремя?

Решение:

Пусть событие А заключается в том, что студент не опоздает на занятия. Оно может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1**- студент поехал автобусом;**

H_2**- студент поехал троллейбусом;**

H_3**- студент поехал трамваем.**

Чтобы использовать формулу полной вероятности, необходимо знать вероятности каждой из гипотез и условные вероятности события A для каждой из гипотез.

Так как гипотезы образуют полную группу событий, то суммарная вероятность всех гипотез равна 1.

По условию задачи все гипотезы равновероятны, следовательно

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$

Условные вероятности события *A* для каждой из гипотез даны по условию задачи:

$$P(A|H_1)=0.99;\ P(A|H_2)=0.98;\ P(A|H_3)=0.9$$

Следовательно, по формуле полной вероятности,

$$P(A) = 0.99 \cdot \frac{1}{3} + 0.98 \cdot \frac{1}{3} + 0.9 \cdot \frac{1}{3} \approx 0.96$$

Формула полной вероятности.

Рассмотрим события B_1, B_2, B_3,…,B_n которые образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них B_i событие A может наступать с некоторой условной вероятностью $P_{B_i}(A)$

Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Сколько бы не было вероятностей:

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$$

ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ (ФОРМУЛА БАЙЕСА)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2 \ldots H_n$. Вероятности этих гипотез до опыта считаются известными: $P(H_1), P(H_2) \ldots P(H_n)$.

Производится опыт, в результате которого происходит событие A.

Как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением события A?

Определим условные вероятности каждой из гипотез $P(H_i/A)$.

По теореме об умножении вероятностей:

$$P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P(H_i \mid A) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

Отсюда

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}$$

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула Байеса

Рассмотрим событие A которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, B_1, B_2, $B_3,\ldots,B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле Байеса, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

ПРИМЕР 1.

Перед экзаменом студент с равной вероятностью может спрятать шпаргалку
в одно из трех мест: в ботинок, в карман и
в рукав. Вероятность вытащить на экзамене
шпаргалку незаметно для преподавателя
в первом случае составляет 0.4, во втором
0.6, в третьем – 0.55. Студент, придя

Решение:

Событие *A* в этой задаче заключается в том, что студент благополучно достал шпаргалку. Это событие произошло в результате опыта.

Оно могло осуществиться только вместе с одной из гипотез:

H_1- достал шпаргалку из ботинка;

H_2- достал шпаргалку из кармана;

H_3- достал шпаргалку из рукава.

В данной задаче требуется определить вероятность того, что студент достал шпаргалку из ботинка, если известно, что он незаметно списал.

Т.е. требуется определить условную вероятность первой гипотезы, при условии, что событие *A* имело место.

Для этого используем формулу Байеса.

По условию задачи все гипотезы равновероятны, следовательно

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$

Условные вероятности события *A* для каждой из гипотез даны по условию задачи:

$P(A|H_1)=0.4;\ P(A|H_2)=0.6;\ P(A|H_3)=0.55$

Тогда

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{0.4\cdot\frac{1}{3}}{0.4\cdot\frac{1}{3}+0.6\cdot\frac{1}{3}+0.55\cdot\frac{1}{3}}\approx 0.26$$

ПРИМЕР 2.

Статистика запросов кредитов в банке:
10 % - государственные органы,
30 % - банки, 60 % - физические лица.
Вероятности не возврата кредита для них
соответственно равны 0.01, 0.05, 0.2.
Найти вероятность события А – не возврата
очередного кредита и
вероятность события В - что кредит не

Решение:

Гипотезами в этой задаче будут:

H_1- кредит взял государственный орган;

H_2- кредит взял банк;

H_3- кредит взяло физическое лицо.

Вероятность события *A* найдем по формуле полной вероятности.

Найдем вероятности гипотез:

$P(H_1)=0.1; P(H_2)=0.3; P(H_3)=0.6$

Условные вероятности события А для каждой из гипотез даны в задаче:

$P(A|H_1)=0.01$; $P(A|H_2)=0.05$; $P(A|H_3)=0.2$.

Тогда:

$$P(A)=0.1\cdot 0.01+0.3\cdot 0.05+0.6\cdot 0.2=0.136$$

Вероятность события *B* - это условная вероятность гипотезы *H_2 : $P(H_2/A)$*. Находим ее по формуле Бейеса:

$$P(H_2/A)=\frac{0.3\cdot 0.05}{0.136}=\frac{1}{9}$$

Формула Бернулли

Вероятность того что в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна P , $P(0<P<1)$, событие наступит К раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k}$$

q=1-p ; q- вероятность противоположного события

или

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^{k} \cdot q^{n-m}$$

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью Р, то вероятность того, что событие А произойдет m раз выражается как

$$P_{mn} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Формула Бернулли

ПРИМЕР.

Известно, если монета упадет орлом, студент идет пить пиво, если монета упадет решкой – студент идет на свидание с девушкой, если монета встанет на ребро, он пойдет в библиотеку, а если повиснет в воздухе – студент отправится на лекции. Если бы все эти исходы опыта были равновозможными, то какова была бы вероятность, что при пяти бросаниях монеты 1) трижды выпала необходимость идти на лекцию и 2) хотя бы один раз выпала такая необходимость?

Решение:

1) В данной задаче проводится серия из 5 независимых опытов, причем вероятность того, что монета повиснет в воздухе в каждом опыте составляет p= 1/4.

Тогда вероятность противоположного события составит q=3/4.
По формуле Бернулли находим вероятность того, что при 5 бросаниях монеты трижды случится это событие:

$$P_{3,5} = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0.09$$

Чтобы найти вероятность того, что при 5 бросаниях хотя бы один раз монета повиснет в воздухе, перейдем к вероятности противоположного события - монета ни разу не повиснет в воздухе: $P_{0,5}$.

Тогда искомая вероятность будет: $P=1-P_{0,5}$

Вероятность $P_{0,5}$ опять найдем по формуле Бернулли:

$$P_{0,5} = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0.24$$

Тогда вероятность искомого события составит

$$P = 1 - 0.24 = 0.76$$

Асимптотические формулы

Если число испытаний велико, то использование формулы Бернулли будет нецелесообразным в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. Теорема Муавра-Лапласа, дающая асимптотическую формулу , позволяет вычислить вероятность приближенно.

Теорема: Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u), где$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, u = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Асимптотические формулы. Распределение Пуассона

Если вероятность события в отдельном испытании близка к нулю, то применяют другую асимптотическую формулу- формулу Пуассона. Теорема:

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np=\lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна

$$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$