Лекция

Тема: Случайные величины и их законы распределения

Учебные вопросы:

1. Понятие случайной величины. Распределение случайной величины.
2. Математическое ожидание. Дисперсия, стандартное отклонение.
3. Некоторые распределения дискретной случайной величины.
4. Функция распределения дискретной случайной величины.

Случайная величина

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Примеры случайных величин: число попаданий в мишень при данном числе выстрелов; число очков, выпадающее при бросании игральной кости. Обозначаем X, а ее значения x.

Дискретная
Случайная величина, возможные значения которой можно перенумеровать. При этом число значений может быть конечным или бесконечным

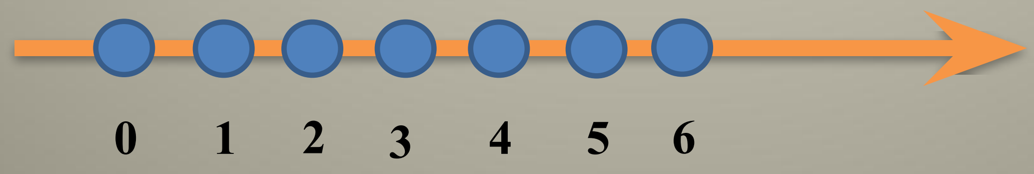
Непрерывная
Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины – бесконечно

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина принимает конечное или счетное количество значений. Счетное количество может быть бесконечным, но, тем не менее, может быть подсчитано при помощи определенной процедуры.

ПРИМЕР: Счетными являются, например, целые числа.

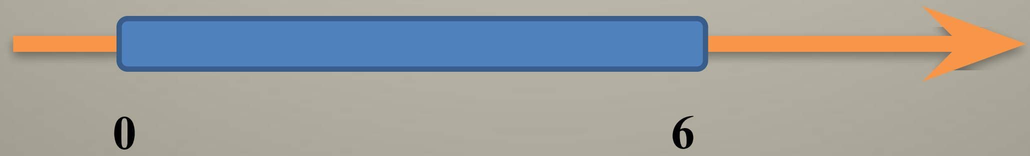
Число новорожденных



Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина, в противоположность дискретной, принимает бесконечное количество значений из определенного непрерывного множества на числовой прямой. Множество значений непрерывной случайной величины несчетно.

ПРИМЕР: Срок службы лампочки.



Мальчики среди шести новорожденных

Мальчики, x	Вероятность, P(x)
0	0,016
1	0,094
2	0,234
3	0,313
4	0,234
5	0,094
6	0,016

Случайная величина – число мальчиков среди шести новорожденных

Принимает значения от 0 до 6

Значения 0 и 6 менее вероятны, чем значение 3

Случайные величины являются математическим инструментом для изучения случайных событий и явлений

Распределение дискретной случайной величины

Для характеристики случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появиться. Эти данные образуют **закон распределения** случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины *X* может быть задан в виде графика, формулы или таблицы, первая строка которой содержит возможные значения *xi*, а вторая – вероятности *pi:*

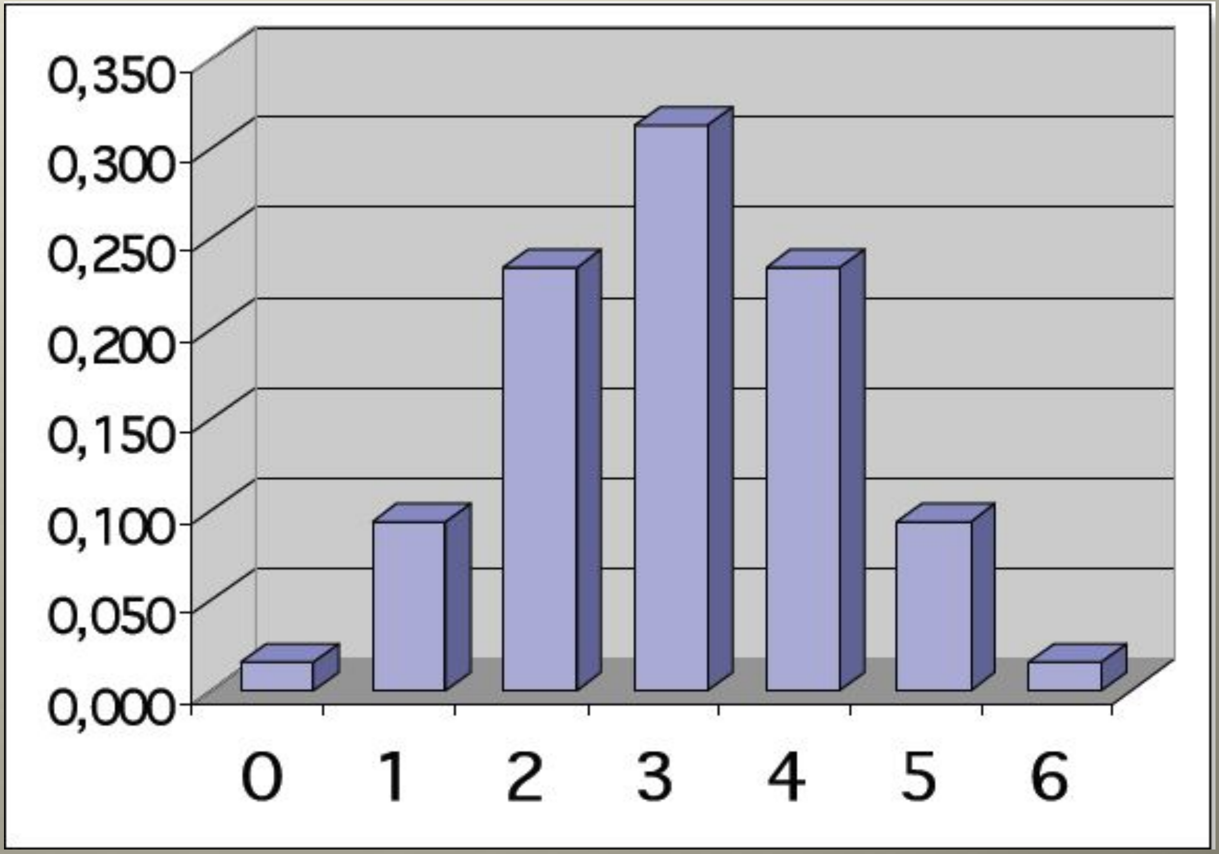
Мальчики, x	**Вероятность, P(x)**
0	0,016
1	0,094
2	0,234
3	0,313
4	0,234
5	0,094
6	0,016

Таблица задает закон распределения случайной величины

Вероятностное распределение - график

ГИСТОГРАММА - также указывает на соответствие между принимаемыми значениями случайной величины и их вероятностями.

Распределение числа мальчиков среди шести новорожденных



Вероятностное распределение - формула

Вероятностное распределение случайной величины может быть задано аналитически – **формулой**

Пример. Формула для нахождения вероятности k мальчиков среди 6 новорожденных:

$$P_6(k) = C_6^k \cdot (0{,}5)^6$$

Необходимое условие и его проверка

Для любой дискретной случайной величины сумма вероятностей должна быть равна единице:

$$\sum P(x) = 1$$

Проверка. Задана случайная величина:

X	0	1	3	5
P	0,10	0,30	0,20	0,50

Проверим необходимое условие:

$$\Sigma P(X) = 0{,}100 + 0{,}300 + 0{,}200 + 0{,}500 = 1{,}100 \neq 1{,}000$$

Условие не выполнено.
ВЫВОД. Такой случайной величины не существует.

Лотерея - пример

На корпоративной вечеринке выпущено 100 билетов лотереи.

Предусмотрены следующие выигрыши:

1 билет	1000 руб.
10 билетов	100 руб.
89 билетов	без выигрыша

1. Построить закон распределения случайной величины X – суммы выигрыша одного билета.

2. Если билет стоит 30 руб., то построить закон распределения случайной величины Y – суммы чистого выигрыша одного билета.

Лотерея - пример

1. Закон распределения суммы выигрыша:

X	0	100	1000
P	0,89	0,10	0,01

2. Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

Математическое ожидание

Математическое ожидание (expected value) случайной величины есть ее среднее значение.

Для дискретной случайной величины находится по формуле:

$$M(X) = \sum \left(x \cdot P(x) \right)$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности

Свойства математического ожидания

$$M(C) = C$$

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной

$$M(CX) = C*M(X)$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(X1X2...Xn) = M(X1)*M(X2)*...*M(Xn)$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей

$$M(X1 + X2 + ... + Xn) = M(X1) + M(X2) + ... + M(Xn)$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых

Математическое ожидание выигрыша

1. Закон распределения суммы выигрыша:

X	0	100	1000
P	0,89	0,10	0,01

Математическое ожидание суммы выигрыша:

$$M(X) = \sum \left(x \cdot P(x) \right) =$$

$$= 0 \cdot 0,89 + 100 \cdot 0,10 + 1000 \cdot 0,01 = 20$$

Математическое ожидание выигрыша

2. Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

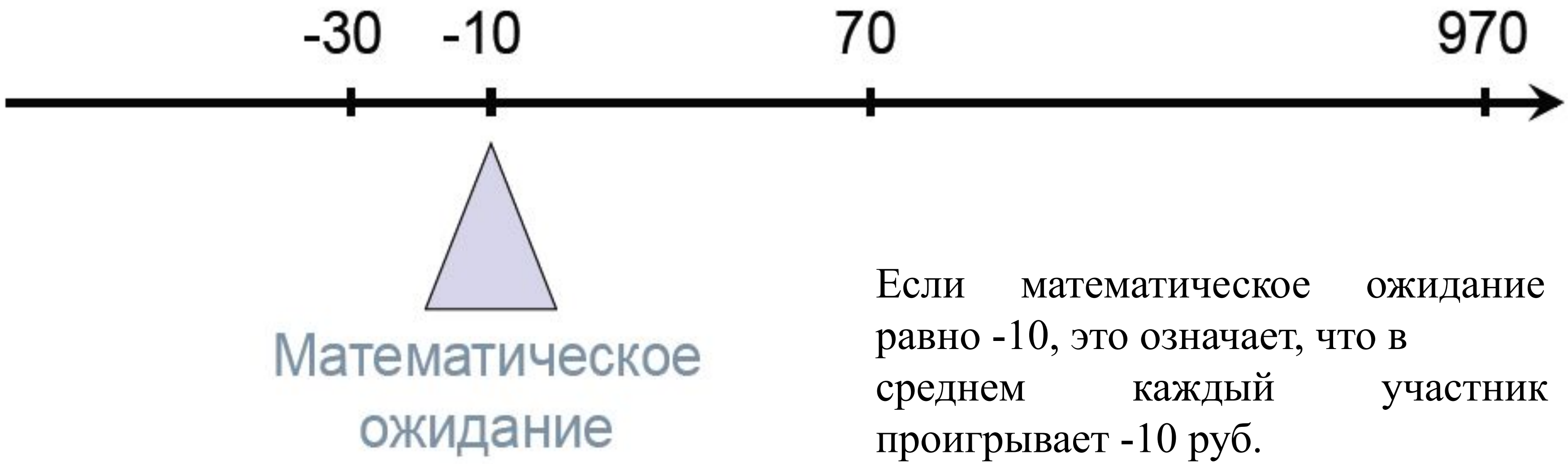
Математическое ожидание чистого выигрыша:

$$M(X) = \sum\left(x \cdot P(x)\right) =$$

$$= -30 \cdot 0{,}89 + 70 \cdot 0{,}10 + 970 \cdot 0{,}01 = -10$$

Интерпретация

Математическое ожидание есть точка равновесия:



Если математическое ожидание равно -10, это означает, что в среднем каждый участник проигрывает -10 руб.

Такую лотерею можно считать несправедливой, поскольку в ней предусмотрен выигрыш организатора.

Если бы математическое ожидание было равно нулю, то выигрыши одних участников брались бы из проигрышей других участников.

Дисперсия

Дисперсия (variance) случайной величины характеризует отклонение случайной величины от ее среднего значения.

Для дискретной случайной величины находится по формуле:

$$D(X) = \sum \left((x - M(X))^2 \cdot P(x) \right)$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D(X) = M([X - M(X)]^2).}$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$\boldsymbol{D(X) = M(X2) - [M(X)]^2.}$$

Свойства дисперсии

$D(C) = 0$

Свойство 1. Дисперсия постоянной равна нулю

$D(CX) = C^2 * D(X)$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя в квадрат

$D(X1 + X2 + ... + Xn) = D(X1) + D(X2) + ... + D(Xn)$

Свойство 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых

Стандартное отклонение

Стандартное отклонение (standard deviation) случайной величины есть квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Вычисление дисперсии чистого выигрыша

Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

Дисперсия чистого выигрыша:

$$D(X) = \sum\left((x - M(X))^2 \cdot P(x)\right)$$

$$= (-30 + 10)^2 \cdot 0{,}89 + (70 + 10)^2 \cdot 0{,}10 +$$

$$+ (970 + 10)^2 \cdot 0{,}01 = 10600$$

Вычисление стандартного отклонения

Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} =$$

$$= \sqrt{10600} = 103{,}0$$

Вычисление дисперсии

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$	$x^2 \cdot P(x)$
0	0,016	-	-
1	0,094	0,094	0,094
2	0,234	0,468	0,936
3	0,313	0,939	2,817
4	0,234	0,936	3,744
5	0,094	0,470	2,350
6	0,016	0,096	0,576
	1,000	3,000	10,517

Вычисляем дисперсию при помощи таблицы по второй формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 =$$

$$= 10{,}517 - (3{,}0)^2 = 1{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)} =$$

$$= \sqrt{1{,}5} = 1{,}2$$

Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Геометрическое распределение

Распределение Пуассона

Биномиальное распределение

Случайная величина X называется распределенной по <u>биномиальному закону</u> с параметрами n,p >0, если X принимает значения: 0,1,2,…n и вероятность того, что случайная величина примет значение X=m находится по формуле Бернулли:

$$p(X=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$$

где *q=1-p.*

Случайную величину *X*, распределенную по биномиальному закону, можно трактовать следующим образом:

Рассмотрим событие *A*, которое происходит в опыте с вероятностью *p* и не происходит с вероятностью $q=1-p$. Производится серия из n опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Случайная величина *X* - сколько раз событие *A* произошло в данной серии опытов.

Пример применения биномиального распределения

Составить ряд распределения величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n=4$, $p=1/3$.

Решение примера

Производится серия из n=4 опытов. Случайная величина X - число опытов, в которых может произойти событие A, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности находятся по формуле Бернулли при n=4, p=1/3, q=1-1/3=2/3.

$$p(X=m)=C_4^m\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-m}$$

Вероятность того, что событие A не произойдет ни в одном опыте (m=0):

$$p(X=0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

Вероятность того, что событие А произойдет в одном опыте (m=1):

$$p(X=1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

Аналогично находим вероятности того, что это событие произойдет в двух (m=2), в трех (m=3) и в четырех (m=4) опытах:

$$p(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$p(X=4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X будет выглядеть так:

X_m	0	1	2	3	4
P_m	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Можно убедиться, что суммарная вероятность действительно равна 1.

Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

X - число опытов в серии из n, в которых произошло событие A.

Введем для каждого i=1,2…n случайную величину Z_i .

Пусть Z_i принимает всего два значения: 1 - если событие A произойдет в i-ом опыте и 0 - если событие A не произойдет в i-ом опыте.

Тогда событие X выразится через сумму событий Z_i :

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Zn$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X]=M[Z_1]+M[Z_2]+\ldots+M[Z_n]$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	0	1
P_i	q	p

Тогда $M[Z_i]=p$ и $M[X]=np$.

Найдем дисперсию случайной величины Z_i

$$D[Z_i] = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq$$

Так как случайные величины Z_i независимы, то

$$D[X] = D[Z_1] + D[Z_2] + \ldots + D[Z_n] =$$

$$= n \cdot D[Z_n] = n \cdot p \cdot q$$

Таким образом, для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = n \cdot p$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q$$

Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Геометрическое распределение

Распределение Пуассона

Геометрическое распределение

Случайная величина X называется распределенной
<u>по закону геометрической прогрессии</u>
с параметром p>0, если она может
принимать значения 1,2,3…,k,… и вероятность
того, что X примет значение, равное k,
находится по формуле:

$$p(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$

где *q=1-p*.

Данное распределение можно трактовать следующим образом.

- **Рассмотрим событие *A*, которое происходит в опыте с вероятностью *p*.**
- **Проводится серия опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга до тех пор, пока не случится событие *A*.**
- **Число опытов и будет случайной величиной X, распределенной по закону геометрической прогрессии.**

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия такой случайной величины будут определяться выражениями:

$$M[X] = \frac{1}{p}$$

$$D[X] = \frac{q}{p^2}$$

Пример применения геометрического распределения

В автосалоне покупатели выбирают машины. Как правило, первые несколько автомобилей отвергаются, пока покупатель не найдет подходящий. Найти ряд распределения случайной величины - числа отвергнутых автомобилей, если вероятность того, что покупателю понравится машина равна 1/5.

Решение примера

p=1/5, q=1-1/5=4/5

Тогда вероятность, что клиент купит машину с первого раза будет

$$p(X=1)=q^{1-1}\cdot p=\left(\frac{4}{5}\right)^{0}\cdot\frac{1}{5}$$

Аналогично найдем, что машина будет куплена со второго и третьего раза:

$$p(X=2)=q^{2-1}\cdot p=\left(\frac{4}{5}\right)^{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

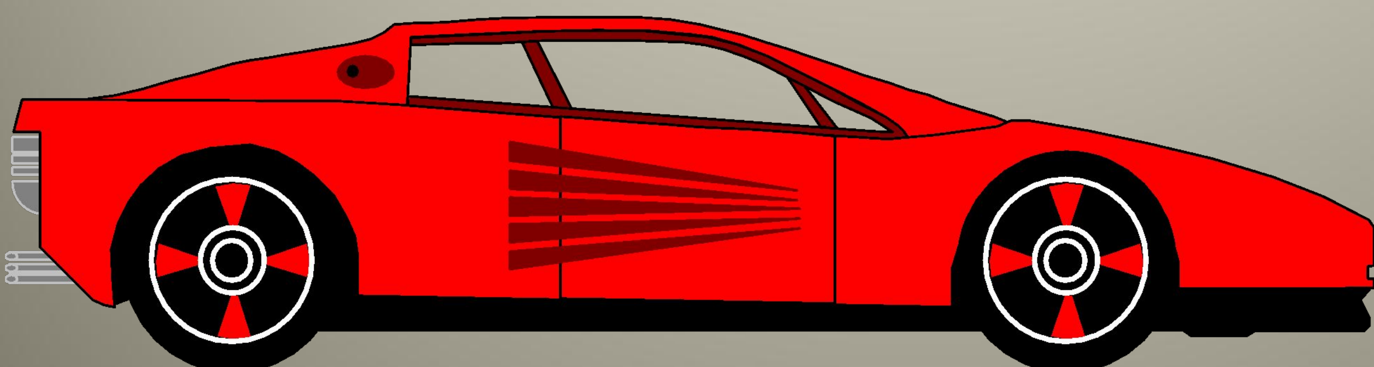
$$p(X=3)=q^{3-1}\cdot p=\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

Тогда в общем, вероятность того, что машина будет куплена с *k* -го раза будет:

$$p(X=k)=q^{k-1}\cdot p=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}$$

Тогда ряд распределения этой случайной величины будет иметь вид:

X_i	1	2	3	…	k	…
P_i	1/5	4/25	16/125	…	(4/5)k-11|5	…



Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Геометрическое распределение

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона

Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона с параметром a>0, если она может принимать значения 0, 1, 2,…,k,… и вероятность того, что она примет значение X=k находится по формуле:

$$p(X = k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Распишем математическое ожидание по определению:

$$M[X=k]=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^k}{k!}=$$

Первый член этой суммы равен нулю, поэтому суммирование можно начать с *k=1*:

$$=e^{-a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{a^k}{k!}=$$

Вынесем *a* за знак суммы и переобозначим *n-1=m*:

$$= a \cdot e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a \cdot e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} =$$

Полученная сумма представляет собой разложение в ряд функции e^a:

$$e^a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}$$

Тогда:

$$= a \cdot e^{-a} \cdot e^a = a$$

***Таким образом, параметр а имеет смысл математического ожидания*.**

Найдем дисперсию этой случайной величины. Будем использовать формулу

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Первое слагаемое найдем по определению математического ожидания, аналогично предыдущему случаю:

$$M[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!} =$$

Вынесем *a* за знак суммы и сократим одно *k*:

$$=a\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=a\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=$$

Разобьем на две суммы:

$$=a\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}+a\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a}\cdot\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=$$

Переобозначим *k-1=m*:

$$=a\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^{m}}{m!}+a\cdot e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{m}}{m!}=$$

Сумму в первом слагаемом мы уже считали при нахождении математического ожидания. Она равна *a*.

Сумма во втором слагаемом снова представляет разложение экспоненты в ряд.

$$= a \cdot a + a \cdot e^{-a} \cdot e^{a} = a^2 + a$$

Теперь находим саму дисперсию:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = a^2 + a - a^2 = a$$

Таким образом, и *дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, тоже равна параметру а.*

Пример применения геометрического распределения

При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Среднее число сбоев за сутки равно 1.5. Считая, что число сбоев на любом участке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятности событий:

A - за 2 суток не будет ни одного сбоя;

B - в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

C - за неделю произойдет не менее трех сбоев.

Решение примера

1.

Чтобы воспользоваться распределением Пуассона нужно определить параметр *a*.

Так как он равен математическому ожиданию этой величины, то он имеет смысл среднего числа сбоев, произошедших за данный промежуток времени.

Среднее число сбоев за двое суток равно

$$a = 2 \cdot 1.5 = 3$$

Так как находится вероятность того, что <u>за 2 суток не произойдет ни одного сбоя</u>, то *k=0*. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$p(A) = p_0 = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = e^{-3} = 0.05$$

2.

Чтобы найти вероятность того, что за сутки произойдет хотя бы один сбой, нужно перейти к вероятности противоположного события: <u>за сутки не произойдет ни одного сбоя.</u>

Вероятность этого события снова находим по формуле Пуассона при *a=1.5* и *k=0*:

$$p_0 = \frac{1.5^0}{0!} \cdot e^{-1.5} = e^{-1.5} = 0.223$$

Тогда искомая вероятность будет:

$$p(B) = 1 - p_0 = 1 - 0.223 = 0.777$$

3.

Найдем вероятность того, что за неделю произойдет не менее 3 сбоев.

Противоположное событие: <u>за неделю произойдет не более двух сбоев</u>.

Это значит, произойдет 0, 1 или 2 сбоя.

Соответствующие вероятности находятся при k=0, k=1, k=2 и a=10.5.

Тогда:

$$p(C) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) =$$

$$= 1 - \left(\frac{10.5^0}{0!} \cdot e^{-10.5} + \frac{10.5^1}{1!} \cdot e^{-10.5} + \frac{10.5^2}{2!} \cdot e^{-10.5} \right) = 0.998$$

Биномиальное распределение и распределение Пуассона связаны: распределение Пуассона является <u>предельным</u> для биномиального.

Если случайная величина X распределена по биномиальному закону, и число опытов n - велико, а вероятность события в каждом опыте p мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить пуассоновским при $a=np$:

$$p(X=k)\approx\frac{a^k}{k!}e^{-a} \quad\Rightarrow\quad a=n\cdot p$$

Пример применения распределения Пуассона

По цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.04. Используя предельное свойство биномиального распределения, найти вероятность того, что в цель попадет один снаряд.

Решение примера

Событие *A* - попадание при одном выстреле.

Вероятность *p(A)=0.04.* Всего производится серия таких выстрелов: n=50.

Так как *p* достаточно мало, а *n* - велико, биномиальное распределение приближенно можно заменить распределением Пуассона.

Найдем параметр *a* распределения Пуассона:

$$a = n \cdot p = 50 \cdot 0.04 = 2$$

Тогда вероятность $p_{1,50}$ того, что из 50-ти выстрелов будет одно попадание по формуле Пуассона будет:

$$p_{1,50} = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0{,}271$$

Функция распределения случайной величины

Введем новую характеристику случайных величин - функцию распределения и рассмотрим ее свойства.

Функция распределения - самая универсальная характеристика случайной величины. Она может быть определена как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим вероятность того, что СВ Х примет значение, меньшее, чем х, т.е. $P(X<x)$,

$$F(x)=p(X<x)$$

функция распределения

Свойства функции распределения

1

Функция распределения является <u>неубывающей</u> функцией своего аргумента, т. е. если

$$x_2 > x_1 \quad \text{то} \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

2

На минус бесконечности функция распределения равна нулю:

$$F(-\infty) = 0$$

3

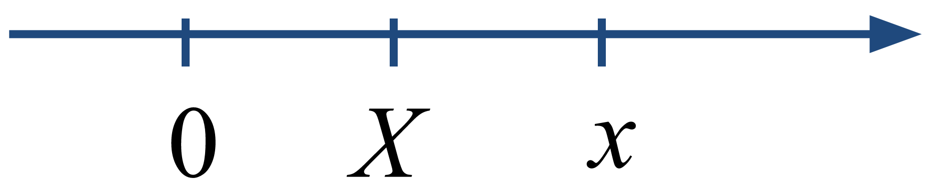
На плюс бесконечности функция распределения равна единице:

$$F(+\infty) = 1$$

Проиллюстрируем эти свойства с помощью *геометрической интерпретации*.

Рассмотрим случайную величину *X* как случайную точку на оси x, которая в результате опыта может принять то или иное положение.

Тогда функция распределения есть вероятность того, что эта случайная точка *X* окажется левее точки *x*.



Будем увеличивать *x*, т.е. перемещать точку *x* вправо.

При этом, вероятность того, что случайная точка *X* попадет левее точки *x* не может уменьшится.

Поэтому функция распределения с возрастанием аргумента убывать не может.

Если неограниченно перемещать точку *x* влево по оси абсцисс (устремлять x к минус бесконечности), то тогда попадание точки *X* еще левее становится невозможным событием, вероятность которого равна нулю.

Аналогично, перемещая x вправо до бесконечности, получаем, что попадание точки X вправо от x становится достоверным событием, вероятность которого равна 1.

График функции распределения $F(x)$ представляет собой график неубывающей функции, значения которой находятся в пределах от *0 до 1*, причем в отдельных точках функция может иметь разрывы.

Если задана дискретная случайная величина, то по ее ряду распределения можно построить функцию распределения.

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i)$$

где неравенство под знаком суммы означает, что суммирование ведется по всем значениям x_i которые меньше x.

Рассмотрим вероятность того, что случайная величина примет значение в пределах от α до β:

$$\boxed{p(\alpha < x < \beta)}$$

Пусть событие *A* заключается в том, что случайная величина *X* примет значение, меньшее β: $X < \beta$,

Событие *B* заключается в том, что $X < \alpha$

Событие *C* состоит в попадании случайной величины X в интервал от α до β. Тогда искомая вероятность будет вероятностью события *C*:

$$p(\alpha < x < \beta) = p(C)$$

Тогда *A=B+C*.
По теореме о сложении вероятностей имеем:

$$p(A) = p(B) + p(C)$$

$$p(x < \beta) = p(x < \alpha) + p(\alpha < x < \beta)$$

Используя определение функции распределения *F(x)*:

$$F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha < x < \beta)$$

$$p(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ СВ НА ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Пример

Производится серия из 4 опытов, в каждом
из которых может появится событие А с
вероятностью 0.3. Случайная величина
Х – число появлений события А
в опытах. Построить функцию
распределения случайной величины Х.

Решение примера

Случайная величина *X* может принять 5 значений:

0, 1, 2, 3, 4.

Чтобы построить ее ряд распределения, найдем вероятности каждого из этих значений по формуле Бернулли при *p=0.3 и q=1-0.3=0.7* :

$$p_{0,4} = C_4^0 \cdot (0.3)^0 (0.7)^4 = 0.2401$$

$$p_{1,4} = C_4^1 \cdot (0.3)^1 (0.7)^3 = 0.4116$$

$$p_{2,4} = C_4^2 \cdot (0.3)^2 (0.7)^2 = 0.2646$$

$$p_{3,4} = C_4^3 \cdot (0.3)^3 (0.7)^1 = 0.0756$$

$$p_{4,4} = C_4^4 \cdot (0.3)^4 (0.7)^0 = 0.081$$

Тогда ряд распределения случайной величины будет выглядеть следующим образом:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.081

Построим функцию распределения этой случайной величины.

Так как случайная величина X дискретна, то функция распределения будет меняться скачкообразно, причем величина скачка (разрыва) будет равна вероятности данного значения.

Найдем функцию распределения на каждом из промежутков X :

1 $x \le 0$ $F(x) = p(X < 0) = 0$

2 $0 < x \le 1$ $F(x) = p(X < 1) = p(X = 0) = 0.2401$

3 $1 < x \le 2$ $F(x) = p(X < 2) = p(X = 0) +$

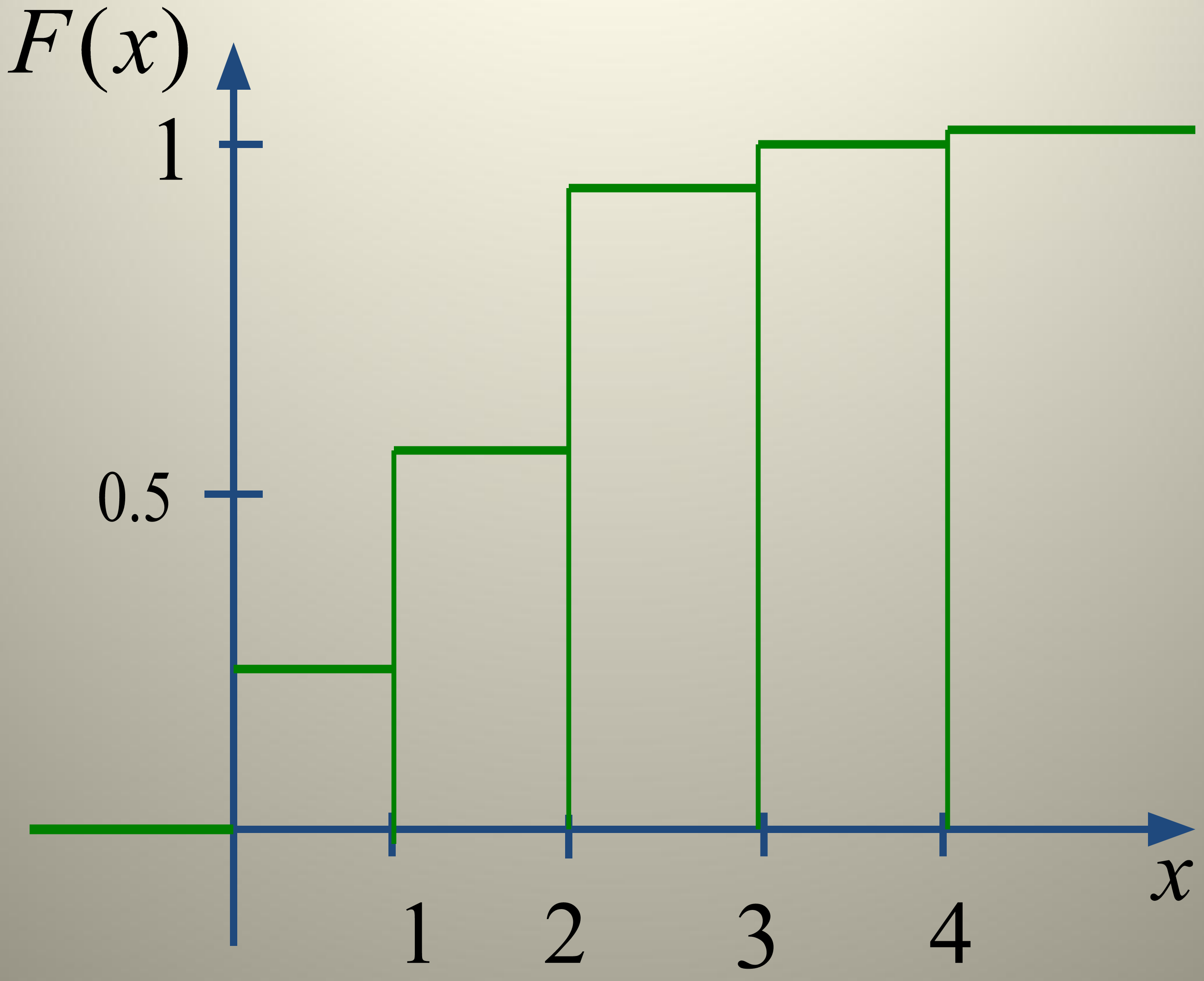
$+ p(X = 1) = 0.2401 + 0.4116 = 0.6517$

4. $\underline{2 < x \leq 3}$ $F(x) = p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0.2401 + 0.4116 + 0.2646 = 0.9163$

5. $\underline{3 < x \leq 4}$ $F(x) = p(X < 4) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0.2401 + 0.4116 + 0.2646 + 0.0756 = 0.9919$

6. $\underline{4 < x}$ $F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 0.2401 + 0.4116 + 0.2646 + 0.0756 + 0.081 = 1$

По найденным значениям строим функцию распределения.



$F(x)$
1
0.5
x
1
2
3
4